El cálculo de la prima única de riesgo mediante la medida de riesgo transformada proporcional del tanto instantáneo

Profesora Doctora Dª. Montserrat Hernández - Solís

Departamento de Economía de la Empresa y Contabilidad

Facultad Ciencias Económicas y Empresariales

Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED)

Profesora Doctora Dª. Cristina Lozano Colomer

Departamento de Métodos Cuantitativos

Facultad Ciencias Económicas y Empresariales

Universidad Pontificia de Comillas (ICADE)

Profesor Doctor D. José Luis Vilar Zanón

Departamento de Economía Financiera y Actuarial

Facultad Ciencias Económicas y Empresariales

Universidad Complutense de Madrid

Resumen

El objetivo de esta investigación es obtener un principio de cálculo de primas, para el ramo de vida, basado en una medida de riesgo coherente, la llamada Esperanza Distorsionada transformada proporcional del tanto instantáneo, que justifique la recomendación de Solvencia II de incrementar los tantos instantáneos de mortalidad y conseguir de este modo una prima recargada de manera implícita para hacer frente a las desviaciones de siniestralidad real con respecto a la esperada. En este artículo se ha seleccionado la modalidad de seguro vida entera, calculándose la prima única de riesgo para las cuatro leyes de supervivencia más aceptadas, como son la primera y segunda de Dormoy, ley de Gomperzt y ley de Makeham.

Abstract

The goal of this research is to obtain a premium calculation principle, for the life business, based on a coherent risk measure, distorted probabilities with the Wang distortion function in the form of power, called “Proportional Hazards (PH) Transforms”. It justifies the recommendation of Solvency II to increase or decrease, according to the type of insurance chosen, the mortality instantaneous rate and thus get an implicitly surcharged premium to deal deviations of actual claims regarding expected. Whole life insurance has been selected for this research, and the premium risk has been calculated for the four accepted laws of survival, such as the first and second Dormoy, Gomperzt law and Makeham law.

Código Jel: M20

Palabras clave: Recargo implícito, Función de distorsión, Leyes de supervivencia, Transformada del tanto instantáneo, medida de riesgo coherente, seguro vida entera. Implicit surcharge, Distortion function, Hazards transform risk, Law of survival, Coherent risk measure, Whole life insurance.

1. Introducción

El riesgo asociado a eventos aleatorios representa el factor más importante dentro del entorno asegurador, tanto en el ramo de vida como en el de no vida. El seguro es una medida de prevención de un acontecimiento incierto, que en el caso de los seguros de vida se sabe que se producirá pero no se sabe cuando acaecerá. Como en la vida no siempre es factible evitar los riesgos, cuando éstos se producen suele conllevar una pérdida de los ingresos o de los ahorros. Es por esta razón por lo que surge la cuantificación del riesgo y su aseguramiento. Ante la situación que se está viviendo en los últimos años, las entidades aseguradoras tienen como una de sus prioridades saber cuantificar los riesgos que les afectan de una manera correcta y con las técnicas estadísticas-matemáticas apropiadas, para así conseguir que su nivel de recursos propios sea acorde con el ejercicio de su actividad. Llevan a cabo análisis periódicos de su capacidad financiera (solvencia) para poder hacer frente a los riesgos a los que se enfrentarán. Y es precisamente en esta idea de ajuste en la que se sustenta una directiva que afecta a los países de la UE: Solvencia II, cuyo objetivo es lograr una mejor defensa de los asegurados europeos a través de una adecuada evaluación del riesgo, esto es, sabiendo identificar las causas que pueden ocasionar pérdidas a las entidades aseguradoras, así como la correcta medición del mismo.

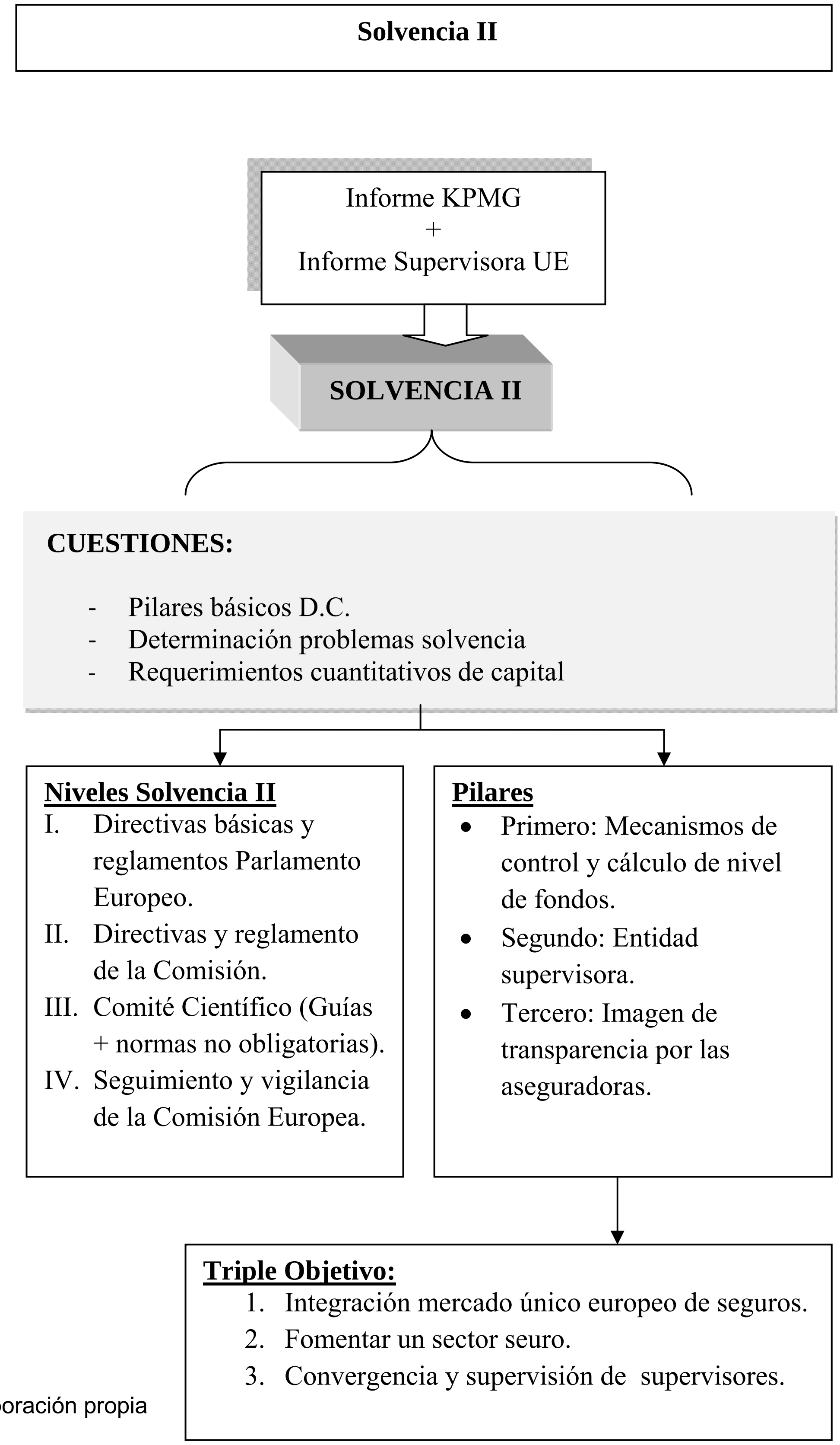
El origen de Solvencia II se sitúa en el año 2001 con los informes elaborados por la empresa KPMG y por la conferencia de las actividades supervisoras de los estados miembros de la UE. En dichos informes se han establecido las bases para el desarrollo de las tres cuestiones básicas de Solvencia II, que son las que a continuación se detallan.

