ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

Tareas, textos y usos del conocimiento matemático: aportes a la interpretación de la comprensión desde el cálculo aritmético elemental

A Gabrielle Frisch D'Adhemar
In Memoriam

Jesús Gallardo Romero, José Luis González Marí y Verónica Aurora Quintanilla Batallanos

Resumen: Presentamos progresos en la configuración de un modelo en desarrollo para la interpretación de la comprensión en matemáticas. Dicho modelo conecta las orientaciones cognitiva y semiótica de la interpretación en matemáticas mediante una propuesta integradora que ofrece una vía operativa para transitar desde la actividad del estudiante hasta su comprensión matemática. Los principios que conforman el modelo se organizan en dos dimensiones, una fenómeno-epistemológica y otra hermenéutica. La primera incluye un método para la identificación y organización de tareas con las cuales registrar la actividad matemática del estudiante. La segunda incorpora un recorrido interpretativo que permite el acceso a la comprensión del alumno en términos de usos dados al conocimiento matemático. La operatividad del modelo se exhibe con evidencias obtenidas al interpretar la comprensión de una pareja de estudiantes de secundaria que resuelven una tarea de cálculo aritmético elemental.

Palabras clave: interpretación, comprensión en matemáticas, análisis epistemológico y fenomenológico, hermenéutica, algoritmo de la multiplicación.

Abstract: We show the advances obtained in the configuration of a developing model for the interpretation of mathematics understanding. Such a model links

Fecha de recepción: 8 de julio de 2012; fecha de aceptación: 27 de junio de 2013.

the cognitive approach of mathematics interpretation with the semiotic approach through a process of integration, which shows an operative way to move from the students' activity to their mathematical understanding. The fundamental principles which define this model are divided in two dimensions, the phenomenon-epistemological and the hermeneutical. The first one includes a method for the identification and organization of task with which the mathematical activity of the students can be registered. The second one comprises an interpretative plan which grants the access to the students' understanding in terms of the given uses to the mathematical knowledge. The effectiveness of this model can be proved with some evidences obtained when interpreting a pair of secondary students when they solve an elementary arithmetic problem.

Keywords: interpretation, understanding in mathematics, phenomenological and epistemological analysis, hermeneutics, multiplication algorithm.

1. INTRODUCCIÓN

Un objetivo en educación matemática es garantizar que los alumnos aprendan matemáticas con comprensión. Hace décadas que la comprensión viene contemplándose como un objeto de investigación en el área (Kieran, 1994). En los últimos años, la creciente especialización en el tema ha motivado la proliferación de diferentes aproximaciones a la comprensión en matemáticas, con marcos teóricos y métodos de valoración específicos. En la mayoría de estas aproximaciones se llega a reconocer la naturaleza interpretativa de la valoración de la comprensión. Es decir, toda observación sobre el quehacer matemático de los alumnos, realizada con el fin de extraer información sobre su comprensión, ha de ser interpretada por quien efectúa la observación (Morgan y Watson, 2002). Es así como el objetivo básico de desarrollar la comprensión de los escolares queda ligado de manera ineludible a la actividad de interpretar sus acciones matemáticas en el aula. Una circunstancia que nos permite situar la *interpretación* en la base de las cuestiones que atañen al estudio de la comprensión en matemáticas.

La interpretación de la actividad matemática nos enfrenta al desafío de encontrar métodos eficaces con los que aproximarnos a la comprensión de los alumnos. La principal dificultad operativa reside en cómo transitar desde las acciones y registros matemáticos del estudiante hasta la delimitación de una buena aproximación a la situación real de su comprensión. En términos interrogativos: ¿cómo podemos interpretar la comprensión de los estudiantes a partir de su actividad matemática observable? Esta cuestión básica, que motiva el estudio que aquí se presenta, genera a su vez interrogantes concretos sobre diversos aspectos particulares de la interpretación, entre los que se encuentran los relativos a la naturaleza de las situaciones matemáticas que se van a emplear, los fragmentos que revelan la comprensión a partir de la actividad matemática registrada y la caracterización de los usos del conocimiento matemático y la comprensión de los estudiantes sobre la base de esos rastros visibles.

Como contribución específica a esta problemática, presentamos un modelo operativo para la interpretación de la comprensión en matemáticas. La propuesta aspira a mediar en el dualismo entre las orientaciones cognitiva y semiótica de la interpretación en matemáticas, ofreciendo como alternativa una visión interpretativa integradora. Buscamos presentar la interpretación desde una perspectiva más inclusiva, donde el objetivo es compartir formas de ver y comprender las matemáticas antes que insistir en una versión correcta de las matemáticas y una supuesta buena comprensión (Brown, 2008). Los referentes que configuran el modelo de interpretación se exponen organizados en dos dimensiones, una fenómeno-epistemológica y otra hermenéutica. La primera reúne los principios en torno al conocimiento matemático y a la comprensión en matemáticas y su valoración. También incluye una propuesta de análisis epistemológico y fenomenológico del conocimiento matemático que posibilita la identificación y organización de tareas y la elaboración de instrumentos propicios para registrar la actividad matemática del estudiante. Las estructuras epistemológica y fenomenológica asociadas al conocimiento matemático se proponen como referencia objetiva para caracterizar el uso del conocimiento en la actividad matemática. Con estos referentes, dirigimos la atención hacia el propio proceso de interpretación, incorporando en el modelo una segunda dimensión hermenéutica. Esta dimensión introduce un ciclo interpretativo que nos posibilita el acceso a la comprensión de los estudiantes en términos del uso que ellos hacen del conocimiento matemático.

2. ANTECEDENTES SOBRE INTERPRETACIÓN DE LA COMPRENSIÓN EN MATEMÁTICAS

Uno de los aspectos concretos por los que se ve afectado el estudio de la comprensión en matemáticas es la naturaleza interpretativa de la valoración. Es usual que las diferentes aproximaciones incluyan entre sus principios generales referencias acerca de cómo hacer frente a la interpretación. Identificamos dos orientaciones básicas en la consideración y el tratamiento de la interpretación de la comprensión en educación matemática.

