

O uso de simulações para desenvolver a noção de probabilidade e a capacidade de resolução de problemas

Fernandes, Cláudia¹, Ponte, João Pedro²

¹Agrupamento de Escolas Dr^a Laura Ayres, Quarteira e Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

² Universidade de Lisboa, Portugal

Resumo

Esta comunicação analisa o modo como alunos portugueses do 9.º ano (com cerca de 14 anos) respondem a questões envolvendo a noção intuitiva de probabilidade no trabalho realizado numa simulação com o software TinkerPlots, que até aqui desconheciam. A tarefa é proposta por escrito, acompanhada de um guião relativo à utilização do software e é realizada pelos alunos, em pares, durante cerca de 50 minutos. Esta realização envolve três fases: apresentação pelo professor e interpretação em diálogo com os alunos, trabalho autónomo dos alunos e discussão dos resultados obtidos. Durante o trabalho autónomo dos alunos a professora faz um acompanhamento discreto, procurando esclarecer dúvidas que os impeçam de avançar, mas sem responder às questões propostas na tarefa. Na análise dos resultados procura verificar-se de que modo os alunos interpretam o problema proposto, analisam e interpretam representações dos dados e estabelecem relações com base na frequência relativa para estimar a probabilidade de um acontecimento. Procura, ainda, verificar-se até que ponto os alunos conseguem utilizar o software com base nas indicações fornecidas, trabalhar de modo autónomo, e comunicar as suas conclusões. Este estudo representa a etapa inicial de uma investigação de design research que tem em vista construir uma unidade de ensino para os alunos deste nível de escolaridade, tirando partido das novas tecnologias.

Palavras chave: Simulação, Probabilidade, Frequência, Representação.

1. Introdução

O ensino do tema probabilidades tem vindo a sofrer uma significativa evolução. De uma abordagem baseada na definição clássica de probabilidade (quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis), tem-se vindo a passar para uma abordagem de carácter frequentista, incentivada pelo desenvolvimento da análise dos dados e pelo uso de atividades experimentais no ensino da Matemática. A modelação matemática, em particular o recurso a simulações com o auxílio de software pode apoiar a abordagem frequentista na sala de aula, apresentando a probabilidade de um acontecimento aleatório como um modelo teórico de uma proporção de casos ou uma frequência relativa estabilizada com um certo grau de confiança (Chaput, Girard & Henry, 2011).

Nesta comunicação analisamos o modo como os alunos portugueses do 9.º ano respondem a questões envolvendo a noção intuitiva de probabilidade no trabalho realizado numa simulação com o software TinkerPlots, até aqui deles desconhecido, tendo em conta a interpretação que fazem do problema proposto, a interpretação e análise das representações dos dados que obtêm a partir do uso do software e as relações que estabelecem entre os conceitos de frequência relativa e probabilidade de um acontecimento. Pretendemos, também, perceber até que ponto os alunos conseguem utilizar o *software* com base em indicações fornecidas com o enunciado da tarefa, trabalhar de modo autónomo e comunicar as suas conclusões. Este estudo representa a etapa inicial de uma investigação de *design*

research que tem em vista construir uma unidade de ensino tirando partido das novas tecnologias.

2. O ensino das probabilidades com recurso às simulações

Situações de incerteza que surgem no quotidiano conduzem a juízos probabilísticos que emergem de forma intuitiva (Branco & Martins, 2002), promovendo raciocínios de inferência estatística. Uma correta compreensão do processo inferencial envolve perceber a possibilidade de se cometerem erros quando se procura generalizar para um conjunto alargado indivíduos algumas propriedades verificadas em alguns deles (Branco & Martins, 2002). Deste modo, importa desenvolver nos alunos a sua capacidade de raciocinar inferencialmente, para que sejam capazes de valorizar, compreender e avaliar a evidência estatística que influencia a sua vida diária (Ridgway, Nicholson & McCusker, 2011). Para se trabalhar conjuntos de dados com dimensões à escala real, o uso de software específico uma ferramenta fundamental.