- La fijación de los tres pilares básicos en los que se sustenta la directiva comunitaria, similares a Basilea II para entidades de crédito;
- La especificación de los problemas de solvencia a los que se enfrentan las compañías de seguros, así como la anticipación a los mismos; y
- El establecimiento de los requerimientos cuantitativos de capital para hacer frente a los riesgos de las compañías, para de este modo poderlos supervisar.

Los informes técnicos desarrollados hasta la fecha, que son el desarrollo de Solvencia II, se denomina QIS. Éste cuenta con diferentes capítulos (QIS1, QIS2, QIS3, QIS4 y QIS5), siendo el sexto el que actualmente está en proceso de elaboración.

En la figura 1 se muestra el esquema de trabajo de Solvencia II.

FIGURA 1: SOLVENCIA II



Fuente: Elaboración propia

Por todos los razonamientos anteriores, se puede afirmar que una entidad aseguradora no presentaría problemas de solvencia para el pago de las prestaciones cubiertas en las pólizas, ni tampoco presentaría pérdidas, si no se produjeran desviaciones desfavorables de la siniestralidad real con respecto a la esperada. Como en la realidad dichas desviaciones se producen, Solvencia II, en el informe técnico QIS5, establece y fija determinados niveles de capital exigibles a las aseguradoras para el ramo de vida, así como el incremento que ha de experimentar el tanto instantáneo de mortalidad en el ramo de vida, trabajo al que se orienta este artículo, para evitar dichas desviaciones, en concreto para el seguro con cobertura de fallecimiento.

En las compañías de seguro del ramo de vida, es una práctica habitual fijar un recargo de seguridad implícito para protegerse del riesgo que se origina como consecuencia de las desviaciones desfavorables de la siniestralidad real con respecto a la esperada. Lo que pretende la compañía, pues, con dicho recargo es otorgar estabilidad a la empresa aseguradora.

Como se indica en el informe QIS5 Technical Specifications (Working Document of the Commission services, European Commission, (2010)), en los seguros de vida con cobertura de fallecimiento, el recargo de seguridad no suele formularse de forma explícita, pero existe de forma implícita cuando las probabilidades de fallecimiento estimadas con la tabla de mortalidad empleada son mayores que las reales del grupo humano considerado. De este modo se produce un incremento en el tanto instantáneo de mortalidad. SOLVENCIA II recomienda un capital a la compañía aseguradora, para hacer frente a las desviaciones desfavorables que puedan surgir, que se obtenga de incrementar dicho tanto en un 15%, de un modo permanente y para todas las edades y pólizas que comprenden la cartera. De este modo la liquidez y solvencia de la entidad se encontrarán garantizadas.

En 1995 Wang, en su artículo de la revista Insurance, Mathematics & Economics, titulado "Insurance pricing and increased limits by proportional hazards transforms", ya propone un principio de cálculo de prima recargada para seguros del ramo no vida, a partir de la medida de riesgo coherente (Artzner, P (1999)), la llamada esperanza distorsionada con la función de distorsión de Wang en su forma de potencia, (transformada proporcional del tanto instantáneo[1]), teniendo la función de distorsión la forma $g(u) = u^{\frac{1}{\rho}}$, siendo condición necesaria para que dicha medida de riesgo sea coherente que el parámetro $\rho \geq 1$.

Se sigue la línea de investigación abierta por Wang, dado que se propone un principio de cálculo de prima, la esperanza distorsionada con la función de distorsión transformada proporcional del tanto instantáneo, pero aplicado al ramo de vida. Se demuestra que el empleo de este principio de cálculo de primas produce el mismo efecto de aumento del tanto instantáneo que utilizar una tabla de mortalidad con probabilidades de fallecimiento superiores, para la modalidad de seguro vida entera. Por tanto en este

[1] **Denominada "Proportional Hazards Transforms" (PH)**

artículo se proporciona una modelización teórica, a partir de una medida de riesgo coherente, a una práctica habitual existente en el ramo de vida.

El objetivo que se pretende es obtener una expresión para la prima de riesgo recargada que esté basada en la esperanza distorsionada en forma de potencia para la modalidad de seguro de fallecimiento (vida entera). Para este seguro es necesario que el valor del parámetro sea $\rho \leq 1$. Se demuestra que la medida de riesgo definida para calcular la prima verifica los axiomas de medida de riesgo coherente, por lo que este estudio supone una extensión del de Wang (Wang, S (1995)).

Tomando en consideración las indicaciones que hace SOLVENCIA II a las compañías de seguro en el QIS5, el valor que deberá tomar el parámetro ρ para los seguros con cobertura de fallecimiento será $\rho = 0.15 < 1$. En este artículo se ha ampliado el campo de variación numérico de dicho parámetro para poder llevar a cabo una comparación, tanto numérica como gráfica, entre la prima de riesgo recargada y la prima de riesgo neta o sin recargar, y de este modo extraer conclusiones.

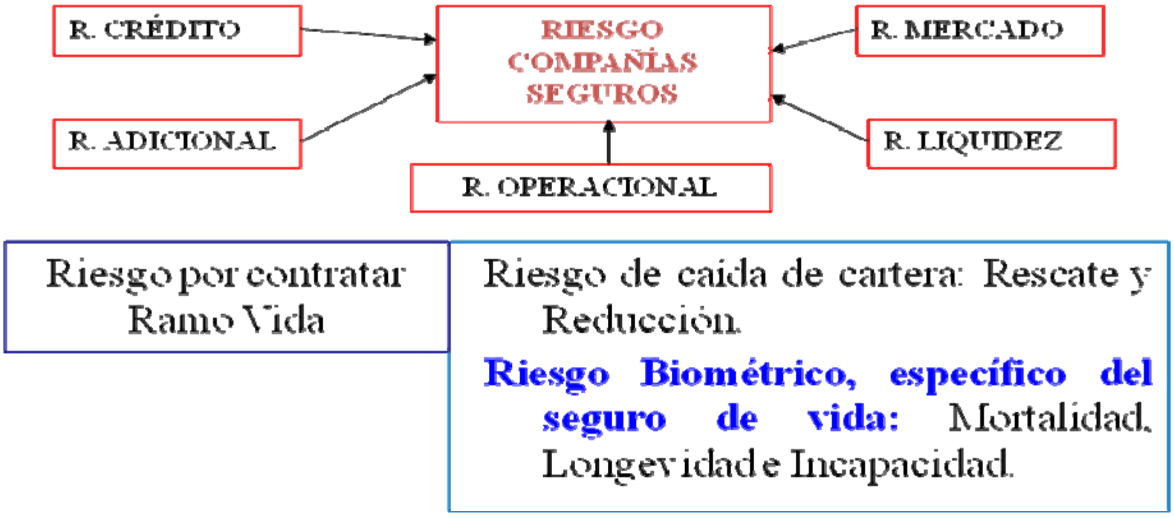
2. **Principios de cálculo de primas: cumplimiento de los axiomas de coherencia**

En toda empresa existen riesgos que pueden hacer peligrar su situación económica y llevarla, incluso a la quiebra. La palabra riesgo va unida al azar, a la incertidumbre, luego por lo tanto está relacionado con la aleatoriedad en cuanto a su acaecimiento y la cuantía de la pérdida. Se puede definir como la incertidumbre que existe de que un evento se produzca, en un determinado momento y bajo unas condiciones concretas, originándose por ello unas pérdidas cuantificables.

Es preciso analizar los riesgos que afectan a las aseguradoras en el ramo de vida, con el fin de realizar una buena gestión de los mismos, ya que el estudio de los riesgos no se limita a cuantificarlos (medirlos) sino también a obtener una buena protección frente a los mismos e intentar prevenirlos. En este artículo se va a centrar la atención en el riesgo biométrico de mortalidad.

En la figura 2 se recogen los diferentes riesgos de las compañías aseguradoras:

FIGURA 2: RIESGOS DE LAS COMPAÑÍAS ASEGURADORAS



Fuente: Elaboración propia.