2.1. Orientación cognitiva

Esta orientación pone la atención en la subjetividad del alumno y determina como propósito responder a algunas de sus complejidades internas. Se caracteriza por concebir la comprensión matemática como un fenómeno cognitivo y por reconocer la posibilidad de su acceso y captación en las mentes de los alumnos. La interpretación se presenta entonces como un traslado hacia la esfera mental del estudiante, a la que pertenece su comprensión matemática, tomando como vía las distintas manifestaciones observables generadas durante su quehacer matemático (Duffin y Simpson, 2000).

En esta orientación, interpretar supone el acceso a realidades cognitivas internas con ayuda de la observación de realizaciones sensibles objetivadas. Por tratarse la comprensión de una actividad que acontece en la esfera interna del individuo, y por tanto sin posibilidad de ser observada directamente, su interpretación desde esta perspectiva necesita y suele abordarse al amparo de supuestos teóricos sobre la relación reconocida entre los estados mentales del sujeto y su comportamiento externo visible. El proceso metodológico recurrente implicado en esta interpretación tiene por objeto estrechar progresivamente la distancia entre estas realidades interna y externa. Un exponente de esta orientación es el *enfoque representacional*, que desarrolla una visión de la comprensión vinculada a las representaciones y conexiones, internas y externas, del conocimiento matemático (Goldin, 2002; Hiebert y Carpenter, 1992). El acceso interpretativo al ámbito mental de la comprensión resulta especialmente directo en este enfoque, al plantear la valoración en función de las conexiones mentales que se establecen entre las diversas representaciones internas del conocimiento matemático objeto de comprensión (Rico, 2009). Las principales dificultades operativas por las que se ve afectada la orientación cognitiva de la interpretación están relacionadas con la transición entre los ámbitos externo e interno de la comprensión junto con los propios rasgos mentales de ésta.

2.2. Orientación semiótica

Esta opción interpretativa emerge de aproximaciones semióticas al conocimiento matemático y su cognición que se vienen desarrollando recientemente en educación matemática. La orientación semiótica, tal como la derivamos de estos enfoques, asume un distanciamiento con el carácter mental de la comprensión (Dörfler, 2006). Se opta por presentar la comprensión como una capacidad esencial o competencia del alumno que se traduce en prácticas sociales interpretables públicamente (Font, Godino y D'Amore, 2007). La interpretación se circunscribe al espacio exclusivo de la actividad matemática visible y del uso que en ella se hace de los sistemas de signos matemáticos. Interpretar supone trasladarse a los entornos semióticos generados por estas prácticas y producciones matemáticas observables, suspendiendo incluso cualquier referencia a la realidad externa que circunda a los propios productos semióticos. El método involucrado en esta interpretación se ajusta, en lo fundamental, a un modelo de análisis estructural de inspiración lingüística que tiene como objeto captar la complejidad de las relaciones semióticas desplegadas en las diversas acciones matemáticas observadas y registradas en los alumnos. Ejemplo de ello lo encontramos en el análisis semiótico incluido en el *enfoque ontosemiótico* de la cognición e instrucción matemática (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007). Las posibles fronteras de la orientación semiótica de la interpretación las situamos en la problemática relación entre el signo hablado y el signo escrito y en la suspensión de las referencias externas sobre las que se proyectan los registros semióticos.

2.3. El dualismo cognitivo-semiótico y su dilema metodológico

Las particularidades de las orientaciones señaladas quedan reflejadas en aspectos como el estatus asignado a la comprensión en matemáticas, el espacio de acceso delimitado para la interpretación, el método asociado, la terminología específica o las fronteras de su operatividad. La confrontación de ambas orientaciones con base en estos aspectos nos permite identificar las dicotomías del cuadro 1. En ellas nos apoyamos para conjeturar la presencia de un dualismo epistemológico en la interpretación de la comprensión en educación matemática: mientras que la orientación cognitiva pone el acento en *quien se pronuncia en el texto* (recreación mental del sujeto), la orientación semiótica dirige la atención hacia *lo que dice el texto* (aprehensión de su sentido).

Cuadro 1 Dualidades entre las orientaciones cognitiva y semiótica de la interpretación en matemáticas

Rasgos dicotómicos	Orientación cognitiva	Orientación semiótica
Estatus de la comprensión	*Epistemológico:* fenómeno cognitivo, proceso mental, modo de conocer.	*Ontológico:* cualidad intrínseca, capacidad esencial del individuo.
Espacio de interpretación	Traslado a las realidades cognitivas internas del sujeto.	Traslado a los entornos semióticos generados por la actividad matemática.
Vía de acceso interpretativo	Observación de realizaciones externas objetivadas en registros verbales y escritos.	Práctica matemática visible y uso en ella de los sistemas de signos matemáticos.
Propósito de la interpretación	Estrechar progresivamente la distancia entre las realidades interna y externa.	Captar la complejidad de las relaciones semióticas desplegadas en la producción matemática.
Método	Círculo interpretativo con base en modelos de comprensión conjeturados *a priori*.	Modelo de *análisis estructural* de inspiración lingüística.
Fronteras	Transición entre lo *interno* y lo *externo;* los propios rasgos mentales de la comprensión.	Transición entre lo *hablado* y lo *escrito*. Suspensión de la referencia externa de los registros semióticos.

Al tiempo que reconocemos la legitimidad y potencialidad de estas dos orientaciones interpretativas para la investigación ligada a la comprensión (Tahta, 1996), también subrayamos el dilema metodológico que puede surgir al contemplar las orientaciones cognitiva y semiótica como polos de una relación de exclusión que nos impone una necesaria elección entre ellas. Como alternativa, se pueden establecer vínculos dialécticos entre ambas posiciones por medio de una visión extendida de la interpretación, donde las dos orientaciones contribuyen a la misma propuesta interpretativa, complementándose mutuamente. Ésta es la propuesta que fundamenta el modelo que se describe en la siguiente sección.