A proposta de tarefas contextualizadas é recomendada no programa português (ME, 2007) e em documentos internacionais como o GAISE Report (Franklin, Kader, Mewborn, Moreno, Peck, Perry, & Scheaffer, 2005) e o NCTM (2000). Na realização destas tarefas, o computador permite aos alunos trabalhar grandes conjuntos de dados, centrando-se na análise da situação aleatória, dando relevo à concepção de hipóteses das quais se podem tirar conclusões. A introdução da tecnologia permite trabalhar distribuições que, dada a sua dimensão, seriam difíceis de manusear de outra forma (Chaput et al., 2011; Franklin et al., 2005; Martins & Ponte, 2010). O relatório GAISE (Franklin et al., 2005) destaca a importância do papel da probabilidade na análise estatística. De facto, a abordagem frequencista do conceito de probabilidade relaciona a probabilidade de uma experiência aleatória com a frequência relativa do acontecimento, que tende a estabilizar quando se repete esta experiência um número suficientemente grande de vezes. No entanto, devido à sua natureza empírica, a abordagem estritamente frequencista gera questões de carácter didático que podem levar à confusão entre a observação da realidade (frequência estabilizada) e o conhecimento teórico de probabilidade (Chaput et al., 2011). Por isso, uma abordagem partindo de situações de modelação matemática ou usando simulações é especialmente adequada.

Uma simulação é um processo artificial utilizado para imitar o comportamento de um fenómeno aleatório (Martins & Ponte, 2010), sendo possível analisar o seu comportamento em resposta a variações incluindo, eventualmente, a análise num contexto real. Martins e Ponte (2010) consideram que as simulações constituem um instrumento poderoso, que nas últimas décadas, com o desenvolvimento e aperfeiçoamento dos meios computacionais, contribuiu de forma decisiva para o estudo das probabilidades associadas a determinados acontecimentos. O uso de *software* para o trabalho com simulações estatísticas pode assim constituir uma ferramenta com grandes potencialidades (Lee & Hollebrands, 2011; Pratt, Davies, & Connor, 2011), proporcionando uma grande quantidade de situações passíveis de levar à sala de aula, de outra forma muitas vezes inexecutáveis. A automatização de tarefas com o auxílio deste tipo de ferramenta permite focar a atenção no entendimento conceptual, dedicando mais tempo à análise exploratória de dados. Além disso, este tipo de software permite reorganizações de dados e ajuda a desenvolver a capacidade de visualização de conceitos abstratos, por vezes difíceis de compreender pelos alunos. No caso das simulações, o recurso aos meios computacionais permite uma visão daquilo que pode ser realidade através do modelo matemático, proporcionando aos alunos a experiência de trabalhar e perceber distribuições (Pratt et al., 2011).

3. Metodologia

Esta investigação constitui uma etapa de uma investigação de design research, que inclui a exploração de tarefas matemáticas com o *software* estatístico TinkerPlots, novo para os alunos. Os participantes são quatro alunos que trabalharam em pares (Ana com Beatriz, Daniel com Carlos). A recolha dos dados foi feita através de gravação em vídeo dos grupos, registos escritos produzidos pelos alunos e notas de campo registadas pela primeira autora. Com base no visionamento e transcrição de diálogos de diferentes momentos de aula, a análise dos dados centra-se nos seguintes aspetos: (i) interpretação do problema proposto por parte dos alunos, (ii) análise e interpretação de representações dos dados e respetivas conclusões; e (iii) uso da frequência relativa para estimar a probabilidade de um acontecimento. Procuramos, também, verificar até que ponto os alunos conseguem utilizar o software com base nas indicações fornecidas, trabalhar de modo autónomo e comunicar as suas conclusões.