La gestión del riesgo, orientado al ramo de vida, se considera que es la coordinación perfecta entre el riesgo asegurable (el fallecimiento o supervivencia del asegurado) y una reducción adecuada de los costes del seguro. Dicha gestión del riesgo es un objetivo a alcanzar por todas las empresas, ya que como dice el teorema de Modigliani-Miller (1958), en su artículo “The cost of Capital, Corporate Finance and the Theory of Investment”: una gestión eficiente del riesgo puede conducir a una serie de efectos positivos. Dichos efectos son una reducción de los impuestos, debido a una reducción en la variabilidad del cash-flow, un efecto beneficioso para una empresa, en el sentido que ésta puede tener un mejor acceso a los mercados de capitales que los inversores individuales, así como un aumento del valor de la empresa en caso de quiebra (haciendo además a ésta menos probable en cuanto a su ocurrencia). No obstante si existe una probabilidad de quiebra, por pequeña que sea, ésta tendrá un efecto muy negativo en los empleados y clientela de la empresa. Centrándonos en empresas aseguradoras está claro que muy pocos clientes querrán contratar una modalidad de seguro de vida con una aseguradora que se sabe cercana a la quiebra. Por último una gestión eficiente del riesgo facilita la obtención de inversiones óptimas.

Para llevar a cabo una política de gestión del riesgo eficiente será preciso previamente que éste se pueda cuantificar a través de alguna herramienta (medida de riesgo). Esta herramienta implica dos cosas. Por una lado, que exista un daño económico potencial que se puede medir (en el caso del ramo de vida es el fallecimiento o supervivencia del asegurado). Por otro lado, que se pueda cuantificar que probabilidad existe que ocurra ese daño, esto es, la probabilidad de que ocurra el fallecimiento o supervivencia del asegurado.

El siguiente paso es definir que es una medida de riesgo. Se trata de un funcional $M : X \rightarrow [0,\infty)$ que hace corresponder a un riesgo X un número real no negativo $M(X)$ (que puede ser infinito), el cual representa la cantidad adicional que se debe añadir a X (pérdida) para hacerlo aceptable (Gómez, E. y Sarabia, JM (2008)).

La cuantificación utilizando una medida de riesgo permite obtener un propósito cuádruple (Tse, Y-K (2009). En primer lugar determinar el capital que necesita la compañía en cuestión, para mantener un nivel adecuado de solvencia. Se trata de un amortiguador frente a las pérdidas inesperadas que se pueden producir en la empresa. El tamaño de este capital depende no sólo del nivel de crédito que la compañía espera alcanzar, sino también de la probabilidad de insolvencia que dicha compañía está dispuesta a asumir. De cualquier modo, el primer paso que ha de dar la compañía para determina el nivel de capital requerido es cuantificar los posibles riesgos a los que se enfrenta. En segundo lugar, determinar la prima del seguro. La prima es el coste que supone para el asegurado la transferencia del riesgo de sufrir una pérdida a la compañía aseguradora. La prima cobrada al asegurado debería ser directamente proporcional con la pérdida potencial. Por lo tanto, una medida de riesgo adecuada es importante para determinar la prima del seguro. En tercer lugar, gestionar el riesgo interno de la empresa. La evaluación interna de la empresa será una labor mucho más sencilla si se encuentran cuantificados de una manera clara los riesgos. Tal como establece Solvencia II, en su pilar I, se deben de establecer mecanismos de regulación en lo que respecta a los niveles de capital propios que ha de tener una compañía de seguros para poder hacer frente a los riesgos asumidos. Y por último, generar informes de regulación externa. En lo referente a la solvencia de una compañía de seguros, los órganos reguladores han intentado institucionalizar el entorno regulador de la generación de informes, así como el establecimiento de una adecuada supervisión de tales informes. Solvencia II, en su pilar II establece que dichos órganos reguladores o supervisores son los que han de controlar la situación financiera de las entidades aseguradoras: controlar la exposición al riesgo de cada entidad de seguros, establecer modelos internos de gestión del riesgo, conseguir que el gobierno corporativo de las entidades se caracterice por la profesionalidad así como poder solicitar, si se estima conveniente, capitales extras a los calculados analizando cada compañía de manera individualizada.

El medir el riesgo es un hecho que ha originado múltiples publicaciones (Artzner, P. (1999); Denuit, D. Dhaene, J. Goovaerts, M. Kaas, R (2005); Landsman, Z. Sherris, M (2001); Wang, S (2000)).Una medida de riesgo ha de permitir poder calcular de una manera correcta las primas que ha de cobrar una compañía de seguros. Y se entiende por una manera correcta el que dichas primas reflejen adecuadamente la incertidumbre que va inherente en la distribución de la variable aleatoria definida con anterioridad como X (pérdida). Diferentes autores han seleccionado una serie de principios para establecer un grupo de requisitos que se entiende debe de satisfacer una medida de riesgo, a pesar de que en la literatura actuarial no existe un criterio unificado sobre que propiedades son las que debe de cumplir una medida de riesgo. No obstante se van a enunciar las propiedades más comúnmente aceptadas (Artzner ,P. Delbaen, F. Eber, JM.

Heath, D. (1999)) para luego establecer las que se han de cumplir para que la medida de riesgo sea considerada coherente, y, por lo tanto, poderla aplicar en este trabajo[2].

FIGURA 3: PROPIEDADES DE LAS MEDIDAS DE RIESGO

PROPIEDADES DE LAS MEDIDAS DE RIESGO		MEDIDA DE RIESGO COHERENTE
Margen Seguridad acotado por la esperanza	$M(X) \geq E(X)$	
Riesgo constante	$M(c) = c \quad c \geq 0$	
No exceso	$M(X) \leq Max.(X)$	
Monotonía	$X_1(\omega), X_2(\omega), \omega \in \Omega$ tal que $X_1(\omega) \leq X_2(\omega)$ entonces se cumple que $M(X_1) \leq M(X_2)$.	**MONOTONÍA**
Invarianza por traslaciones	$M(X + a) = M(X) + a$	**INVARIANZA POR TRASLACIONES**
Homogeneidad Positiva	$M(aX) = aM(X) \quad a \geq 0$	**HOMOGENEIDAD POSITIVA**
Aditividad de Riesgos Comonótonos	$M(X_1 + X_2) = M(X_1) + M(X_2)$ La medida de riesgo suma global de los riesgos es igual a la suma de las medidas de riesgo de cada uno de los mismos	
Subaditividad	$M(X_1 + X_2) \leq M(X_1) + M(X_2)$	**SUBADITIVIDAD**

Fuente: Elaboración propia

Es bastante difícil que una medida de riesgo cumpla todas las propiedades que acabamos de revisar. Es por esto por lo que los autores anteriormente citados establecieron una selección de estas propiedades, de modo que las medidas de riesgo que cumplan con dicha selección se consideran pues coherentes para lograr una gestión eficiente. Esta selección se muestra en la figura 3.

Por criterio de coherencia se entiende aquel que proporciona contribuciones al riesgo económicamente racionales. Dado que lo que hace una medida de riesgo es asignar a una variable aleatoria un número, que en este caso es la prima, para evitar inconsistencias en dicha asignación y que

[2] **Como se ve más adelante, sólo se han de verificar cuatro de las propiedades para que una medida de riesgo sea considerada coherente.**

dicha medida de riesgo lleve a cabo una gestión óptima y eficiente del mismo, es preciso que cumpla cuatro de las propiedades anteriormente enumeradas. Dichos criterios de coherencia han de ser compatibles con la evaluación ajustada al riesgo, de modo que proporcionen una información correcta sobre los activos financieros, permitiendo así su adecuada gestión (Tasche, D (2000)).

1. **Homogeneidad Positiva**
2. **Invarianza a las traslaciones o Consistencia.**
3. **Monotonía.**
4. **Subaditividad.**

Se hace necesaria una interpretación de cada una de las cuatro propiedades anteriores aplicada al ramo de vida asegurador.

Una posible interpretación de la propiedad homogeneidad positiva significa que si se producen efectos inflacionistas al alza o a la baja o de cambio en la unidad de medida que afecten a la cuantía de esa pérdida, estos efectos se reflejan de una manera directamente proporcional en dicha prima.

