EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LAS SOLUCIONES DE PROBLEMAS DIFERENCIALES

Existence and uniqueness of the solutions of differential problems

RESUMEN
En este artículo consideramos el problema de la existencia y unicidad del problema diferencial de valor inicial $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, donde f es una función continua que satisface una condición de Lipschitz.

PALABRAS CLAVES: Ecuación diferencial, condición de Lipschitz.

ABSTRACT
In this paper we discuss the existence and uniqueness theorem for first order initial problem $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, *where* f *is a continuous function and satisfies a Lipschitz condition.*

KEYWORDS: Differential equations, Lipschitz condition.

ABEL E. POSSO AGUDELO
Matemático.
PhD. Ciencias Matemáticas
Profesor Titular
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Tecnológica de Pereira
possoa@utp.edu.co

JOSÉ R. GONZALEZ
Profesor Auxiliar, PhD
Matemático
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Tecnológica de Pereira
jorodryy@utp.edu.co

CARLOS ESCOBAR
Ingeniero Civil.
Mg. En Matemáticas
Profesor Auxiliar
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Tecnológica de Pereira
ccescobar@utp.edu.co

1. INTRODUCCIÓN

Los problemas de valor inicial del tipo

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 , \tag{1}$$

aparecen en muchas aplicaciones en física, biología y economía. Aparte de casos particulares, estos problemas diferenciales de primer orden no pueden ser resueltos explícitamente lo cual motiva la búsqueda de métodos aproximados. Sin embargo, antes de intentar hallar la solución exacta o aproximada del problema (1) es conveniente determinar si tal solución existe y si ésta es única. En este artículo retomamos las ideas del método desarrollado por el matemático Francés Emile Picard (1856-1941) para determinar condiciones para la función f bajo las cuales el problema de valor inicial (1) tiene solución única en algún intervalo que contenga a x_0.
Aunque el método de las iteradas de Picard es un método conocido, en la mayoría de los libros de texto que se usan el los cursos de ecuaciones diferenciales de nuestra Universidad únicamente se enuncia el teorema de existencia y unicidad de la solución de (1) sin aclarar el porque bajo ciertas condiciones impuestas a la función f se puede garantizar que el problema diferencial (1) tiene solución única. En este artículo se usan técnicas elementales de cálculo para demostrar condiciones para la función f que garantizan que las iteradas de Picard constituyen una sucesión de funciones que convergen a la solución del problema (1). Igualmente se demuestra que la función límite de tales iteradas es la única solución de (1).

2. EXISTENCIA

Determinemos condiciones que garanticen al menos una solución de (1):
En primer lugar, si $f(x, y)$ es una función continua que depende únicamente x podemos integrar la ecuación en (1) para obtener la solución del problema diferencial.
Por otra parte, si $f(x, y)$ es una función que depende únicamente de y, podemos separar las variables, integrar y obtener una solución del problema (1).
En general, $f(x, y)$ es una función que depende tanto de de x como de y. En este caso podemos tomar cualquier función continua $y = y_0(x)$ que pase por el punto (x_0, y_0), puede ser la función constante $y = y_0$, y reemplazarla en el miembro derecho de la ecuación diferencial en (1) para obtener la ecuación

Fecha de Recepción: 28 Mayo de 2007
Fecha de Aceptación: 24 de Agosto de 2007

$$y' = f(x, y_0(x)) . \qquad (2)$$

Si $f(x, y)$ es una función continua en algún conjunto abierto y conexo S del plano que contiene al punto (x_0, y_0), entonces $f(x, y_0(x))$ será una función de x continua en algún intervalo que contenga a x_0. Integrando (2) obtenemos la función

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))dt, \qquad (3)$$

la cual pasa por el punto (x_0, y_0).

Reemplazando $y_1(x)$ en el miembro derecho de la ecuación diferencial en (1) obtenemos

$$y' = f(x, y_1(x)) .$$

Integrando, obtenemos

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))dt.$$

Utilizando $y_2(x)$ podemos obtener $y_3(x)$, y así sucesivamente. Realizado el proceso n veces obtenemos la función

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt. \qquad (4)$$

Las funciones $y = y_n(x)$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ reciben el nombre de iteradas de Picard. Demostremos que en un cierto intervalo que contiene a x_0, y bajo condiciones especiales, la sucesión de funciones definida en (4) se aproxima a una función límite $y = \varphi(x)$ que es solución del problema (1) en algún intervalo que contiene a x_0.