Na elaboração da tarefa procurámos criar um contexto real, para ajudar os alunos a interpretar corretamente o problema proposto. Para isso, realizámos previamente o registo escrito dos sabores de gelado preferidos de todos os alunos da turma à qual pertencem os alunos envolvidos nesta investigação. O enunciado da tarefa pretendia levar a simular uma situação, na qual todos os alunos da turma teriam sido presenteados com um gelado do seu sabor preferido, devido à comemoração do aniversário de uma geladaria próxima da sua escola. No entanto, para que essa oferta acontecesse, teriam que jogar um jogo proposto pelo dono da geladaria: cada aluno deveria sair do estabelecimento com o seu gelado preferido numa mão e 5 cartões, cada um contendo uma letra (C, M, B, N ou L) representando os 5 sabores possíveis, na outra mão. Ao encontrar uma pessoa na rua, esta deveria escolher um cartão e caso este coincidissem com o sabor de gelado desse aluno, o gelado deveria ser cedido a essa pessoa, perdendo o aluno o seu gelado. Caso contrário, o aluno poderia comer o gelado. Partindo desta situação, os alunos deveriam proceder à sua simulação recorrendo ao software TinkerPlots e responder às seguintes questões:

1. Quantos alunos perderam o seu gelado?
2. Que percentagem de alunos comeu o seu gelado depois de jogar?
3. Qual foi o sabor de gelado mais escolhido nos cartões?
4. Imaginando que o dono da geladaria escolheu para começar as questões na rua um dos alunos da turma, ao acaso, qual a probabilidade de ele não ter escolhido alguém que tivesse como sabor preferido o chocolate?

Para a resolução da tarefa foi dada aos alunos informação sobre os sabores de gelado escolhidos por todos os alunos da sua turma, em Excel, pronta para ser copiada para TinkerPlots. Uma vez que estes desconheciam o *software*. O enunciado da tarefa foi acompanhado de um guião relativo à sua utilização. Em cada questão o guião dava indicações sobre quais os comandos a acionar para obter resultados em diferentes representações, cabendo aos alunos fazer a respetiva exploração, interpretação dos resultados e elaboração de conjeturas.

A realização da tarefa durou 50 minutos e envolveu as seguintes fases: (i) apresentação pela professora e interpretação em diálogo com os alunos, (ii) trabalho autónomo dos alunos, e (iii) discussão dos resultados obtidos. Durante o trabalho autónomo dos alunos a professora fez um acompanhamento discreto, procurando esclarecer dúvidas que os impedissem de avançar, sem no entanto, responder às questões propostas na tarefa. Os alunos trabalharam na resolução da tarefa em pares, de modo a estimular a comunicação entre eles, potenciar a compreensão da tarefa e a procura de estratégias de resolução.

4. Resultados

Apresentamos de seguida os principais resultados obtidos na exploração da tarefa, recorrendo à transcrição de episódios relevantes, agrupados consoante os aspetos que se pretendem analisar.

Interpretação do problema. Após uma primeira leitura da tarefa, os alunos afirmam ter compreendido o problema, não referindo dúvidas. No entanto, no decorrer da resolução da tarefa, algumas dificuldades surgem nas diferentes questões, sugerindo que a sua compreensão inicial é apenas parcial. Assim, na questão 1, depois de já terem seguido as instruções, simulado a situação e obtido resultados da simulação as alunas hesitam. Relêem a questão, sem saber o que fazer com os resultados obtidos, revelando alguma dificuldade na compreensão da questão. A professora intervém no sentido de orientar o seu pensamento:

Prof.: Vamos imaginar a situação. A vossa turma está na geladaria e cada aluno já tem o seu gelado preferido na mão. O que é que faziam ao sair do estabelecimento?

Beatriz: Davam os cartões. (...) Houve pessoas que acertaram e outras que não.

Prof.: Isso! E quando acertavam no sabor o que é que acontecia?

Beatriz: Eles ficavam com o mesmo gelado!

Ana: Não! Eles davam o gelado! Quando não acertavam eles davam o gelado à pessoa e quando acertavam ficavam eles com o gelado!

Beatriz: É ao contrário! Quando não acertavam, quem escolhia o sabor ficava com o gelado... Quem estava a dar os cartões... E se acertasse, a pessoa que escolheu o cartão errado, não... O certo, ficava com o gelado!

Ana: Pois, é isso! Se a pessoa acertasse no gelado, era oferecido à pessoa.

