SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN MEDIANTE EL METODO DE LOS GRUPOS DE LIE

RESUMEN
En este artículo se aplica el método de los grupos de Lie para hallar la solución de varias ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, haciendo uso de las coordenadas canónicas y del factor integrante de Lie.

PALABRAS CLAVES: Grupos de Lie, Ecuaciones Diferenciales.

ABSTRACT
In this paper the Lie Group Method is applied to the solution of several first order ordinary differential equations, through canonical coordinates and the Lie Integrating Factor.

KEYWORDS: Lie Groups, Differential Equations

HUGO HERNAN ORTIZ A.
Ingeniero Químico.
Esp. En Educación.
Estudiante Maestría en Enseñanza de la Matemática, UTP.
Profesor
Universidad Autónoma de Manizales.
hugoral68@hotmail.com

ABEL ENRIQUE POSSO
Matemático.
M.Sc. Ciencias Matemáticas.
Ph.D. Ciencias Matemáticas
Profesor Titular
Universidad Tecnológica de Pereira.

1. INTRODUCCIÓN

En el proceso enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en los cursos de pregrado de nuestras universidades, por lo general, la propuesta es clasificar la ecuación a resolver y mirar la posibilidad de que dicha ecuación pertenezca a un tipo especial cuya solución sea conocida o de que exista un cambio de variables que permita llevar la ecuación a una más simple. Lo anterior conduce a una serie de técnicas dispersas que el estudiante debe aprender por separado y que aparentemente no se relacionan las unas con las otras.

Sophus Lie (1842-1899) hizo uso de los grupos de transformaciones en un esfuerzo por trasladar a las ecuaciones diferenciales, los resultados encontrados por Evarist Galois en la solución de ecuaciones polinomiales. Entre muchos otros resultados que merecen destacarse, Lie descubrió que las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden invariantes bajo cierto grupo de transformaciones, podían ser llevadas a variables separables mediante cambios de coordenadas o a exactas mediante el uso de un factor integrante, determinando así un camino único de solución para ecuaciones diferenciales lineales, homogéneas, exactas y de Bernoulli, entre otras.

En este artículo se expondrá el método del factor integrante de Lie y el de las coordenadas canónicas, aplicándolo a la solución de varias ecuaciones diferenciales lineales y no lineales de primer orden. Este trabajo, de carácter divulgativo y de reflexión, pretende llamar la atención sobre la extensa teoría de los Grupos de Lie en relación con las ecuaciones diferenciales, que hoy en día se constituye en una de las ramas de la matemática con gran proyección desde el punto de vista investigativo. El presente trabajo se justifica, dada la necesidad de un mayor acercamiento a esta teoría por parte de los círculos académicos dedicados a la matemática y a su enseñanza en el ámbito regional y nacional.

2. DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO

Lo primero que se hará es establecer un criterio que nos permita identificar la invariación de una ecuación diferencial bajo cierto tipo de transformaciones.

2.1 Criterio de Invariación

Diremos que la ecuación diferencial de primer orden

$$f(x_1, y_1, y_1') = 0, \qquad (1)$$

es invariante bajo el conjunto de transformaciones

$$\begin{aligned} x_1 &= \phi(x, y, \alpha) \\ y_1 &= \varphi(x, y, \alpha) \\ y'_1 &= \theta(x, y, y', \alpha) = \frac{dy_1}{dx_1} \end{aligned} \qquad (2)$$

si y solo si

$$f(x_1, y_1, y_1') = f(x, y, y'). \qquad (3)$$

Expandiendo la función $f(x_1, y_1, y_1')$ en serie de Taylor alrededor de $\alpha = 0$ obtenemos

Fecha de Recepción: 31 Agosto de 2006
Fecha de Aceptación: 01 Marzo de 2007

$$f_1(x_1,y_1,y_1') = f_1(x_1,y_1,y_1')\big|_{\alpha=0} + \alpha\frac{df_1}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} + \frac{\alpha^2}{2}\frac{d^2f_1}{d\alpha^2}\Big|_{\alpha=0} + \cdots \quad (4)$$

Definiendo el operador diferencial U mediante

$$Uf = \xi f_x + \eta f_y + (\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y(y')^2) f_{y'}, \quad (5)$$

donde

$$\xi(x,y) = \frac{\partial\phi}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0}$$
$$\eta(x,y) = \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0} \quad (6)$$

son llamados generadores infinitesimales del grupo, se tiene de (4) que

$$f_1(x_1,y_1,y_1') = f(x,y,y') + \alpha Uf + \frac{\alpha^2}{2}U^2 f + \cdots \quad (7)$$

$$f_1(x_1,y_1,y_1') = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k U^k f}{k!} = \exp(\alpha U) f \quad (8)$$

conocida como la exponenciación de U.