Una posible interpretación de la propiedad invarianza a las traslaciones significa que si el riesgo cubierto por la compañía aseguradora se ve incrementado por algún factor externo, convirtiéndose así en un riesgo mayor para la compañía, este efecto negativo ha de trasladarse directamente de manera aditiva a la prima que cobra la compañía.

Una posible interpretación de la propiedad monotonía implica que si una compañía soporta la cobertura de un riesgo que es peor que otro, lógicamente por el riesgo que es más dañino para la compañía, ésta deberá de tener que cobrar una prima más elevada al tomador de la póliza.

Una posible interpretación de la propiedad de subaditividad significa que en una compañía de seguros que cuenta con una cartera compuesta por n pólizas, el riesgo global al considerar todas las pólizas de la cartera ha de ser menor o igual al riesgo de considerar cada una de las pólizas de manera individualizada, dado que al considerar la totalidad de la cartera los riesgos de cada póliza se compensan los unos con los otros.

Un principio de cálculo de prima es una medida de riesgo, dado que permite obtener una prima, que es la cantidad de dinero mínima que una compañía de seguros debe de cobrar a sus tomadores para que a dicha compañía le interese firmar el contrato de seguro. Por lo tanto, los principios de cálculo de primas son ejemplos claros de medidas de riesgo. La característica clara de éstos es que el número real que resulta de su aplicación a la variable aleatoria del riesgo es el candidato para ser la prima asociada a la cobertura de la prestación de dicho riesgo aleatorio.

Por tanto, los principios de cálculo de primas están íntimamente relacionados con las medidas de riesgo, dado que dichos principios han de reflejar el comportamiento del asegurador respecto al riesgo que soporta como compañía de seguros.

En la figura 4 se muestran los principios de cálculo de primas con los que se trabaja, tanto en el ramo del área de vida como en el de no vida.

FIGURA 4: CLASES DE PRINCIPIOS DE CÁLCULO DE PRIMAS

Propiedad	P. Prima Neta	P. Valor Esperado	P. Varianza	P. Desviación típica	P. Exponencial	P. Prima Esscher	P. Función Distorsión Wang
Monotonía	**SI**	**SI**	**NO**	**NO**	**SI**	**NO**	**SI**
Subaditividad	**SI**	**SI**	**NO**	**NO**	**NO**	**NO**	**SI**
Invarianza a las traslaciones	**SI**	**NO**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**
Homogeneidad positiva	**SI**	**SI**	**NO**	**SI**	**NO**	**NO**	**SI**

Fuente: Elaboración propia

De los principios de cálculo de primas que se muestran en la figura nº 4, el de la prima neta es el que se aplica en el ramo de vida en la actualidad. El inconveniente que plantea es que no proporciona una prima recargada, ni implícita ni explícitamente, a pesar de ser medida de riesgo coherente. Es por esto por lo que las entidades han de modificar las probabilidades de fallecimiento para obtener las primas recargadas y hacer frente de este modo a las desviaciones desfavorables de la siniestralidad real.

El principio del valor esperado, el de la varianza y el de la desviación típica proporcionan una prima de riesgo recargada de manera explícita, pero no constituyen medida de riesgo coherente. Se aplican en el ramo de no vida.

Con respecto al principio exponencial y al de la prima Esscher, estos proporcionan una prima de riesgo recargada de manera implícita, pero tampoco constituyen medida de riesgo coherente.

El último de los principios, el de la función de distorsión de Wang, proporciona una prima de riesgo recargada de manera implícita, y además constituye medida de riesgo coherente. Se aplica en el ramo de los seguros generales, y la aportación de este artículo es su aplicación en el ramo de vida asegurador.

3 Principio de la función de distorsión de Wang: transformada proporcional del tanto instantáneo

3.1 Función de Distorsión

Dado un riesgo, representado por la variable aleatoria pérdida X ≥ 0, con función de distribución y función de supervivencia respectivamente

$$F(x) = P_r(X \leq x) \qquad (1)$$
$$S(x) = 1 - F(x)$$

La pérdida esperada de dicha variable, expresada a partir de la función de supervivencia, tiene la expresión:

$$E(X) = \int_0^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} S_X(x) dx \qquad (2)$$

Se trata ahora de obtener una prima recargada más ajustada al riesgo basada en la denominada función de distorsión.

Dada una función g no decreciente (Wang, (1995)) definida por $g:[0,1] \to [0,1]$, con $g(0)=0$ y $g(1)=1$, llamada función de distorsión, se define la prima de riesgo ajustada a la medida de riesgo esperanza distorsionada como:

$E_g[X] = H(X) = \int_0^{\infty} g(S_X(x))\, dx$, para un riesgo X con función de supervivencia $S_X(x)$. Es por esto por lo que la función de distorsión g no puede ser cualquier función, dado que ha de verificar las propiedades necesarias para que $g(S_X(x))$ sea considerada función de supervivencia, ya que lo que hace dicha función g es transformar la función de supervivencia $S_X(x)$.

Dado que g es una función no decreciente, y como la función de supervivencia $S_X(x)$ es una función no creciente, la transformada $g(S_X(x))$ es una función no creciente. A esta función que transforma la función de supervivencia se la denomina función de supervivencia ajustada al riesgo (Wang, (1995)).

Luego la finalidad de la función de distorsión es transformar una distribución de probabilidad $S_X(x)$ en una nueva distribución de la forma $g\left(S_X(x)\right)$. Y para ello es preciso que dicha función de distorsión cumpla las propiedades que a continuación se enuncian (Wang, (1996)), suponiendo que las funciones g y $S_X(x)$ sean derivables.

1. La función $g\left(S_X(x)\right)$ es una función no creciente con respecto a x. Para ello, siendo g y S derivables, su primera derivada ha de ser menor o igual a 0.

$$\frac{dg\left(S_X(x)\right)}{dx} = g'\left(S_X(x)\right) S'_X(x) \leq 0 \qquad (3)$$

2. La función $g\left(S_X(x)\right)$ está comprendida entre 0 y 1 cuando $x \in [0;+\infty]$.

- $S_X(0)=1$, luego $g\left(S_X(0)\right)=g(1)=1$.
- $\lim_{x\to\infty} S_X(x)=0$, luego $g\left(\lim_{x\to\infty} S_X(x)\right)=g(0)=0$

3. Al verificar $g\left(S_X(x)\right)$ las propiedades primera y segunda de la función de supervivencia, y siendo g y $S_X(x)$ funciones continuas, se puede considerar a la función de supervivencia ajustada al riesgo como la función de supervivencia de otra variable aleatoria denotada por Y, con la siguiente función de densidad:

- $f_Y(x)=f_{X'}(x)=-\dfrac{dg\left(S_X(x)\right)}{dx}=-g'\left(S_X(x)\right)S'_X(x)=g'\left(S_X(x)\right)f_X(x)$

Y se tiene que $g'\left(S_X(x)\right)$ es una función de ponderación de la función de densidad $f_X(x)$.

Además si $g(x)$ es una función cóncava:

$$\frac{dg'\left(S_X(x)\right)}{dx} = g''\left(S_X(x)\right) S'_X(x) \geq 0.$$

La función de distorsión permite definir una nueva variable aleatoria Y, ya que la función $g\left(S_X(x)\right)$ tiene las propiedades de función de supervivencia explicadas anteriormente. De este modo se ha recargado la distribución de probabilidad inicial, consiguiendo la distribución de probabilidad ajustada al riesgo, o también llamada distribución de probabilidad distorsionada.

3.2 Medidas de riesgo basadas en diferentes formas que adopta la función de distorsión

Es importante indicar que, según sea la forma que adopte la función de distorsión, esto conducirá a una u otra medida de riesgo. Es por esto por lo que se muestran diferentes ejemplos de medidas de riesgos basados en diversas formas de la función de distorsión. (Whirch, JL. Hardy, M (1999); Tse, Y-K (2009)).