Mais adiante, na questão 4, Ana, frente ao gráfico de pontos com os sabores preferidos dos colegas mostra dificuldade em interpretar a noção de acontecimento contrário: “Sim! Estes são os preferidos. Este é o chocolate! A probabilidade de ele não ter escolhido... Não ter escolhido? É isso que eu não percebo!”

Análise e interpretação de representações dos dados e elaboração de conclusões. Este software possui permite ao utilizador aceder a qualquer momento aos dados introduzidos para cada indivíduo, permitindo a consulta simultânea de representações desses dados e da listagem de atributos para cada indivíduo. Esta característica é de imediato notada por ambos os grupos de alunos.

Na questão 1, ambos os grupos seguem corretamente as indicações fornecidas no enunciado, procedendo à simulação da situação descrita. O computador fornece aleatoriamente um sabor de gelado sucessivamente a cada indivíduo, criando uma nova coluna de sabores a que os alunos chamaram de “sabor resposta”, ao lado da coluna “sabor preferido” dos alunos da turma. A professora interpela os grupos para se certificar se compreendem o que está a acontecer:

Prof.: Antes de continuar, digam lá o **que** significa essa primeira coluna da tabela?

Daniel: Os sabores escolhidos.

Prof.: E a segunda coluna?

Daniel: São... Os sabores quando eles foram à rua.

Carlos: Quando eles saíram...

Daniel: Que as pessoas escolheram, para ver se acertavam o sabor que eles tinham.

(...)

Prof.: E porque é que aparecem essas cinco cores junto da variável? (*O software junta automaticamente uma barra de cores junto à variável, que posteriormente na representação gráfica corresponderão aos sabores de gelado, mas neste momento esta representação ainda não foi realizada*).

Daniel: São os diferentes sabores. São 5 sabores.

No momento em que é pedido aos alunos para introduzir uma fórmula que permita fazer uma comparação de resultados e concluir se os alunos devem dar, ou não, o gelado, a professora procura de novo certificar-se que os alunos compreendem a fórmula que vão inserir e conseguem interpretar os resultados obtidos para dar resposta à questão:

Prof.: O que é que quer dizer essa fórmula?

Daniel: É para comparar.

Carlos: É uma equação.

Prof.: “If” significa o quê?

Carlos: “Se” em inglês. (...) *Se* o sabor preferido for igual ao sabor resposta dá o gelado.

Prof.: Caso contrário...

Carlos e Daniel: Come.

Para responder à questão 1, o primeiro impulso em ambos os grupos é fazer a contagem manual através da observação das colunas da tabela. No entanto, alguns alunos manifestam dificuldade em concentrar-se naquilo que é pedido na questão. Daniel, por exemplo, começa a contagem na tabela mas concentra-se na resposta “come o gelado” que surge um maior número de vezes e só nota o erro quando o colega chama a sua atenção. Considerando que tem que contar tudo outra vez, questiona a professora, se não há uma forma mais rápida de pôr o computador a contar e começa a explorar o software nesse sentido. No outro grupo, as alunas também procedem à contagem manual dos casos. Identificam cada um dos colegas que dá o gelado, relacionando as observações das tabelas, de resultados, com um outro quadro resultante da introdução dos dados inicialmente, chegando sem dificuldade aos resultados pretendidos através da observação dos resultados obtidos.

Na questão 2, ambos os grupos executam sem dificuldades as instruções de construção de gráficos segundo as indicações fornecidas. A primeira representação obtida, relativa à coluna “comparação” da tabela, surge, em ambos os casos, como uma nuvem de pontos com duas cores distintas. Carlos apercebe-se do erro cometido na questão anterior quando dizia que metade dos alunos tinham que oferecer o gelado, pois repara que os pontos do gráfico não estão divididos em duas cores de forma igual, existindo mais pontos verdes do que roxos:

Carlos: Deu!

Prof.: Deu o quê? O que são esses pontos?

Daniel: São as pessoas.

Carlos: Os que comeram e os que não comeram.

Prof.: E as cores diferentes?