3. FUNDAMENTOS PARA UNA INTERPRETACIÓN OPERATIVA DE LA COMPRENSIÓN EN MATEMÁTICAS

Los principios que sustentan el modelo que proponemos para la interpretación de la comprensión en matemáticas se organizan en dos dimensiones, una *fenómeno-epistemológica* y otra *hermenéutica*. Estas dimensiones establecen pautas metodológicas operativas para interpretar la comprensión matemática de los estudiantes a partir de la observación y del análisis de una actividad matemática planificada.

3.1. Dimensión fenómeno-epistemológica

La configuración de nuestro modelo parte de un doble reconocimiento: *a)* la imposibilidad de tener acceso de manera directa a la comprensión matemática de los estudiantes y *b)* el papel relevante que desempeña el uso del conocimiento matemático en la valoración de la comprensión de los alumnos. Estos dos supuestos demandan la necesidad de emplear estrategias de acercamiento indirecto a la comprensión, centradas en sus manifestaciones externas observables y en las particularidades del conocimiento matemático. La dimensión fenómeno-epistemológica atiende este reclamo proponiendo unos referentes teórico-metodológicos operativos sobre el conocimiento matemático y sobre la comprensión en matemáticas y su valoración. De estos principios derivamos a su vez un procedimiento para la identificación y organización de tareas con las cuales registrar e interpretar la actividad matemática del estudiante, basado en el análisis fenomenológico y epistemológico del propio conocimiento matemático.

3.1.1. El conocimiento matemático como objeto de comprensión

Nos interesa contemplar el conocimiento matemático desde la perspectiva del alumno que aspira a comprenderlo. Como tal objeto de comprensión, es considerado en nuestro enfoque como una entidad concreta de referencia con dos estructuras básicas específicas y exclusivas que delimitan su naturaleza y existencia. Estas estructuras surgen de las relaciones con otros conocimientos matemáticos (estructura epistemológica) y de las situaciones y tareas problemáticas que dan sentido al propio conocimiento (estructura fenomenológica), quedando de antemano constituidas con fines valorativos al margen del sujeto con pretensiones de comprensión.

3.1.2. La comprensión y su valoración en matemáticas

Consideramos que la comprensión de un conocimiento matemático está ligada a las experiencias matemáticas que se producen a través de las situaciones en las que interviene dicho conocimiento. En este sentido, los estudiantes manifiestan una cierta comprensión en relación con un conocimiento matemático concreto cuando, ante situaciones de desequilibrio cognitivo que deciden voluntariamente abordar, elaboran y emiten a su satisfacción respuestas adaptadas donde hacen un uso significativo (esto es, libre, consciente e intencional) de este conocimiento. Entendemos que el uso del conocimiento matemático por parte de un alumno, como forma de acción observable e interpretable, da cuenta de su comprensión. Por ello afirmamos que un individuo comprende un conocimiento matemático si es capaz de emplearlo, en alguna de sus formas posibles, en todas aquellas situaciones pertenecientes a su ámbito fenómeno-epistemológico. Nos apoyamos en el supuesto valorativo de que lo que un individuo utiliza, y cómo lo utiliza para elaborar y emitir voluntariamente una respuesta adaptada a una situación, proporciona información específica sobre lo que comprende y cómo lo comprende.

Así pues, la comprensión en matemáticas la concebimos como una actividad intelectual que capacita al individuo para elaborar respuestas observables, adaptadas y contextualizadas que involucran la utilización registrable e interpretable del conocimiento matemático en alguna de las categorías y formas posibles de su dimensión fenómeno-epistemológica. El aprendizaje surge como consecuencia de esta comprensión ligada a la funcionalidad del conocimiento matemático, por lo que la idoneidad del aprendizaje y su valor como objetivo en educación matemática quedan vinculados con la cuestión de la comprensión (Llewellyn, 2012).

3.1.3. Método para determinar situaciones problemáticas

La visión adoptada sobre la comprensión y su valoración requiere procedimientos para la identificación y selección de tareas problemáticas para plantear a los estudiantes, vinculadas al conocimiento matemático y generadoras de experiencias matemáticas observables. La estrategia sugerida por nuestro enfoque propone determinar situaciones que sean representativas de la estructura fenómeno-epistemológica del conocimiento matemático y con potencialidad para hacer emerger distintos usos de éste durante la resolución. Ambas condiciones son necesarias para garantizar la utilidad de esas situaciones como instrumento operativo en la valoración de la comprensión. De manera específica, las fases del método son:

Primera fase. Destinada a concretar un conjunto amplio de situaciones que tienen en común la posible intervención de dicho conocimiento en su resolución. La configuración de este conjunto queda garantizada mediante la consulta y revisión de distintas fuentes documentales (investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del conocimiento matemático, libros de texto de matemáticas, obras de formación didáctica y manuales de matemáticas, entre otros).

Segunda fase. Análisis relacional del conjunto de situaciones obtenido en la fase anterior que conduce a la descripción teórica de la estructura fenómeno-epistemológica correspondiente al conocimiento matemático dado. Esta estructura, a su vez, es la referencia empleada para la selección del pretendido conjunto reducido de situaciones representativas de cada categoría y pertinentes para ser empleadas en labores de diagnóstico y valoración de la comprensión de acuerdo con nuestro modelo.

3.2. Dimensión hermenéutica

La dimensión fenómeno-epistemológica no responde por sí sola a algunas cuestiones relacionadas con la propia interpretación, como son las referentes a la identificación de rastros de comprensión matemática en el registro escrito y a la caracterización de los usos del conocimiento matemático a partir de esos rastros: ¿cómo identificar y delimitar entre todo lo observado y registrado de la actividad matemática del estudiante los rastros de su comprensión que pueden considerarse indicadores de algún uso dado al conocimiento matemático?