De la ecuación (7) se aprecia que una condición necesaria y suficiente para la invariación de *f* bajo el grupo de transformaciones es

$$Uf = 0, \quad (9)$$

es decir,

$$\xi f_x + \eta f_y + (\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y(y')^2) f_{y'} = 0 \quad , \quad (10)$$

llamada condición de invariación infinitesimal, la cual puede ser usada para encontrar la ecuación de primer orden invariante bajo un grupo de transformaciones dado, o como haremos en este desarrollo, dada una ecuación diferencial, identificar generadores ξ y η los cuales permiten, mediante el uso de la serie de Taylor, construir el grupo de transformaciones que dejan invariante la ecuación diferencial.

No existe una manera sistemática de resolver la ecuación de invariación para toda ecuación diferencial de primer orden, su solución en todos los casos depende en mucho de la habilidad y la intuición, así como de diferentes heurísticas, una de ellas es suponer la forma de un generador (hacerlo cero por ejemplo) para establecer restricciones que permitan hallar el generador restante.

En la actualidad existen varios paquetes computacionales que permiten simplificar en forma notable este proceso, posibilitando de esta forma un acercamiento a la aplicación del método y su enseñanza. Una de las revisiones más completas de este tipo de software especializado fue realizado por Hereman [7].

La invariación de una ecuación diferencial, tiene como consecuencia directa el hecho de que cualquier solución es transformada por el grupo en una nueva solución de la ecuación diferencial [4].

En la teoría de Lie, se asume que las funciones ξ y η son analíticas en todas sus variables y se dota al conjunto de transformaciones (2) una estructura de grupo mediante la operación de composición, de ahí el nombre de Grupo de Lie [6].

A manera de ejemplo consideremos la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad (11)$$

Para esta ecuación se tiene que

$$f_1(x_1,y_1,y_1') = y' + P(x)y - Q(x) = 0$$
$$f_x = P'(x)y - Q'(x)$$
$$f_y = P(x)$$
$$f_{y'} = 1$$

(12)

$$y' = Q(x) - P(x)y$$

Suponiendo $\xi = 0$, la ecuación (10) se reduce a:

$$\eta P(x) + \eta_x + \eta_y(Q(x) - P(x))y = 0. \quad (13)$$

Asumiendo $\eta_y = 0$, se obtiene:

$$\eta = e^{-\int p(x)dx}, \quad (14)$$

luego, un grupo bajo el cual es invariante esta ecuación diferencial está determinado por los generadores

$$\xi = 0 \quad y \quad \eta = e^{-\int p(x)dx} \quad (15)$$

De manera similar, varios autores (ver [2]) han desarrollado tablas en las que se relacionan diversas ecuaciones diferenciales de primer orden con generadores de grupos bajo las cuales dichas ecuaciones son invariantes. En estas tablas las ecuaciones aparecen en una forma general en la cual quedan incluidas la mayoría de aquellas de las cuales se conoce solución.

El siguiente teorema brinda un modo explícito para relacionar la solución de una ecuación diferencial de primer orden, con los generadores de un grupo bajo el cual esta es invariante.

2.2 Teorema del Factor Integrante de Lie

Suponga que la ecuación sobre un dominio simplemente conexo,

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \quad (16)$$

admite un grupo uniparamétrico G, con generadores ξ y η. Entonces la función

$$\mu(x)=\frac{1}{\xi M+\eta N},\qquad \xi M+\eta N\neq 0 \tag{17}$$

es un factor integrante de la ecuación dada.

La prueba del anterior teorema, procede por la equivalencia de la condición de integrabilidad de las ecuaciones exactas y la ecuación de invariación (10).
De (10) y (16) se sigue que la ecuación de invariación es

$$\begin{aligned}&(\xi\frac{\partial M}{\partial x}+\eta)\frac{\partial M}{\partial y})N-(\xi\frac{\partial N}{\partial x}+\eta\frac{\partial N}{\partial y})M+\frac{\partial N}{\partial x}N^2\\&-(\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial x})MN-\frac{\partial\xi}{\partial y}M^2=0,\end{aligned} \tag{18}$$

en tanto que la condición para que (17) sea un factor integrante de (16) es

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}, \tag{19}$$

sustituyendo la fórmula para el factor integrante, se tiene:

$$\begin{aligned}&\mu^2\left[\eta(`N\frac{\partial M}{\partial y}-M\frac{\partial N}{\partial y})-\frac{\partial\xi}{\partial y}M^2-\frac{\partial\eta}{\partial y}MN\right]=\\&\mu^2\left[\xi(M\frac{\partial N}{\partial x}-N\frac{\partial M}{\partial x})-\frac{\partial\xi}{\partial x}MN-\frac{\partial\eta}{\partial x}N^2\right]\end{aligned} \tag{20}$$

al comparar con la ecuación (18), se prueba el teorema (ver [1], [4]).