Carlos: (*lembrando a confusão anterior*). Pois são duas cores... E não é metade!

Prof.: Qual é a cor para quem come e para quem não come?

Carlos: Acho que os que comeram são verdes e os que não comeram são roxos...

Daniel: Porque são só 3.

Ana e Beatriz também chegam à mesma conclusão. Seguem as indicações, organizam os pontos no gráfico colocando-os em colunas de cores distintas, e procedem ao cálculo automático de contagem de casos e percentagens, para responder à questão, indicada assim por Ana “Ah! Está aqui a resposta desta. E da outra também! Eram 6 pessoas que davam o gelado e agora nesta, são 73%”.

Na questão 3, ao relê-la, os alunos manifestam novamente a vontade de contar, caso a caso, na tabela. A professora, sugere-lhes que façam essa contagem automaticamente, uma vez que já sabem que o software tem essa potencialidade. Ana, na tentativa de construir um gráfico novo para a coluna sabor resposta, clica, inadvertidamente, sobre a coluna pretendida e o grupo verifica, com espanto, que o gráfico anterior sobre as comparações, se alterou e apresenta agora 5 cores distintas, percebendo que como cada ponto representa um aluno, antes cada um estava colorido com as cores resultantes da coluna comparação e agora com o sabor escolhido por cada aluno:

Beatriz: Olha!

Ana: Está aqui! Estão as cores...

Beatriz: Aparece cada sabor de cada um.

A professora pede que organizem os dados e as alunas começam a arrastar os pontos coloridos separando-os por cores.

Ana: Que giro! Agora dá o que eu preciso (...) o sabor de gelado mais escolhido foi a nata... e o chocolate.

Uso da frequência relativa para estimar a probabilidade de um acontecimento. Os alunos associam a frequência relativa ao conceito de probabilidade de forma intuitiva. Carlos e Daniel, por exemplo, lêem a questão e procuram interpretar:

Carlos: *(depois de ler)* Então, são todos menos o chocolate.

Daniel: *(conta na tabela de resultados fornecida pela professora no início da tarefa)* São 17! Mas isto tem que se fazer também no gráfico não é professora?

Prof.: Vê lá se consegues.

Os alunos consultam o gráfico da questão anterior, não tendo em conta que este se refere aos sabores escolhidos nos cartões e não o que se pretende:

Carlos: *(conta os pontos do gráfico)* São 5 a dividir por 22.

Prof.: *(chamando a atenção)* Mas é nesse gráfico? Esse não é o sabor resposta?

Daniel: Ah! Pois é!

Os alunos constroem novo gráfico de pontos sobre a variável correta e sem dificuldade manipulam os pontos de forma a organizá-los por sabores, pedindo as respetivas contagens, como explica Carlos: “Então vamos somar estes todos *(apontando para as colunas de pontos que não são chocolate)* e fazer a probabilidade. Somamos morango, baunilha, nata e limão e dividimos pelo total”. A professora tenta então estabelecer a relação entre probabilidade e os conhecimentos de estatística adquiridos em anos anteriores:

Prof.: Quando vocês faziam as tabelas de frequências, na Estatística, isso correspondia a quê?

Daniel: Era a frequência absoluta... Não... Relativa.

Prof.: Como é que se calculava a frequência relativa?

Carlos: Era o número total... Não... Era o número de resultados a dividir pelo número total. É isto!

Daniel: É a probabilidade. É a mesma coisa.

Prof.: As probabilidades podem apresentar-se na forma de fração e de outras formas. Quais?

Carlos: Percentagem... Ah! Faz lá aí a percentagem Daniel! Lógico! (*Daniel executa o comando*). Tá! Temos todas as percentagens dos sabores. Vamos somar.

O cálculo mental das percentagens dos 4 sabores restantes revela-se complicado e Daniel opta por manipular os pontos, juntando os pontos das cores que não são chocolate, verificando que a percentagem de cada coluna de pontos se altera, até obter a resposta: 63%.