Consideremos que en la región S la función $f(x, y)$ es continua y acotada. Sea M una constante positiva tal que

$$\left| f(x, y)\right| \le M \quad \text{para} \quad (x, y) \in S . \qquad (5)$$

Sean L_1 y L_2 las rectas que pasan por el punto (x_0, y_0) y tienen pendiente M y $-M$ respectivamente. Sean K_1 y K_2 dos rectas paralelas al eje y tales que los dos triángulos determinados por las rectas L_1, L_2, K_1, y K_2 estén contenidos en S. Consideremos que las rectas K_1 y K_2 cortan al eje x determinando el intervalo $[a,b]$ que contiene a x_0. Sea R la región encerrada por estos triángulos, es decir,

$$R = \left\{ (x, y) : a \le x \le b \,,\ \left|\frac{y - y_0}{x - x_0}\right| \le M \right\}.$$

Probemos que para cualquier entero positivo n, si la gráfica de $y = y_{n-1}(x)$ esta contenida en S entonces la gráfica de la siguiente iterada $y = y_n(x)$ esta contenida en R:

Sea $x \in [a,b]$. Entonces

$$\left| y_n(x) - y_0 \right| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt\right| \le M \left|x - x_0\right|. \qquad (6)$$

Entonces, para $x \ne x_0$ tenemos que

$$\left|\frac{y_n(x) - y_0}{x - x_0}\right| \le M ,$$

lo cual indica que la pendiente de la recta que une (x_0, y_0) con $(x, y_n(x))$ esta entre M y $-M$, garantizando, por lo tanto, que el punto $(x, y_n(x))$ esta en R. Por lo anterior, si $y_0(x)$ se toma de tal manera que su gráfico esta en S, entonces todas las funciones $y = y_n(x)$ estarán en R (para $n = 1, 2, 3, \ldots$).
Además, cada una de estas funciones será continua y tendrá derivada continua en el intervalo $[a,b]$.

Ahora, para cada $n \ge 2$ tenemos que

$$y_n(x) = y_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (y_{k+1}(x) - y_k(x)) . \qquad (7)$$

Si existe una constante $A > 0$ tal que la función f satisface la condición

$$\left| f(x, \tilde{y}) - f(x, \overline{y})\right| \le A\left|\tilde{y} - \overline{y}\right|, \qquad (8)$$

para cada par de puntos $(x, \tilde{y})$ y $(x, \overline{y})$ en R, entonces podemos asegurar que

$$\left|y_{k+1}(x)-y_k(x)\right| \leq A\left|\int_{x_0}^{x}\left|y_k(t)-y_{k-1}(t)\right|dt\right|, \quad (9)$$

para $k = 2,3,4,\ldots$

La condición dada en (8) recibe el nombre de condición de Lipschitz para f respecto a y. La constante A recibe el nombre de constante de Lipschitz.

Como $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son continuas en el intervalo $[a\,,b]$ entonces existe una constante $N > 0$ tal que

$$\left|y_2(x)-y_1(x)\right| \leq N, \text{ para todo } x \text{ en } [a\,,b]. \quad (10)$$

De (9) y (10) se obtiene

$$\begin{aligned}\left|y_3(x)-y_2(x)\right| &\leq A\left|\int_{x_0}^{x}\left|y_2(t)-y_1(t)\right|dt\right| \\ &\leq A\left|\int_{x_0}^{x} N dt\right| = AN\left|x-x_0\right|.\end{aligned}$$

De igual modo,

$$\begin{aligned}\left|y_4(x)-y_3(x)\right| &\leq A\left|\int_{x_0}^{x}\left|y_3(t)-y_2(t)\right|dt\right| \\ &\leq A^2N\left|\int_{x_0}^{x}\left|t-x_0\right|dt\right| = A^2N\,\frac{\left|x-x_0\right|^2}{2}.\end{aligned}$$

Mediante un razonamiento inductivo podemos afirmar que

$$\left|y_{k+1}(x)-y_k(x)\right| \leq A^{k-1}N\,\frac{\left|x-x_0\right|^{k-1}}{(k-1)!},$$

para cada natural $k \geq 2$.

Tomando $h = máx\left\{\left|x_0-a\right|,\left|x_0-b\right|\right\}$ tenemos que

$$\left|y_{k+1}(x)-y_k(x)\right| \leq A^{k-1}N\,\frac{h^{k-1}}{(k-1)!} \quad (11)$$

Como la serie de términos constantes

$\sum_{k=1}^{\infty} A^{k-1}N\,\frac{h^{k-1}}{(k-1)!}$ converge a Ne^{Ah} entonces, por el criterio de Weierstrass, la serie

$$y_1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(y_{k+1}(x)-y_k(x)\right)$$

converge uniformemente a una función $y=\varphi(x)$, lo cual implica que la sucesión de funciones $y = y_n(x)$ definidas en (7) converge uniformemente a la función $y=\varphi(x)$. Como cada $y = y_n(x)$ es una función continua y la convergencia es uniforme entonces $y=\varphi(x)$ también es continua.