Para la ecuación lineal ya se habían hallado los generadores ξ y η (15), en consecuencia, un factor integrante para esta ecuación es:

$$\mu(x)=\frac{1}{\xi M+\eta N}=\frac{1}{\exp\left(-\int P(x)dx\right)}=\exp\left(\int P(x)dx\right) \tag{21}$$

resultado suficientemente conocido, presentado en la mayoría de textos básicos de ecuaciones diferenciales ordinarias [8]. Una vez conocido el factor integrante podemos resolver la ecuación diferencial trasformándola en una ecuación diferencial exacta.

Otro ejemplo. Consideremos la ecuación diferencial homogénea

$$y'=\frac{y}{x}+g(x)f\left(\frac{y}{x}\right)\cdot \tag{22}$$

Para esta ecuación se tiene que

$$\begin{aligned}&f=\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}-g(x)f\left(\frac{y}{x}\right),\\&f_x=\frac{y}{x^2}-g'(x)f\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{yg(x)}{x^2}\frac{d}{d(y/x)}f(y/x),\\&f_y=-\frac{1}{x}-\frac{g(x)}{x}\frac{d}{d(y/x)}f(y/x),\\&f_{y'}=1.\end{aligned} \tag{23}$$

Nuevamente, al asumir $\xi=0$ en la ecuación (10) y efectuar cálculos un poco extensos para ser presentados aquí, se obtiene el segundo generador

$$\eta=x\,f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{24}$$

luego un factor integrante para la ecuación homogénea propuesta (18) es:

$$\mu(x)=\frac{1}{\xi M+\eta N}=\frac{1}{x\,f\left(\frac{y}{x}\right)}. \tag{25}$$

Con el procedimiento para las ecuaciones exactas obtenemos

$$\int\frac{g(x)}{x}dx-\int\frac{du}{f(u)}=c,\quad u=\frac{y}{x} \tag{26}$$

2.3 Coordenadas Canónicas

La teoría de Lie da la posibilidad de transformar una ecuación invariante bajo un grupo de transformaciones de la forma (2) en una de variables separables. Las coordenadas que permiten este cambio, X = X(x,y) y Y = Y(x,y), se pueden obtener a partir de los generadores ξ y η mediante las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\xi X_x+\eta X_y&=0,\\ \xi Y_x+\eta Y_y&=1.\end{aligned} \tag{27}$$

Según el método de las características (ver [9]), X es cualquier solución de la forma u = c, de la ecuación ordinaria

$$\frac{dx}{\xi}=\frac{dy}{\eta}, \tag{28}$$

y Y puede encontrarse de las ecuaciones,

$$\frac{dx}{\xi}=\frac{dy}{\eta}=dY, \tag{29}$$

Por ejemplo, consideramos la ecuación de Riccati

$$y'=y^2-2xy+1+x^2, \tag{30}$$

con

$$\begin{aligned}&f=y'-y^2+2xy-1-x^2,\\&f_x=2y-2x,\\&f_y=-2y+2x,\\&f_{y'}=1,\end{aligned} \tag{31}$$

al reemplazar las expresiones (31) en la ecuación de invariación (10), podemos ver que esta se satisface con los generadores $\xi=1$ y $\eta=1$. Las coordenadas canónicas están determinadas por

$$\begin{aligned} X &= y - x \\ Y &= y. \end{aligned} \tag{32}$$

Una manera de escribir la ecuación planteada en términos de las nuevas coordenadas es haciendo

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dy}{dy - dx} = \frac{y'}{y' - 1}. \tag{33}$$

Sustituyendo y' dada en (30) se obtiene la ecuación en variables separables

$$\frac{dY}{dX} = X^2 + 1. \tag{34}$$

Integrando y volviendo a las variables originales se obtiene la solución buscada

$$x + \frac{1}{y - x} = c. \tag{35}$$

Consideremos otro ejemplo. La ecuación

$$\frac{y - xy'}{x + yy'} = g(x^2 + y^2), \tag{36}$$

en general, no es lineal, no es exacta, no es de Bernoulli y el cambio de variable $u = x^2 + y^2$ no conduce a una simplificación útil, es decir, los métodos convencionales fallan.