Instruidos en la dialéctica inspirada por la teoría del texto de Ricœur (2002), optamos por una actitud integradora frente al dualismo cognitivo-semiótico de la interpretación de la comprensión en matemáticas e introducimos en nuestro modelo una visión extendida de la interpretación donde las dos orientaciones intervienen en fases diferentes de la propuesta interpretativa. El ciclo arranca en el plano cognitivo con el reconocimiento de la comprensión matemática como fenómeno mental, irrumpe en el ámbito semiótico con el análisis de la actividad matemática del estudiante y desemboca en una superación fenómeno-epistemológica que nos permite retornar de nuevo a la comprensión del alumno a través de los usos dados al conocimiento matemático. A continuación, delineamos los supuestos que definen este ciclo interpretativo (figura 1).

1. La comprensión es una actividad intelectual cognitiva experimentada como tal exclusivamente por quien la desarrolla.

Toda actividad matemática está propiciada por, y es consecuencia de, una actividad intelectual de carácter mental. La comprensión, tanto en su versión epistemológica, como modo de conocimiento, como en su variante ontológica, como capacidad esencial del sujeto, va a demandar unas exigencias intelectuales necesariamente vinculadas a la esfera cognitiva de quien la desarrolla.

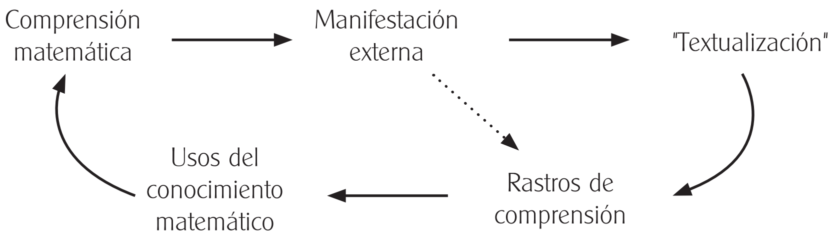
2. La comprensión es comunicable e incluye en su manifestación externa rastros interpretables.

Los fenómenos cognitivos no son radicalmente incomunicables y la exteriorización de la comprensión viene dada a través del lenguaje, medio privilegiado de transmisión de lo interno. Con base en esto, el *registro* observable generado durante el quehacer matemático se erige como la principal fuente depositaria de las expresiones o *rastros* visibles derivados de la comprensión, constituyéndose por ello en el centro de interés de nuestra propuesta interpretativa.

3. La circunscripción al registro observable, más que limitación, es una condición necesaria para la interpretación.

Una interpretación dirigida a la faceta mental de la comprensión induce a que la transición entre lo externo y lo interno resulte inevitablemente

Figura 1 Ciclo interpretativo de la comprensión en matemáticas



problemática desde el principio y suponga una limitación metodológica importante para esta vía. Proponemos una opción interpretativa distanciada provisionalmente del interés por lo mental y restringida al registro observable, lo cual permite justificar la interpretación como un requerimiento necesario para la detección y caracterización de rasgos genuinos de comprensión del conocimiento matemático en lugar de ser un condicionante limitador del acceso a la propia comprensión.

4. La interpretación demanda la textualización de todo registro observable.

El carácter contingente, temporal y dependiente de las acciones y las manifestaciones verbales constituye un obstáculo a la interpretación en sus distintas variantes. Por el contrario, la estabilidad, perdurabilidad e independencia del *registro escrito* lo hacen especialmente idóneo para desplegar en él nuestra propuesta. El paso de lo hablado a lo escrito, lejos de ser una limitación metodológica, se presenta como otra de las condiciones necesarias para la tarea interpretativa.

5. La interpretación persigue identificar los rastros de comprensión diseminados en el registro escrito y caracterizar a partir de ellos los usos del conocimiento matemático.

Aunque la comprensión y la interpretación se ejerzan sobre la mediación de un texto, rebasan el campo de lo semiótico. El hecho de que la capacidad para utilizar el conocimiento matemático dependa en buena medida de su comprensión nos obliga a situar la referencia última de la comprensión del estudiante, no ya en el registro escrito, sino en el uso del conocimiento matemático que deja entrever.

3.3. La interpretación en la práctica: pautas metodológicas

El agente intérprete debe enfrentar distintos requerimientos metodológicos a la hora de aplicar el procedimiento para la interpretación de la comprensión que se desprende de nuestro enfoque. En un primer momento, previo al episodio de interpretación, la dimensión fenómeno-epistemológica sugiere las siguientes acciones: *a)* realización de un análisis epistemológico y fenomenológico del conocimiento matemático; *b)* identificación de los elementos fenómeno-epistemológicos de éste que influyen en el nivel cognitivo y son los responsables, entre otros aspectos, de la caracterización de los alumnos en términos de comprensión; *c)* organización y selección de las situaciones y tareas matemáticas que dan sentido al conocimiento matemático con base en el resultado de los análisis previos; y *d)* garantía de que los estudiantes se enfrenten a situaciones pertenecientes a las distintas categorías surgidas del cruce de las estructuras epistemológica y fenomenológica del conocimiento matemático.

A continuación, la dimensión hermenéutica propone, tras el desarrollo del episodio de interpretación, una estrategia combinada consistente en: *e)* interpretar la comprensión de los escolares en términos de capacidad para enfrentar con éxito las situaciones planteadas; *f)* identificar y validar los rastros de comprensión matemática diseminados a lo largo del registro escrito; y *g)* revelar en estos rastros los usos dados al conocimiento matemático, empleando para ello la propia estructura fenómeno-epistemológica del conocimiento como referencia objetiva con la cual certificar tales usos.

4. INTERPRETACIÓN DE LA COMPRENSIÓN DEL ALGORITMO ESTÁNDAR ESCRITO PARA LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS NATURALES

Con el propósito de mostrar la operatividad de nuestra propuesta, describimos los pormenores de su aplicación en un caso: la interpretación de la comprensión de una pareja de estudiantes de secundaria enfrentada a la resolución de una tarea vinculada al algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales.