5. Conclusão

Tendo em conta que os alunos nunca tinham trabalhado com este tipo de software, consideramos que a experiência produziu resultados interessantes. Os alunos resolveram a tarefa sem demonstrar dificuldades no seguimento das instruções fornecidas, interpretando as representações gráficas que foram construindo e revelando uma noção intuitiva de probabilidade. O conceito de frequência relativa foi usado na estimação da probabilidade dos acontecimentos de forma natural, a partir da visualização das representações gráficas elaboradas. Os alunos não revelaram dificuldade em associar de forma intuitiva o conceito frequencista de probabilidade à definição clássica. A manipulação dos pontos do gráfico representativos dos diferentes alunos, permitiu-lhes agrupar facilmente os dados de acordo com as suas necessidades e testar conjeturas que iam formulando à medida que avançavam na exploração dos resultados. Associaram as cores obtidas nos diferentes pontos dos gráficos às variáveis que estes representavam, e este tipo de visualização contribuiu claramente, no caso de Carlos, para a compreensão das duas primeiras questões.

Os alunos revelaram autonomia na realização da tarefa e comunicaram adequadamente as conclusões obtidas para cada questão. A interação entre os alunos durante a realização da tarefa, no trabalho de pares, revelou-se muito importante, levando-os a corrigir os seus raciocínios quase sempre sem a intervenção da professora. Deste modo formularam conjeturas, testaram-nas através da manipulação e da visualização de diferentes tipos de representação gráfica, e tiraram conclusões.

O facto dos dados terem sido recolhidos na turma em causa, criou um contexto que ajudou na interpretação da situação. No entanto, os alunos revelaram algumas dificuldades de interpretação na compreensão do enunciado, em especial, confundindo quando deveriam oferecer ou comer o gelado bem como em perceber o acontecimento contrário. Após ultrapassarem estas dificuldades, a análise e interpretação das diferentes representações dos dados permitiu-lhes chegar às conclusões pretendidas, tendo respondido de forma correta a todas as questões. Em vários momentos, os alunos, tomaram a iniciativa de explorar o software na procura de representações gráficas que melhor se ajustassem às suas conjeturas e a manipulação dos pontos do gráfico. Isto tornou-se uma constante a partir do momento que se aperceberam que poderiam agrupar os dados conforme fosse necessário, quase instantaneamente. Esta potencialidade motivou-os na exploração das questões pedidas, levando-os a tomar a iniciativa de observar aspetos não pedidos na tarefa proposta, realizando contagens que não eram pedidas ou explorando como os dados ficariam representados noutros tipos de gráfico.

Referências

- Branco, J., & Martins, M. E. G. (2002). Literacia estatística. *Educação e Matemática*, 69, 9-13.
- Chaput, B., Girard, J.-C., & Henry, M. (2011). Frequencist approach: Modelling and simulation in statistics and probability teaching. In C. Batanero, G. Burrill & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education*

- (pp. 85-95). New York, NY: Springer.
- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2005). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) Report*. Alexandria, VA: American Statistical Association.
- Lee, H. S., & Hollebrands, K. F. (2011). Characterizing and developing teachers' knowledge for teaching statistics with technology. In C. Batanero, G. Burrill & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education* (pp. 359-369). New York, NY: Springer.
- Martins, M. E. G., & Ponte, J. P. (2010). *Organização e tratamento de dados*. Lisboa: DGIDC. (descarregado em 23/3/2013 de http://area.dgicd.min-edu.pt/materiais_NPMEB/matematicaOTD_Final.pdf)
- Ministério da Educação (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. Lisboa: DGIDC. (descarregado em 23/3/2013 de http://area.dgicd.min-edu.pt/materiais_NPMEB/028_ProgramaMatematicaEnsinoBasico.pdf)
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Pratt, D., Davies, N., & Connor, D. (2011). The role of technology in teaching and learning statistics. In C. Batanero, G. Burrill & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education* (pp. 97-107). New York, NY: Springer.
- Ridgway, J., Nicholson, J., & McCusker, S. (2011). Developing statistical literacy in students and teachers. In C. Batanero, G. Burrill & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education* (pp. 311-322). New York, NY: Springer.