- <u>Prima neta</u>. Lleva asociada una función de distorsión lineal de la forma $g(u) = u$ la cual verifica las propiedades anteriormente explicadas para que sea considerada función de supervivencia.

Luego

$$H(X) = \int_0^\infty g\left(S_X(x)\right)dx = \int_0^\infty \left(S_X(x)\right)dx = E(X) \tag{4}$$

- <u>Valor en riesgo</u>. Se define:

$$Var_\xi = \int_0^\infty g\left(S_X(x)\right)dx$$

Esta medida de riesgo lleva asociada una función de distorsión de la siguiente forma:

$$g\left(S_X(x)\right) = 1 \quad 0 \le x \le Var_\xi$$
$$g\left(S_X(x)\right) = 0 \quad x > Var_\xi$$

Luego el cálculo del Var mediante esta forma de la función de distorsión:

$$\begin{aligned} Var_\xi &= \int_0^\infty g\left(S_X(x)\right)dx = \int_0^{Var_\xi} g\left(S_X(x)\right)dx + \int_{Var_\xi}^\infty g\left(S_X(x)\right)dx = \\ &= \int_0^{Var_\xi} 1\,dx + \int_{Var_\xi}^\infty 0\,dx = \left(x\right)_0^{Var_\xi} = Var_\xi \end{aligned} \tag{5}$$

- <u>TVar</u>. Se le puede considerar como una medida alternativa al Var, ya que cuantifica las pérdidas que pueden existir en las colas de las distribuciones La forma que tiene la función de distorsión en este caso es la que a continuación se indica (con la condición que X sea continua):

$$g\left(S_X(x)\right) = 1 \qquad 0 \le x \le Var_\xi$$
$$g\left(S_X(x)\right) = \frac{S_X(x)}{1-\xi} \qquad x > Var_\xi$$

Luego el cálculo del TVar mediante esta forma de la función de distorsión es:

$$TVar = H(X) = \int_0^{\infty} g\left(S_X(x)\right)dx = \int_0^{Var_\xi} 1dx + \int_{Var_\xi}^{\infty} \frac{S_X(x)}{1-\xi}dx = \left(x\right)_0^{Var_\xi} + \int_{Var_\xi}^{\infty} \frac{S_X(x)}{1-\xi}dx =$$

$$= Var_\xi + \int_{Var_\xi}^{\infty} \frac{S_X(x)}{1-\xi}dx$$

Integrando por partes la integral (Tse, (2009)):

$$\frac{1}{1-\xi}\int_{Var_\xi}^{\infty} S_X(x)\,dx = \frac{1}{1-\xi}\left(x\,S_X(x)\right)_{Var_\xi}^{\infty} - \int_{Var_\xi}^{\infty} x\,S'_X(x)dx =$$

$$= \frac{1}{1-\xi}\left(-Var_\xi\, S_X(Var_\xi)\right) + \int_{Var_\xi}^{\infty} x\,f_X(x)dx =$$

$$= \frac{1}{1-\xi}\left(-Var_\xi(1-\xi)\right) + \int_{Var_\xi}^{\infty} x\,f_X(x)dx$$

Por tanto:

$$TVar = Var_\xi - Var_\xi + \frac{1}{1-\xi}\int_{Var_\xi}^{\infty} x\,f_X(x)dx = \frac{1}{1-\xi}\int_{Var_\xi}^{\infty} x\,f_X(x)dx \qquad (6)$$

Es importante resaltar cómo a partir de la función de distorsión de Wang se obtienen diferentes medidas de riesgo ampliamente utilizadas.

- Transformada proporcional del tanto instantáneo. Este principio de cálculo de primas tiene una forma de función de distorsión con la siguiente expresión (Tse, (2009)):

$$g(u) = u^{\frac{1}{\rho}} \quad \rho > 0 \qquad (7)$$

$H(X) = \int_0^{\infty} g\left(S_X(x)\right)dx = \int_0^{\infty} \left(S_X(x)\right)^{\frac{1}{\rho}} dx$. Esta forma de función de distorsión es la que se emplea en esta investigación.

Esta expresión es a nivel general, definiéndose una nueva variable aleatoria Y, a partir del riesgo inicial denotado por X, con función de densidad y prima ajustada al riesgo dadas por:

$$S_Y(x) = \left(S_X(x)\right)^{\frac{1}{\rho}} \qquad \rho > 0$$
$$\Pi_\rho(X) = E(Y) = \int_0^\infty \left(S_X(x)\right)^{\frac{1}{\rho}} dx \tag{8}$$

De la definición establecida en la ecuación (8) se extraen las siguientes consecuencias.

1. La $E(Y)$ es una función creciente con respecto de ρ.

$$\frac{dE(Y)}{d\rho} = -\frac{1}{\rho^2}\int_0^\infty \left(S_X(x)^{\frac{1}{\rho}} \operatorname{Log}\left(S_X(x)\right) \right) dx > 0$$

   Dado que la expresión $\operatorname{Log}\left(S_X(x)\right) < 0$, a mayor ρ mayor prima ajustada al riesgo, justificándose de este modo la interpretación de dicho parámetro como un índice de aversión al riesgo, tal como indica Tse (2009).

2. Los tantos instantáneos de las variables aleatorias X e Y son proporcionales. En seguros no vida (Wang (1995)), dada la variable aleatoria no negativa X con función de distribución $F_X(x)$ y función de supervivencia $S_X(x)$, dado que:

$$S_Y(t) = S(t)^{\frac{1}{\rho}} = [e^{-\int_0^t \mu_x(u)du}]^{\frac{1}{\rho}} = e^{-\int_0^t \frac{1}{\rho}\mu_x(u)du}$$

   Por tanto se verifica que:

$$\mu_Y(t) = \frac{1}{\rho}\mu_x(t) \qquad \rho > 0 \quad t \geq 0 \tag{9}$$

Los tantos de las variables X e Y son proporcionales, y es por esto por lo que la nueva variable aleatoria Y se denomina transformada proporcional del tanto instantáneo de la variable X, con parámetro ρ (Wang, (1996)).

En general, esta transformada sólo necesita que el parámetro sea mayor que cero, pero en el contexto de los seguros generales se considera que el parámetro sea $\rho \geq 1$, para así proporcionar más peso a la cola de la distribución del riesgo.

$S_Y(x) = g\left(S_X(x)\right) = \left(S_X(x)\right)^{\frac{1}{\rho}}$, con valores de $\rho \geq 1$.

3.3 Cálculo de la prima neta y la prima recargada implícitamente para la modalidad de seguro Vida Entera, aplicando las cuatro leyes de supervivencia.

Se va a calcular la prima neta y la prima recargada para esta modalidad de seguro con cobertura de fallecimiento, en tiempo continuo, con capital asegurado unitario, para una cabeza de edad x. En este caso, el riesgo está representado por la variable aleatoria T(x), vida residual o tiempo de vida desde la contratación de la póliza hasta el fallecimiento del asegurado, siendo la edad de contratación la edad actuarial x.

Se tienen en cuenta los siguientes supuestos.

1. Se paga una unidad monetaria en el momento del fallecimiento.
2. El tipo de interés técnico es i.
3. Dada la variable aleatoria continua, edad de fallecimiento X, para un recién nacido , con función de supervivencia S(x), la variable aleatoria T(x) tiene una función de distribución denominada $G_x(t)$ y una función de supervivencia $S_x(t)$ cuyas expresiones en función de S(x) vienen dadas por :

$$\begin{aligned} G_x(t) &= \frac{S(x)-S(x+t)}{S(x)} = 1 - \frac{S(x+t)}{S(x)} \\ S_x(t) &= 1 - G_x(t) = \frac{S(x+t)}{S(x)} \end{aligned} \qquad (10)$$

Aplicando el principio de equivalencia actuarial para obtener la prima pura única se obtiene la expresión (Bowers, JR. Newton, L. Gerber, H. Jones, D (1997)):

$$P = \int_0^{+\infty} v^t \, dG_x(t) \qquad (11)$$

Siendo $v = \frac{1}{1+i}$ el factor de actualización.