4.1. Selección de la tarea matemática

En Gallardo y González (2006), relatábamos la aplicación de la dimensión fenómeno-epistemológica sobre el algoritmo estándar de la multiplicación. Se determinó una estructura con tres categorías epistemológicas (*técnica*, *analítica* y *formal*) y dos fenomenológicas (*situaciones exclusivas* y *situaciones no exclusivas*) para las distintas tareas vinculadas al algoritmo. En la experiencia empírica de ahora, hacemos uso de esta estructura y planteamos a los alumnos una *situación exclusiva de uso formal* (figura 2) donde:

- El empleo del algoritmo estándar se manifiesta como la principal opción, evidente y necesaria, para la resolución de la tarea (exclusividad frente a otros conocimientos matemáticos). El estudio de las variantes para calcular 23×32 sólo es factible si previamente el estudiante ha tenido experiencias previas con el algoritmo estándar, que ahora se toma como referencia en la reflexión.
- Se precisa el uso de las *relaciones internas* que sustentan y validan el mecanismo subyacente en el algoritmo estándar. La justificación matemática de las tres variantes del cálculo 23×32 la proporcionan los mismos principios básicos que fundamentan el algoritmo (sistema

Figura 2 Situación exclusiva de uso formal del algoritmo estándar de la multiplicación

Observa las siguientes variantes utilizadas para calcular 23 × 32:

Primera variante	*Segunda variante*	*Tercera variante*
$\begin{array}{r} 23\ \times \\ \underline{\ \ 32} \\ 69\ \ \\ \underline{\ \ 46} \\ 736 \end{array}$	$\begin{array}{r} 23\ \times \\ \underline{\ \ 32} \\ 64\ \ \\ \underline{\ \ 96} \\ 736 \end{array}$	$\begin{array}{r} 23\ \times \\ \underline{\ \ 32} \\ 96\ \ \\ \underline{\ \ 64} \\ 736 \end{array}$

Pregunta 1: ¿Podrías decir qué se ha hecho en cada caso?
Pregunta 2: ¿Consideras estos procedimientos válidos o no? ¿Por qué?
Pregunta 3: ¿Qué razones matemáticas darías para justificar lo adecuado o inadecuado de estos métodos para multiplicar?

de numeración decimal posicional, propiedad distributiva del producto respecto de la suma y propiedad conmutativa).

Aunque en el plano fenómeno-epistemológico la tarea exija el uso *formal* del algoritmo, es posible que los alumnos hagan uso de las facetas *técnica* y *analítica* de este, *a priori* más próximas a sus experiencias previas con el método de cálculo. A diferencia del ámbito formal del algoritmo, las facetas técnica y analítica se centran más en las *relaciones externas* entre las componentes de la secuencia algorítmica:

- El empleo técnico se limita al establecimiento de las relaciones externas *usuales* entre los elementos básicos del algoritmo que hacen posible recorrer el procedimiento establecido en el sentido apropiado. Es el tradicional empleo mecánico o rutinario como instrumento de cálculo.
- El empleo analítico exige el análisis premeditado de la estructura y el funcionamiento externos del algoritmo, lo que conlleva el dominio de las relaciones *no usuales* que permiten recorrer la secuencia algorítmica en sentidos distintos al usual.

4.2. Configuración del escenario de interpretación

El episodio de interpretación transcurre sobre el escenario constituido por una profesora que pretende obtener información sobre la comprensión de dos alumnos inmersos en la resolución conjunta de una actividad matemática concreta. El episodio en cuestión tuvo lugar en un colegio de Cusco, Perú. Participaron Mayte (M) y Ráez (R), alumnos de quinto curso de secundaria (16-17 años). En su aula convencional y en un ambiente de trabajo usual, estos alumnos se enfrentaron conjuntamente a la tarea matemática descrita en el apartado anterior mientras el resto de compañeros desempeñaba actividades paralelas. Su profesora habitual, también autora del artículo, les presentó la tarea por escrito, les leyó el enunciado en voz alta y se limitó a indicarles la posibilidad de anotar y debatir entre ellos lo que consideraran oportuno sin límite de tiempo. Sin la intervención directa de la profesora, la discusión es dirigida por las propias preguntas planteadas en la tarea matemática. El episodio tuvo una duración aproximada de 13 minutos y 30 segundos y fue registrado en vídeo.

4.3. Rastros de comprensión

Como resultado del análisis realizado sobre fragmentos del registro escrito, procedemos a identificar los rastros de comprensión que son indicadores del uso dado al algoritmo estándar de la multiplicación. Al localizar los rastros de comprensión en las interacciones colaborativas de los dos alumnos participantes, en esta ocasión estamos interpretando la comprensión matemática colectiva (Martin y Towers, 2003) desplegada en el episodio. El propio uso del algoritmo será caracterizado en una siguiente etapa a partir de estos rastros.

Fragmento I. Reconocimiento externo de las tres variantes del algoritmo

El episodio se inicia con un recorrido comparado por las tres variantes buscando encontrar el algoritmo estándar.

> **M2:** *Ya. Claro, o sea, la original podríamos decir que es ésta* [la tercera variante] *porque a ver: éste... 2 por 3, 6; 2 por 2... ¡ah, no!*
> **R5:** *¡Todo está mal!*
> **M6:** *Los tres... ¡No están mal! Porque en realidad es una buena multiplicación, simplemente que están... este... canjeados, ¿no es cierto?*
> **R6:** *Claro, canjeados.*

Los estudiantes conocen la disposición de los productos parciales en el algoritmo estándar y la utilizan como referencia para identificar y comprobar la corrección del procedimiento seguido en cada método alternativo (M2). Además, perciben que un mismo resultado correcto (el 736) se obtiene de aplicar distintas secuencias de cálculo no estándar (M6, R6). Por ello, comienzan a reconocer en el algoritmo dos aspectos diferentes relacionados: *a)* el *resultado*, tomado como criterio de corrección de la multiplicación, y *b)* el *procedimiento* que conduce al resultado y que varía según el caso.

Fragmento II. Diferencias en la disposición espacial de las cifras

El análisis de las variantes prosigue en el nivel externo. Los alumnos centran la atención en los espacios en blanco presentes en los resultados parciales de estas variantes.