Por otra parte,

$$\begin{aligned}&\left|\varphi(x)-\left(y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))dt\right)\right| \\ &\quad = \left|\varphi(x)-y_n(x)+\int_{x_0}^{x}[\,f(t,y_{n-1}(t))-f(t,\varphi(t))]dt\right|\end{aligned}$$

Por (8) y la desigualdad triangular tenemos que

$$\begin{aligned}&\left|\varphi(x)-\left(y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))dt\right)\right| \\ &\quad \leq \left|\varphi(x)-y_n(x)\right| + A\left|\int_{x_0}^{x}\left|y_{n-1}(t)-\varphi(t)\right|dt\right|.\end{aligned}$$

Para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 tal que si $n > n_0$ entonces

$$\left|\varphi(x)-y_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \left|y_{n-1}(t)-\varphi(t)\right| < \frac{\varepsilon}{2Ah},$$

entonces

$$\begin{aligned}\left|\varphi(x)-\left(y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))dt\right)\right| &< \frac{\varepsilon}{2}+A\left|\int_{x_0}^{x}\frac{\varepsilon}{2Ah}dt\right| \\ &= \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2h}\left|x-x_0\right| < \varepsilon,\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\varphi(x) = y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))dt.$$

Por el teorema fundamental del cálculo tenemos que $\varphi'(x) = f(x,\varphi(x))$.

Además, $\varphi(x_0) = y_0$.

Por tanto, $y=\varphi(x)$ es una solución del problema (1).

3. UNICIDAD

Demostremos ahora que en el intervalo $[a\,,b]$ solo hay una solución del problema diferencial (1).

Supongamos que $y = \Psi(x)$ es solución de (1) en el intervalo $[a\,,b]$ y demostremos que esta solución coincide con la solución $y = \varphi(x)$.

Inicialmente demostremos que $(x, \Psi(x))$ está en R para cada x en $(x_0\,,b]$. Sea

$$T = \left\{ x \in [x_0, b] \,:\, \left| \frac{\Psi(x) - \Psi(x_0)}{x - x_0} \right| > M \right\}.$$

Si $T \neq \varnothing$, existe un número x_m que es el menor elemento de T.

Dado que $y = \Psi(x)$ es continua y derivable, por el teorema del valor medio podemos garantizar la existencia de un número x^* entre x_0 y x_m tal que

$$\left| \frac{\Psi(x_m) - \Psi(x_0)}{x_m - x_0} \right| = \left| \Psi'(x^*) \right|.$$

Entonces

$$\left| f(x^*, \Psi(x^*)) \right| = \left| \Psi'(x^*) \right| = \left| \frac{\Psi(x_m) - \Psi(x_0)}{x_m - x_0} \right| > M,$$

luego el punto $(x^*, \Psi(x^*)) \notin S$ y por tanto

$$\left| \frac{\Psi(x^*) - \Psi(x_0)}{x^* - x_0} \right| > M \quad \text{(absurdo, ya que } x^* < x_m \text{).}$$

Luego $T = \varnothing$ y así

$$\left| \frac{\Psi(x) - \Psi(x_0)}{x - x_0} \right| < M \text{ para } x_0 < x \leq b,$$

lo cual garantiza que $(x, \Psi(x)) \in R$ para $x_0 < x \leq b$. De manera similar se demuestra que $(x, \Psi(x)) \in R$ para $a \leq x < x_0$.

Además, $(x_0, \Psi(x_0)) = (x_0, y_0) \in R.$

Por tanto $(x, \Psi(x)) \in R$ para todo $x \in [a, b]$.

Ahora,

$$\left| \Psi(x) - \varphi(x) \right| = \left| \int_{x_0}^{x} [\, f(t, \Psi(t)) - f(t, \varphi(t)) dt \right|$$

$$\leq A \left| \int_{x_0}^{x} \left| \Psi(t) - \varphi(t) \right| dt \right|. \tag{12}$$

Sea $C = \underset{a \leq t \leq b}{máx} \left| \Psi(t) - \varphi(t) \right|$.