Para adaptar este principio de equivalencia actuarial al cálculo de primas basado en la función de distorsión, se expresa esta integral en función de $S_{x(}t)$.

$$P = \int_0^{+\infty} v^t \, dG_x(t) = -\int_0^{+\infty} v^t \, dS_x(t) \qquad (12)$$

Haciendo el cambio de variable $v^t = z$ y a continuación integrando por partes se llega a la expresión de la prima única de riesgo en términos de la función de supervivencia de la variable aleatoria vida residual:

$$P = 1 - \int_0^1 S_x\left(\frac{\ln z}{\ln v}\right) dz \qquad (13)$$

En la figura 5 se muestran las primas únicas de riesgo calculadas para las cuatro leyes de supervivencia[3].

FIGURA 5: PRIMAS ÚNICAS DE RIESGO

Leyes Supervivencia	Prima Única de Riesgo
Primera Ley de Dormoy	$P = \frac{Ln\,S}{Ln\,S + Ln\,v}$
Segunda Ley de Dormoy	$P=1-\frac{Lnv}{LnS_1+Lnv+2xLnS_2+2LnS_2}=\frac{LnS_1+(2x+2)LnS_2}{LnS_1+Lnv+(2x+2)LnS_2}$
Ley de Gompertz	$P=1-\frac{Ln\,v}{g^{C^x}\left(C^{x+1}Ln\,g+Ln\,v\right)}=\frac{g^{C^x}\left(C^{x+1}Ln\,g+Ln\,v\right)-Ln\,v}{g^{C^x}\left(C^{x+1}Ln\,g+Ln\,v\right)}$
Ley de Makeham	$P=1-\frac{Lnv}{g^{C^x}\left(LnS+Lnv+C^{x+1}Lng\right)}=\frac{g^{C^x}\left(LnS+Lnv+C^{x+1}Lng\right)-Lnv}{g^{C^x}\left(LnS+Lnv+C^{x+1}Lng\right)}$

Fuente: Elaboración propia. Tabla que relaciona las primas únicas de riesgo, calculadas por aplicación del principio de equivalencia actuarial, con cada una de las leyes de supervivencia.

Lo que se trata de hacer a continuación es obtener una prima recargada transformando la función de supervivencia por medio de una función de distorsión en forma de potencia, tal como se ha indicado en la ecuación (8):

$$P_{rec} = 1 - \int_0^1 \left[S_x\left(\frac{\ln z}{\ln v}\right)\right]^{\frac{1}{\rho}} dz \qquad (14)$$

Para que la prima recargada sea mayor que la prima pura, el exponente deberá ser $\frac{1}{\rho} \geq 1 \Rightarrow \rho \leq 1$.

El objetivo que se busca es obtener una prima recargada mayor que la prima pura de riesgo, y esto se consigue, en este caso en concreto, haciendo que el parámetro ρ sea menor que la unidad.

Esta afirmación se justifica de este modo. Conforme menor sea el parámetro ρ, menor será el valor de la integral, por lo que la prima recargada será mayor. Dicho de otro modo, en un seguro con cobertura

[3] **Para un análisis matemático completo, véase Hernández, M (2013).**

de fallecimiento, a la compañía aseguradora le interesa que el asegurado no fallezca o que lo haga lo más tarde posible, ya que si el óbito acaece pronto el resultado de la póliza será negativo para la compañía. Si se considera un tanto mayor, entonces se recarga la prima (para $\rho \leq 1$) luego la prima recargada será mayor, puesto que la compañía cobrará más dinero a los asegurados al presentar estos un tanto instantáneo de mortalidad mayor.

El hecho de que el exponente $\frac{1}{\rho}$ sea mayor que la unidad significa que para cada valor de $t = \frac{\mathrm{Lnz}}{\mathrm{Lnv}}$, la función de supervivencia distorsionada es menor que la inicial, dando esto lugar a que se considere que el asegurado tiene un riesgo de fallecer mayor, como se ha explicado con anterioridad. De esta forma, al considerarse una siniestralidad superior a la esperada, se obtiene una prima recargada.

Así mismo, esta esperanza distorsionada cumple todas las propiedades de una medida de riesgo coherente, en especial la de subaditividad (Hernández, M (2013)), ya que el resto sólo precisan del valor del parámetro mayor que 0.Wang demostró que se verificaba esta propiedad sólo para el caso de que el parámetro $\rho \geq 1$, y aplicado al entorno de los seguros generales.

La prima recargada obtenida en (14) coincide con la prima pura de otra variable Y, con el mismo modelo de supervivencia que el de la variable inicial X, pero con un tanto instantáneo de mortalidad proporcional al tanto instantáneo de dicha variable X. La demostración está recogida en el Apéndice A.

$$P_{rec} = -\int_0^\infty v^t d\left(S_X(t)\right)^{\frac{1}{\rho}} \tag{15}$$

Si se llama $S_Y(t) = \left(S_X(t)\right)^{\frac{1}{\rho}}$, entonces la expresión final de la prima recargada es:

$$P_{rec} = -\int_0^\infty v^t d\left(S_Y(t)\right) \tag{16}$$

La nueva expresión de prima obtenida se corresponde a la prima única de un seguro de la misma modalidad (seguro de vida entera) pero para una nueva variable aleatoria llamada Y, cuya función de supervivencia tiene la expresión $S_Y(t) = \left(S_X(t)\right)^{\frac{1}{\rho}}$.

La expresión del tanto instantáneo de la variable Y es la siguiente:

$$\mu_Y(t) = -\frac{S'_Y(t)}{S_Y(t)} = -\frac{\frac{1}{\rho}S'_X(t)\left(S_X(t)\right)^{\frac{1}{\rho}-1}}{\left(S_X(t)\right)^{\frac{1}{\rho}}} = -\frac{1}{\rho}\frac{S'_X(t)}{S_X(t)} = \frac{1}{\rho}\mu_X(t) \qquad (17)$$

siendo $\mu_X(t)$ el tanto instantáneo de la variable inicial X. Por tanto se llega al final de la demostración concluyendo que la prima recargada obtenida a partir de la medida de riesgo esperanza distorsionada coincide con la prima pura obtenida para la misma ley de supervivencia, pero con un tanto proporcional, con factor de proporcionalidad $\frac{1}{\rho}$.

En la figura 6 se muestran las primas únicas de riesgo recargadas calculadas para las cuatro leyes de supervivencia, mediante el empleo de la función de distorsión de Wang en forma de potencia. (Hernández, M. (2013)).

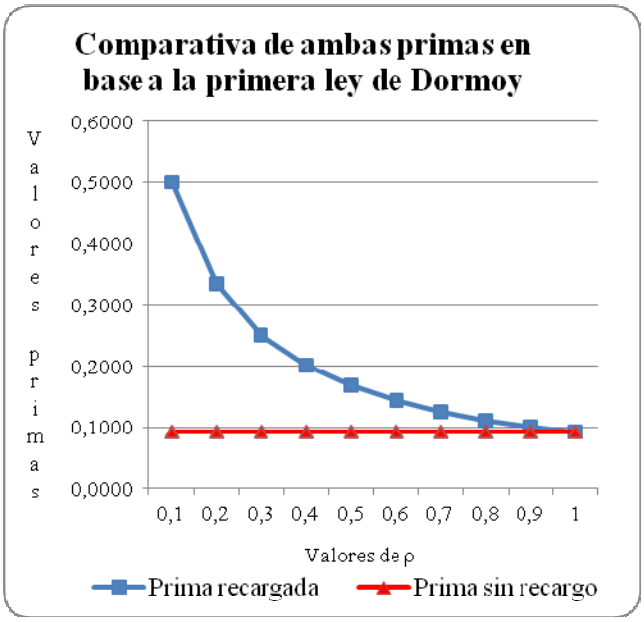
FIGURA 6: PRIMAS ÚNICAS DE RIESGO RECARGADAS