M7: *Entonces, este..., o sea, empezando porque hay diferencias entre los espacios: acá, acá; acá, acá y acá, acá* [redondea los dos espacios o "huecos" en los resultados parciales]. *Hay diferencias, ¿no? Hay dos tipos de espacios.*
R8: *Ya, pero este tipo de espacio es el normal* [indicando la tercera variante].
M8: *Claro, o sea, en el espacio, éste* [tercera variante] *sería el correcto.*

Para M y R, las tres variantes no son equivalentes en cuanto a la disposición espacial de las cifras en los resultados parciales (M7). Reconocen dos tipos: *a)* la disposición estándar, considerada correcta (tercera variante) y *b)* otra no usual donde varía el orden (primera y segunda variantes). De sus comentarios se desprende que ambos estudiantes catalogan el tercer procedimiento como menos incorrecto por conservar al menos la disposición espacial del algoritmo estándar (R8, M8).

Fragmento III. Reconocimiento de la propiedad distributiva

La discusión se traslada ahora al ámbito de las propiedades y relaciones internas que fundamentan el algoritmo estándar.

M10: *En la multiplicación ninguno de los tres está correcto.*
R12: *Sí, está al revés.*
M13: *... de todas formas es una multiplicación. O sea, todos los números se multiplican, sólo que van invirtiendo y jugando con los centros.*

Aunque ambos afirmen que los tres procedimientos de cálculo son incorrectos, M evidencia como rasgo correcto en las variantes el hecho de que todas las cifras se multiplican entre sí (M13), lo que nos hace pensar que intuye de alguna manera la propiedad distributiva característica del algoritmo estándar.

Fragmento IV. El orden estándar obstaculiza identificar la propiedad conmutativa

Durante la sistematización de la respuesta a la primera pregunta, los comentarios se dirigen a destacar el cambio de orden en números y espacios producido en los resultados parciales.

> **M19:** *¿Podrías decir qué se ha hecho en cada caso? Se ha jugado con el orden de los números y el orden de los espacios.*
> **R20:** *Sí. Fuera de eso, que la multiplicación del centro no concuerda con... No, no concuerda la multiplicación.*
> **M20:** *Claro. Ya, por eso. Se ha jugado con el orden de los números.*
> **R22:** *Alterando... sí, el producto del medio. Que no concuerda con la multiplicación que se tiene que hacer.*

Identificar pero no aceptar como algo correcto la manipulación de los centros (resultados parciales y espacios) (M19, R22) nos dice que los alumnos no están al tanto de la propiedad conmutativa responsable de la validez matemática de las tres variantes. La importancia otorgada al orden estándar parece ser un obstáculo a la hora de reconocer dicha conmutatividad.

Fragmento V. Búsqueda de lo correcto en las variantes y dependencia al orden estándar

Con el propósito de responder a la segunda pregunta, el análisis de las tres variantes continúa en el plano externo con la delimitación de aquellas partes y fases del cálculo que los alumnos consideran correctas por su analogía con las del algoritmo estándar.

> **M24:** *Yo no estoy de acuerdo porque creo que te complican demasiado. Además, de una u otra forma puede ser que este resultado* [señalando al resultado final de la primera variante] *salga igual, pero... no hay forma correcta para hacerlo.*
> **R26:** *Si sumas, lo que está acacito es una suma normal* [señala la suma de los productos parciales de la tercera variante].
> **M27:** *Claro y va a salir el mismo número siempre.*

R27: *Pero en acá es una multiplicación que no concuerda* [señala los productos parciales de la tercera variante].

M28: *Claro, en eso estamos de acuerdo. De todas formas, el resultado está bien. En todos, el resultado es el mismo, entonces la multiplicación es la misma. El problema está en el centro.*

Se concluye que la suma, el resultado y la multiplicación total son correctos en cada caso (R26, M28), aunque no el procedimiento seguido para el cálculo de los productos parciales (R27, M28). A pesar del reconocimiento de varios elementos correctos por su concordancia con el algoritmo estándar, persisten en la idea de que los centros son inadecuados y, por tanto, las variantes son incorrectas (M24). Una vez más, el orden estándar ejerce su influencia sobre otros aspectos caracterizadores del algoritmo, como el hecho de proporcionar siempre resultados correctos.

Fragmento VI. Delimitación de tres componentes en el algoritmo: multiplicación, procedimiento y resultado

En este punto, ambos estudiantes sienten la necesidad de efectuar la multiplicación 23×32 aplicando el algoritmo estándar.

R30: *23 por 32. 3 por 2, 6; 2 por 2...*

M31: *2 por 2, 4.*

R31: *3 por 3, 9 y 3 por 2, 6, ¿no?* [Ahora suman]. *6; 9 más 4, 5. Ah..., 3, 7.*

M32: *Sí, está bien. O sea, la multiplicación es válida y el resultado... es válido. Ahora, el problema es el procedimiento.*

R34: *Por eso, es válido el resultado y... la multiplicación, ¿no es cierto?*

R37: *Mas el procedimiento está mal.*

M37: *Entonces, el procedimiento está mal... mal desarrollado, mal efectuado.*

R38: *Mal planteado, mal desarrollado.*

M38: *Mal planteado... justamente porque alteran el orden de los números.*

Esta nueva comprobación (R30, M31, R31) sirve para confirmar que tanto la multiplicación como el resultado son válidos en las variantes (M32, R34), pero no el procedimiento a causa del orden (R37, M37, M38). Como consecuencia, llegan a intuir en el algoritmo tres componentes relacionados: la *multiplicación* en sí, compuesta de *procedimiento* y *resultado*.

Fragmento VII. Reconocimiento de la propiedad conmutativa

A partir de aquí, el diálogo se centra en la tercera pregunta.

> **R45:** *Si esto estuviera arriba o abajo* [señala los resultados parciales de la segunda variante], *el resultado sería igual, solamente que el problema es que no puedes jugar tan... variando los éstos.*
> **R46:** *Matemáticamente... está bien el resultado, eso sí. No hay duda.*
> **M46:** *Ya. Podemos decir: el orden de los factores no altera el producto, este... en este caso, si jugamos con el orden de los números y no ponemos cada uno en una posición correcta, éste... sí puede salir el resultado que queremos.*

R continúa manteniendo que las cifras de los productos parciales no se pueden cambiar, aun cuando el resultado final sea correcto, en una muestra más de que el orden estándar del procedimiento se impone al resultado (R45). Sin embargo, casi simultáneamente se observa un primer reconocimiento de la propiedad conmutativa por parte de M (M46), oculto hasta entonces, pero evidenciado ahora por la aceptación conjunta de que el resultado en las tres variantes es correcto (R46). Finalmente, aceptan que distintos procedimientos de cálculo con cambios en el orden de las cifras pueden derivar en un mismo resultado correcto (M46).