Entonces

$$\left| \Psi(x) - \varphi(x) \right| \leq AC \left| x - x_0 \right|. \tag{13}$$

Reemplazando (13) en el integrando de (12) obtenemos

$$\left| \Psi(x) - \varphi(x) \right| \leq A \left| \int_{x_0}^{x} AC \left| t - x_0 \right| dt \right|$$

$$= \frac{A^2 C \left| x - x_0 \right|^2}{2} \tag{14}$$

Reemplazando (14) en el integrando de (12) obtenemos

$$\left| \Psi(x) - \varphi(x) \right| \leq \tfrac{1}{2} A \left| \int_{x_0}^{x} A^2 C \left| t - x_0 \right|^2 dt \right|$$

$$= \frac{A^3 C \left| x - x_0 \right|^3}{3!} \tag{15}$$

Inductivamente llegamos a que

$$\left| \Psi(x) - \varphi(x) \right| \leq \frac{A^n C \left| x - x_0 \right|^n}{n!}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Puesto que $\left| x - x_0 \right| \leq h$ entonces

$$\left| \Psi(x) - \varphi(x) \right| \leq \frac{C(Ah)^n}{n!}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Como

$\dfrac{C(Ah)^n}{n!} \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces

$\left| \Psi(x) - \varphi(x) \right| = 0$ para todo $x \in [a,b]$.

Lo anterior se resume en el siguiente teorema:

Teorema. **(Existencia y unicidad)**

Supongamos que $f(x,y)$ *es una función continua en una región* S *del plano* xy *y que existe una constante* $M>0$ *tal que* $|f(x,y)| \le M$ *para* $(x,y)\in S$.

Sean (x_0, y_0) *un elemento de* S *y* $[a,b]$ *un intervalo tal que la región* S *incluye a la región* R *encerrada por los triángulos formados por las rectas* $x=a$ *y* $x=b$ *y las dos rectas que pasan por el punto* (x_0, y_0) *y tienen pendiente* M *y* $-M$ *respectivamente.*

Supongamos que existe una constante $A>0$ *tal que*

$$|f(x,\tilde{y}) - f(x,\overline{y})| \le A|\tilde{y} - \overline{y}|$$

para cada par de puntos $(x,\tilde{y})$ *y* $(x,\overline{y})$ *de* R .

Entonces existe una única función que pasa por el punto (x_0, y_0) *y que satisface la ecuación diferencial* $y' = f(x,y)$ *en el intervalo* $[a,b]$.

Nota.

La unicidad de la solución garantiza que cualquier función que pase por el punto (x_0, y_0) puede tomarse como primera aproximación.
Mediante el método de las quebradas de Euler se puede demostrar que la continuidad de la función f en S garantiza la existencia de soluciones del problema de valor inicial (1) pero no garantiza la unicidad.

4. CONCLUSIONES

El problema de existencia y unicidad demostrado puede ser generalizado de manera directa, con ideas similares a las expuestas, a problemas diferenciales de orden superior.
En la mayoría de los casos el método de las iteradas de Picard no es un método efectivo porque las integrales a calcular se complican a medida que aumentamos las iteraciones. Sólo en casos muy simples podemos calcular las primeras iteradas de Picard e intuir la solución exacta del problema (1). En algunos casos más complicados las integrales pueden ser calculadas numéricamente mediante algún programa computacional.

5. BIBLIOGRAFÍA

[1] P. Blanchard, R. Devaney y G. Hall. Ecuaciones Diferenciales. Internacional Thomson Editores, 1999.

[2] W. Boyce y R. DiPrima. Elementary differential equations and boundary value problems. J. Wiley, 1991.

[3] R. Borrelli, C. Coleman. Ecuaciones Diferenciales, una perpectiva de modelación. Oxford University Press, 2002.

[4] C. Edwards y D. Penney. Ecuaciones Diferenciales elementales con aplicaciones. Prentice Hall, 1993.

[5] L. Elsgoltz. Ecuaciones Diferenciales y cálculo variacional. MIR, 1977.

[6] M. de Guzmán. Ecuaciones Diferenciales ordinarias. Teoría de estabilidad y control. Alambra, 1980.

[7] D. Kreider, R. Kuller y D. Ostberg. Ecuaciones Diferenciales. Fondo Educativo Interamericano, 1973.

[8] D. Lomen, D. Lovelock. Ecuaciones Diferenciales a través de gráficas, modelos y datos. CECSA, 1999.

[9] R. Palmer Agnew. Ecuaciones Diferenciales. UTEHA, 1968.

[10] S. L. Ross. Ecuaciones Diferenciales. Reverte, 1979.

[11] R. K. Tagle, E. Saff y D. Snider. Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera. Pearson Educación, 2000.

[12] D. Zill. Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado. Thomson, 1997.