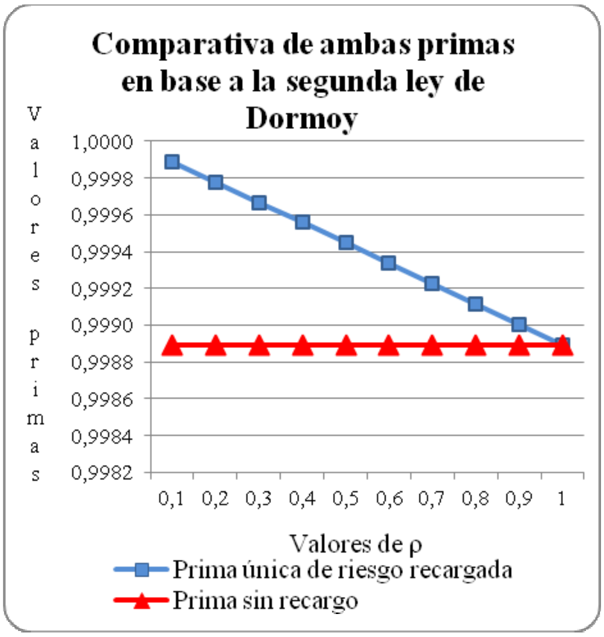
Leyes de supervivencia	Prima única riesgo recargada
Primera ley de Dormoy	$P_{rec} = \frac{LnS^{\frac{1}{\rho}}}{LnS^{\frac{1}{\rho}} + Lnv}$
Segunda ley de Dormoy	$P_{rec} = \frac{Ln\left(S_1^{\frac{1}{\rho}} S_2^{2(x+1)\frac{1}{\rho}}\right)}{Ln\left(S_1^{\frac{1}{\rho}} v\, S_2^{2(x+1)\frac{1}{\rho}}\right)}$
Ley de Gompertz	$P_{rec} = \frac{g^{C^x\frac{1}{\rho}}\left(C^{x+1}\frac{1}{\rho}Lng + Lnv\right) - Lnv}{g^{C^x\frac{1}{\rho}}\left(C^{x+1}\frac{1}{\rho}Lng + Lnv\right)}$
Primera ley de Makeham	$P_{rec} = \frac{g^{C^x\frac{1}{\rho}}\left(\frac{1}{\rho}LnS + C^{x+1}\frac{1}{\rho}Lng + Lnv\right) - Lnv}{g^{C^x\frac{1}{\rho}}\left(\frac{1}{\rho}LnS + C^{x+1}\frac{1}{\rho}Lng + Lnv\right)}$

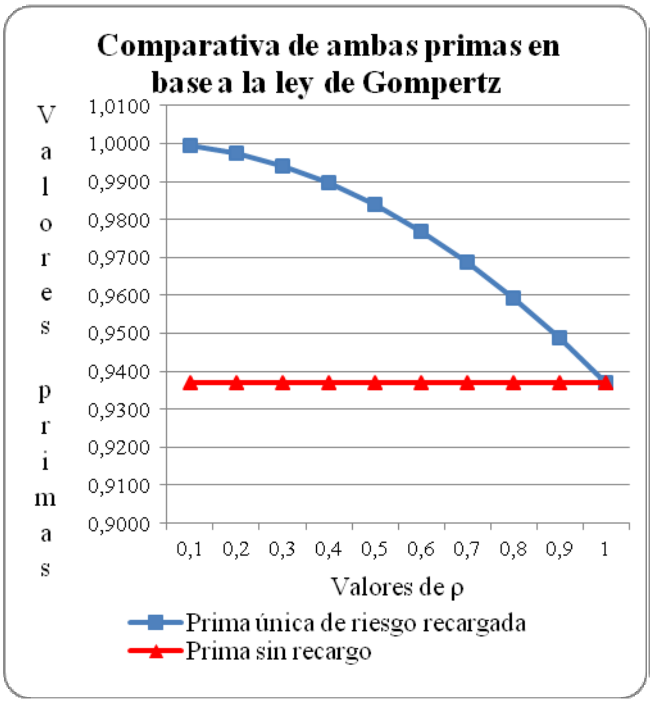
Fuente: Elaboración propia. Tabla que relaciona las primas únicas de riesgo recargadas implícitamente, a través de la función de distorsión de Wang en forma de potencia, con cada una de las leyes de supervivencia.

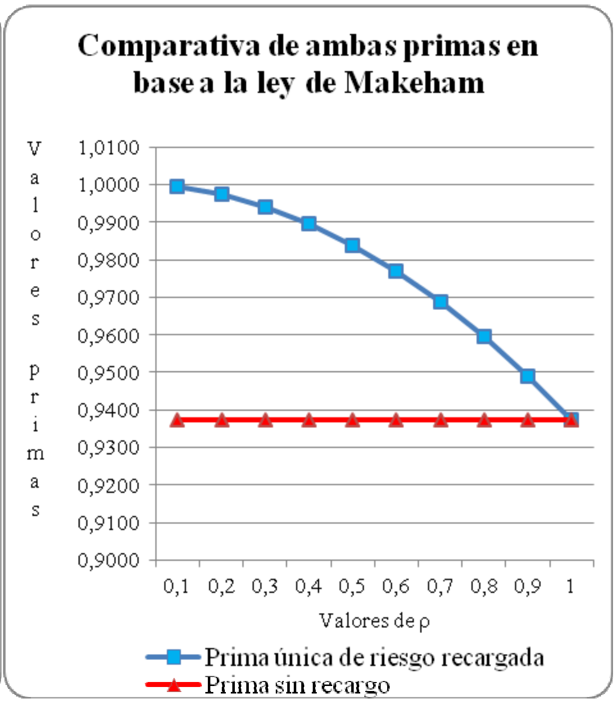
Para terminar con este apartado y con el objetivo de mostrar de una manera gráfica cómo la prima de riesgo recargada mediante esta medida de riesgo coherente, la transformada proporcional del tanto instantáneo, es superior a la prima neta, y de este modo proporcionar una justificación teórica a la práctica habitual que llevan a cabo las entidades aseguradoras de modificar las probabilidades de fallecimiento y evitar así las desviaciones desfavorables de la siniestralidad, se detallan unos gráficos explicativos en base a los valores que toma el parámetro $\rho \leq 1$. Es necesario decir que La asignación de los valores numéricos a dicho parámetro es uno de los puntos objeto de una futura línea de investigación, dado que no se han seguido criterios de solvencia y aversión al riesgo para su selección. No obstante se ha considerado la recomendación realizada por SOLVENCIA II en el documento QIS5, que dice que el valor del parámetro se recomienda sea de 0.15 para esta modalidad de seguro. Para este seguro con cobertura de fallecimiento se han tomado valores del parámetro ρ que oscilan desde 1 hasta 0.1, con disminuciones de valor 0.1. Con estos valores asignados a ρ lo que se ha pretendido es demostrar, tanto matemática como gráficamente que la prima recargada obtenida mediante el empleo de la función de distorsión de Wang en su forma de potencia es superior a la prima neta.

FIGURA 7: GRÁFICOS EXPLICATIVOS DE LA PRIMA NETA Y LA PRIMA DE RIESGO RECARGADA









Fuente: Elaboración propia. . En los gráficos se observa el impacto del recargo implícito sobre la prima única de riesgo según disminuye el parámetro ρ , en base a cada una de las cuatro leyes con las que se trabaja en el artículo.

4 Resultados y conclusiones

En esta investigación se ha obtenido un principio de cálculo de primas para seguros de vida basado en la medida de riesgo coherente denominada esperanza distorsionada con la función de distorsión de Wang en forma de potencia. El objetivo perseguido ha sido obtener un método alternativo de tarificación, diferente del principio basado en las esperanzas matemáticas, para calcular la prima única de riesgo recargada que refleje una siniestralidad superior a la esperada. La modalidad de seguro elegida ha sido el seguro vida entera, para la cobertura de fallecimiento. El resultado obtenido permite justificar la práctica habitual que realizan las compañías aseguradoras, en el área de vida, de manipular el tanto instantáneo de mortalidad con el fin de obtener una prima recargada a través de un recargo implícito. La recomendación que realiza Solvencia II en lo que respecta al importe que tome dicho recargo se encuentra especificado en el informe QIS5.