Fragmento VIII. Dos tipos de órdenes en el algoritmo

Ahora se ven obligados a encontrar una justificación para el dilema *distintos procedimientos–mismo resultado*.

> **M48:** *A pesar de que han jugado con los órdenes, lo han puesto ordenadamente para que salga este resultado después* [el 736]. *Porque si lo hubieran puesto al "champazo", o sea, podría haber salido digamos...*
> **R50:** *Otro número, otro resultado. Mas sale este número* [el 736].

M50: *Claro. De todas formas, este... es importante conservar un orden en el desarrollo de una multiplicación.*

Una solución provisional la encuentran sugiriendo dos tipos de órdenes no estándar en el procedimiento de multiplicar: *a)* uno más "arbitrario" que proporcionaría resultados distintos y *b)* otro más "ordenado" que garantiza la corrección del resultado final. Para ellos, las tres variantes analizadas utilizan órdenes del segundo tipo. Pero a pesar de todo, sucumben de nuevo al orden estándar al persistir en la importancia de fijar un mismo orden mantenido en el desarrollo de una multiplicación (M50).

Fragmento IX. Dependencia al orden estándar

A modo de conclusión, los comentarios finales del episodio se destinan a subrayar la preeminencia del procedimiento sobre cualquier otro aspecto del algoritmo.

R56: *Razones matemáticas: está mal planteada. Es lo que hemos dicho, está mal desarrollada la multiplicación por más que sea el resultado... bien.*
M56: *Claro. Podríamos decir, ¿no?: es una adecuación válida en el sentido de que han sido ordenados... con el propósito de conseguir el mismo resultado. Entonces, ahí sí es una adecuación válida. Pero cuando no es válida es si lo hubieran hecho al "champazo", por decirlo así, no funcionaría.*
M59: *... los principios de la multiplicación no son así, no puedes andar jugando con el orden de las cosas. [...] hay una estructura de desarrollo que se debe aplicar en la multiplicación.*
R61: *Y es para facilitarte las cosas.*
M61: *Claro.*
R63: *¡Eso es lo que pasó en ese problema!* [risas] *No tengo el orden por más que el resultado sea lo mismo.*

En principio, para los alumnos las variantes son "ordenadas" al haberse impuesto un orden al proceder que, aun siendo distinto al estándar, permite llegar al resultado correcto (M56). Sin embargo, esto no es suficiente para poder afirmar que son correctas. La justificación la encuentran en el orden estándar, que no se cumple (M59) y, como consecuencia, los cálculos se complican innecesariamente (R61, R63).

4.4. Usos y comprensión del algoritmo

En esta fase recobra relevancia la dimensión fenómeno-epistemológica para trascender al texto y enfrentarnos al conocimiento matemático puesto en acción. Se trata de *a)* identificar a lo largo del episodio descrito el uso que los estudiantes van haciendo del algoritmo estándar en sus distintas modalidades de empleo técnico, analítico y formal, y *b)* caracterizar las relaciones más destacadas que estos alumnos establecen entre estas modalidades de empleo. En el cuadro 2 se exponen los indicios que observamos de estos usos y las relaciones en los rastros de comprensión detectados en los fragmentos de actividad matemática.

En Gallardo y González (2006) dimos unas primeras muestras de la presencia de las facetas técnica, analítica y formal de la comprensión del algoritmo de la multiplicación en diferentes alumnos y mediante distintas tareas. Con el episodio de ahora damos un paso más en la interpretación de la comprensión del algoritmo, al evidenciar no sólo la presencia, sino también las relaciones y la evolución de estas tres facetas en unos mismos estudiantes a lo largo de la resolución de una situación problemática.

La comprensión técnica se manifiesta cuando los alumnos recorren de manera efectiva la secuencia algorítmica estándar (rastros [1] y [9]) y cuando contemplan al orden convencional como una característica inalterable del algoritmo que supera en importancia a otros aspectos de éste (rastros [6], [8], [11], [14] y [16]). La comprensión analítica, por su parte, se pone de manifiesto con regularidad mediante el reconocimiento de las distintas partes del algoritmo (rastros [2], [3], [5], [7], [10], [13] y [15]). Cabe destacar que, a lo largo del episodio, apreciamos una evolución positiva en esta faceta de comprensión, que se inicia con la diferenciación básica entre procedimiento y resultado, prosigue con la identificación de un mayor número de elementos constituyentes del algoritmo (multiplicación, procedimiento, suma, resultado) y llega incluso a la justificación de distintos tipos de órdenes en el procedimiento. Finalmente, la comprensión formal de los alumnos se hace presente, aunque en menor medida, en el reconocimiento de las propiedades distributiva y conmutativa que fundamentan el algoritmo estándar (rastros [4], [12], [13] y [15]).