La ecuación de invariación (10) puede utilizarse para demostrar que esta ecuación es invariante bajo el grupo con generadores infinitesimales $\xi = -y$ y $\eta = x$. Si se desarrolla la serie (7) para $f_1 = x_1$ y luego para $f_1 = y$, se obtienen las ecuaciones del grupo de las rotaciones en el plano:

$$\begin{aligned} x_1 &= x\cos\alpha - y sen\alpha \\ y_1 &= x sen\alpha + y\cos\alpha \end{aligned} \tag{37}$$

Para $\xi = -y$ y $\eta = x$ las coordenadas canónicas encontradas son

$$\begin{aligned} X &= x^2 + y^2, \\ Y &= \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right). \end{aligned} \tag{38}$$

Entonces

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{1}{2(x^2 + y^2)}\left(\frac{y - xy'}{x + yy'}\right). \tag{39}$$

Teniendo en cuenta la ecuación planteada (36) se llega a la ecuación en variables separables

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{g(X)}{2X}, \tag{40}$$

y a la solución buscada

$$\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = -\int \frac{g(x^2 + y^2)}{2(x^2 + y^2)}dx. \tag{41}$$

Es bueno observar que las ecuaciones canónicas encontradas son equivalentes a las coordenadas polares

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{X}\cos Y, \\ y &= \sqrt{X} sen Y, \end{aligned} \tag{42}$$

que nos llevan a la misma solución.

La teoría de Lie nos dice que

$$\tan^{-1}\left(\frac{y_1}{x_1}\right) = -\int \frac{g(x_1^2 + y_1^2)}{2(x_1^2 + y_1^2)}dx, \tag{43}$$

también es una solución, que puede ser escrita en términos de las variables x y y mediante las ecuaciones del grupo (37).

3. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

3.1. El método del factor integrante de Lie permite tratar con una sola técnica la solución de la gran mayoría de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, abordadas en los cursos regulares a nivel de pregrado, siendo posible su aplicación tanto a ecuaciones lineales como no lineales.

3.2. Aunque la ecuación de invariación conlleva cálculos que por lo general son extensos y a veces más complicados que otros métodos de solución (cuando existen), en problemas de aplicación donde resulten ecuaciones diferenciales sin método de solución conocido podemos intentar obtener una solución cerrada mediante la teoría de Lie.

3.2. Debe estudiarse la posibilidad de integrar este método a los contenidos de los cursos regulares en ecuaciones diferenciales, incluyendo las ayudas computacionales pertinentes.

3.3. El lector interesado, habrá notado que preguntas similares a la hecha para las ecuaciones de primer orden, pueden hacerse para las ecuaciones ordinarias de orden superior e incluso para las ecuaciones en derivadas parciales. Por ejemplo, dada una ecuación de orden superior, ¿qué criterio garantizaría una posible reducción en el orden de la misma?, si es una ecuación en derivadas parciales, ¿qué criterio podría aplicarse para garantizar una reducción en el número de variables independientes? Sorprendentemente la respuesta es la misma: El criterio de invariación bajo grupos de Lie (ver [1], [3], [4]).

4. BIBLIOGRAFÍA

[1] OLVER, P. J, Application of Lie Groups to Differential Equations, Second Edition, Springer Verlag, New York, 1993.

[2] GEORGE, Emanuel, Solution of Ordinary Differential Equations by Continuous Groups, CHAPMAN and HALL/CRC, United States, 2001.

[3] BLUMAN, G. and KUMEI, S, Symmetries and Differential Equations, Second Edition, Springer Verlag, New York, 1989.

[4] CAMPOS, Alberto, Iniciación en el análisis de ecuaciones diferenciales mediante grupos de Lie, Prepublicación, Universidad Nacional de Colombia, Colombia, 1995.

[5] CLARKSON, Peter y MANSFIELD, Elizabeth , Symmetry Reductions and exact solutions of a class of Nonlinear Heat Equations, Department of mathematic, University of Exeter, University of Colorado. Journal of nonlinear mathematical Physics, Agosto 10 de 2002.

[6] CAICEDO, J. F, Teoría de Grupos, Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemáticas y estadística, Tercera Edición, Colombia, 1987.

[7] HEREMAN, W, Review of Symbolic Software for Lie Symmetrie Analysis, Mathematical and Computer Modelling ,Vol. 25 (8/9), 1997. /www.df.uba.ar/users/jakubi/simetrias/software.html.

[8] NAGLE, R.K. SAFF, E.B, SNIDER,A.D. Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera, Editorial Pearson Educación, Mexico, 2005.

[9] MC OWEN, Robert, Partial Differential Equations: Methods and Applications, Prentice Hall, Unites States of America 1996.