Se ha obtenido una expresión de prima recargada mediante el empleo de la función de distorsión de Wang en su forma de potencia, para un seguro de vida con cobertura de fallecimiento (14).

Uno de los principales resultados obtenidos es que la función de distorsión de Wang en su forma de potencia es una medida de riesgo coherente para el caso que $\rho > 1$.Así fue demostrado por Wang en 1995. Pero lo novedoso a resaltar es que esta función de distorsión de Wang en su forma de potencia sigue siendo una medida de riesgo coherente (para el caso de tarificación de un seguro con cobertura de fallecimiento), con valores del parámetro menores que la unidad. Por lo tanto se puede concluir que la función de distorsión seleccionada en este trabajo, la llamada Esperanza Distorsionada, es apta para tarificar en vida, haciendo lo análogo a lo que ya hizo Wang en 1995 pero aplicado a la rama de los seguros generales. Otro resultado logrado es que la prima recargada, calculada para todas y cada una de las leyes empleadas y para la modalidad de seguro elegida, con la función de distorsión de Wang en forma de potencia, es la misma a la que se obtendría (prima sin recargar) a partir de otra variable aleatoria que sigue la misma ley de supervivencia, modificándose exclusivamente el valor de los parámetros. Para la modalidad de seguro vida entera, la modificación que sufren los parámetros origina el mismo efecto en la probabilidad de fallecimiento en las cuatro leyes de supervivencia: dicha probabilidad aumenta, lo cual hace que la prima recargada sea superior a la prima sin recargar. De este modo se ha conseguido el objetivo propuesto de recargar la prima única de riesgo mediante un recargo implícito, con el único efecto sobre las leyes de cambiar sus parámetros. Justamente la modificación que experimentan estos es que los nuevos parámetros son proporcionales a los parámetros de las leyes aplicadas para calcular la prima sin recargar, siendo el factor de proporcionalidad el exponente de la función de distorsión transformada proporcional. Además, el efecto que produce, sobre las leyes de mortalidad utilizadas, la función de distorsión es que las nuevas leyes presentan un tanto instantáneo de mortalidad proporcional al de la ley original. El factor de proporcionalidad es $\frac{1}{\rho}$, que es justamente el exponente de la función de distorsión transformada proporcional.

En el caso concreto de los seguros de modalidad vida entera, al ser el cociente $\frac{1}{\rho}$ proporcional al tanto instantáneo de mortalidad, conforme disminuye ρ aumenta la probabilidad de fallecimiento, luego esto implica un mayor riesgo para la compañía aseguradora. Es por esta razón por la que la entidad cobrará primas recargadas de manera implícita cada vez mayores ante decrementos en el valor de dicho parámetro. Por ello, la relación entre la prima única de riesgo recargada y el parámetro ρ será decreciente.

Apendice A

Demostración

Se parte de la expresión siguiente:

$$P_{rec} = 1 - \int_0^1 S_x\left(\frac{Lnz}{Lnv}\right)^{\frac{1}{\rho}} dz \tag{1}$$

Llamando $r = \dfrac{1}{\rho}$ e integrando por partes:

$$\begin{aligned}
&u = \left(S_x\left(\frac{Lnz}{Lnv}\right)\right)^r \\
&du = r\frac{1}{zLnv}S'_x\left(\frac{Lnz}{Lnv}\right)\left(S_x\left(\frac{Lnz}{Lnv}\right)\right)^{r-1} \\
&dz = dv \quad\quad z = v \\
&P_{rec} = 1 - \left(z\left(S_x\left(\frac{Lnz}{Lnv}\right)\right)^r\right)_0^1 - \int_0^1 zr\frac{1}{zLnv}S'_x\left(\frac{Lnz}{Lnv}\right)\left(S_x\left(\frac{Lnz}{Lnv}\right)\right)^{r-1} dz = \\
&= 1 - \left(1 - \int_0^1 zd\left(S_x\left(\frac{Lnz}{Lnv}\right)\right)^r\right) = \int_0^1 zd\left(S_x\left(\frac{Lnz}{Lnv}\right)\right)^r
\end{aligned} \tag{2}$$

Haciendo el cambio de variable $z = v^t$ resulta:

$$\begin{aligned}
&Ln\, z = t\, Lnv \\
&t = \frac{Lnz}{Lnv} \\
&P_{rec} = -\int_0^\infty v^t d\left(S_X(t)\right)^r = \int_\infty^0 v^t d\left(S_X(t)\right)^r \\
&P_{rec} = -\int_0^\infty v^t d\left(S_X(t)\right)^{\frac{1}{\rho}}
\end{aligned} \tag{3}$$

Si se llama $S_Y(t) = \left(S_X(t)\right)^{\frac{1}{\rho}}$, entonces la expresión final de la prima recargada es:

$$P_{rec} = -\int_0^\infty v^t d\left(S_Y(t)\right)$$

Referencias

ARTZNER, P. “Application of coherent risk measures to capital requirements in insurance”. *North American Actuarial Journal.*1999, 3 (2), p.11-15.

ARTZNER, P., DELBAEN, F., EBER, JM., HEATH, D. (1999), “Coherent measures of risk”. *Mathematical Finance*. 1999, (9), Jul. p. 203-228.

BOWERS, JR., NEWTON, L.,GERBER, H., JONES, D. *Actuarial Mathematics.* The Society of Actuaries. 1997. Illinois.

DENUIT, D., DHAENE, J., GOOVAERTS, M., KAAS, R. *Actuarial Theory for Dependent risks: measures, orders and model.* 2005. John Wiley & Sons.

European Commission. Internal Market and Services DG. Insurance and pensions. Brussels.,2010. *QIS5 Technical Specifications (Working Document of the Commission services).* https://www.ceiops.eu.

GÓMEZ DENIZ, E., SARABIA, JM. *Teoría de la Credibilidad. Desarrollo y aplicaciones en primas de seguros y riesgos operacionales.* 2008. Fundación MAPFRE.

HERNÁNDEZ SOLÍS, M. Tarificación en Seguros de Vida con la Medida de riesgo Esperanza Distorsionada. Tesis Doctoral no publicada. Universidad Complutense, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, 2013. Madrid.

LANDSMAN, Z., SHERRIS, M. “Risk measures and insurance premium principles”. *Insurance: Mathematics & Economics.* 2001, (29), Aug. p. 103-115.

MODIGLIANI, M., MILLER, M. “*The* cost of capital, Corporate Finance and the Theory of Investment”. *The American Economic Review.* 1958, (48), p. 261-297.

ROTAR, V. *Actuarial Models*. 2006. Chapman and Hall.

TASCHE, D. Risk contributions and performance measurement. 2000. Disponible en Munich: Technische Universität München.

WANG, S. “Insurance pricing and increased limits ratemaking by proportional hazards transforms”. *Insurance Mathematics and Economic*. 1995, (17), Feb. p. 43-54.

WANG, S.”Premium calculation by transforming the layer premium density”. *Astin Bulletin* 1996, (26).

WANG, S., YOUNG, V. PANJER, H. “Axiomatic characterization of insurance prices”. *Insurance Mathematics and Economics.* 1997, (21), Nov. p.173-183.

WANG, S. “A class of distortion operators for pricing financial and insurance risk”. *Journal of risk and insurance*. 2000, (67), March. p. 15-37.

WHIRCH, JL., HARDY, M. “A synthesis or risk measures for capital adequacy”. *Insurance, Mathematics & Economics*. 1999, (25), Dec, p. 337-347.

TSE, Y-K. *Nonlife Actuarial Models. Theory, methods and evaluation*. 2009. Cambridge University Press.