Nuestra interpretación pone en evidencia que las facetas de comprensión técnica, analítica y formal no son independientes para los estudiantes, sino que aparecen estrechamente relacionadas al utilizar el algoritmo estándar en la resolución de la tarea. Uno de los hechos habituales en la utilización del

Cuadro 2 Usos y relaciones en las facetas técnica, analítica y formal del algoritmo estándar de la multiplicación

Fragmentos	Rastros de comprensión	Usos del algoritmo	Relaciones entre facetas
Fragmento I	[1] Comprobar las variantes por comparación con el algoritmo estándar.	Técnico	
	[2] Reconocer en el algoritmo dos elementos diferentes: procedimiento y resultado.	Analítico	
Fragmento II	[3] Catalogar dos tipos de disposiciones en las cifras y espacios de los resultados parciales.	Analítico	
Fragmento III	[4] Percibir la propiedad distributiva en el algoritmo.	Formal	
Fragmento IV	[5] Corroborar la manipulación en el orden de las cifras y espacios en las variantes.	Analítico	
	[6] No aceptar la validez matemática de dicha manipulación por no coincidir con el orden estándar.	Técnico	Interferencia de la faceta técnica sobre la formal
Fragmento V	[7] Diferenciar distintos elementos en el algoritmo: la multiplicación en sí, los centros, la suma, el resultado.	Analítico	
	[8] Insistir en lo inadecuado de los procedimientos (no son como el estándar) a pesar de los resultados correctos.	Técnico	Interferencia de la faceta técnica sobre la formal

Fragmentos	Rastros de comprensión	Usos del algoritmo	Relaciones entre facetas
Fragmento VI	[9] Efectuar 23 × 32 con el algoritmo estándar.	Técnico	
	[10] Diferenciar tres elementos en las variantes: la multiplicación (correcta) compuesta de procedimiento (incorrecto) y resultado (correcto).	Analítico	Fomento de la faceta analítica a partir de la técnica
Fragmento VII	[11] Anteponer el orden estándar en los productos parciales a la corrección del resultado.	Técnico	Interferencia de la faceta técnica sobre la formal
	[12] Intuir la propiedad conmutativa en el algoritmo.	Formal	Fomento de la faceta formal a partir de la técnica
Fragmento VIII	[13] Sugerir dos tipos de órdenes no estándar al multiplicar. Uno garantiza un mismo resultado correcto, el otro no.	Analítico-formal	
	[14] Retornar al procedimiento estándar por la importancia de seguir siempre un mismo orden al multiplicar.	Técnico	
Fragmento IX	[15] Aceptar que procedimientos no estándar "ordenados" pueden generar resultados correctos.	Analítico-formal	
	[16] Afirmar que esto último no es suficiente para concluir que las variantes son correctas.	Técnico	Interferencia de la faceta técnica sobre la analítica-formal

conocimiento matemático es precisamente el de su elección previa entre otras opciones de resolución. Entendemos que, durante la toma de decisión requerida en esta etapa concreta, se genera un escenario de influencias positivas (fomentos) y negativas (interferencias) entre conocimientos, donde emergen los distintos vínculos entre ellos que llegan a determinar el uso posterior de tales conocimientos en la resolución de la situación dada. En esta ocasión, hallamos indicios de estas dos relaciones significativas entre las facetas, en apariencia contradictorias. Como primera relación, la dependencia del orden estándar pone en evidencia la *interferencia* en la comprensión del algoritmo que, de modo recurrente, ejerce la faceta técnica sobre la formal. Los rastros [6], [8], [11] y [16] son claros ejemplos de cómo la persistencia de la comprensión técnica impide transitar de forma flexible hacia otros aspectos y usos del algoritmo característicos de la comprensión formal. En cambio, la segunda relación apunta más bien en sentido contrario, hacia el *fomento* o desarrollo de las facetas analítica y formal por impulso de la técnica. Los rastros [10] y [12] dan cuenta de ello. Mediante una nueva comprobación del algoritmo estándar, se consolida la idea de tres componentes relacionadas (multiplicación, procedimiento y resultado) y el hecho constatado de que el resultado correcto se mantiene en las tres variantes hace intuir la propiedad conmutativa.

Consideramos que la variedad de facetas y matices identificados sobre la comprensión del algoritmo estándar de la multiplicación en este episodio concreto también pone de manifiesto el potencial interpretativo de nuestro modelo en el nivel genérico. Así, la interpretación realizada en el seno del algoritmo estándar da muestras, por una parte, de la complejidad inherente a la comprensión de los algoritmos aritméticos y los procedimientos de cálculo en general. Y por otra, de la posibilidad de profundizar en el estudio de la comprensión en matemáticas con propuestas que renuevan y amplían la conocida dualidad entre lo conceptual y lo procedimental, propia de modelos más tradicionales.

5. CONSIDERACIONES FINALES

Nos hemos aproximado en este trabajo a una de las cuestiones abiertas presentes en el estudio de la comprensión a la que se viene enfrentando con regularidad la investigación en educación matemática. Nos referimos al problema de la interpretación, por parte de un agente externo (profesor o investigador), de la comprensión matemática de los estudiantes a partir de la actividad que manifiestan cuando se enfrentan a situaciones problemáticas que requieren el uso del conocimiento matemático objeto de comprensión.

En línea con otras contribuciones integradoras (Duval, 2006), hemos argumentado aquí en favor de una visión interpretativa que conecta las orientaciones cognitiva y semiótica con objeto de extender, en lo posible, el campo operativo de la interpretación. Nuestra propuesta incluye una dimensión fenómeno-epistemológica donde se facilita un procedimiento operativo para la identificación y organización de situaciones matemáticas de utilidad para la práctica docente, que consideramos compatible con otros procedimientos de valoración multifacética basados en el análisis del conocimiento matemático (Godino, 2002; Niemi, 1996). La novedad de nuestra contribución consiste en partir de conocimientos matemáticos sobre los cuales exigimos un análisis epistemológico y fenomenológico para determinar conjuntos reducidos de situaciones representativas pertinentes para ser empleadas en labores de diagnóstico y valoración de la comprensión. Además, la reflexión sobre la comprensión transcurre en términos de posibilidad de uso del conocimiento matemático en tales situaciones.

La dimensión fenómeno-epistemológica se ve fortalecida con una segunda dimensión hermenéutica, donde la interacción en el aula y la toma de conciencia de la actividad matemática por parte de los estudiantes configuran un escenario de interpretaciones mediadas por el contexto social y cultural (Brown, 1996; Planas, 2006). Esta dimensión nos permite gestionar desde una posición más inclusiva la complejidad inherente a la interpretación de la comprensión en matemáticas. Por ello, unimos lo expuesto a otras contribuciones hermenéuticas (Brown, 2001) para responder positivamente desde el contexto específico de la valoración a la cuestión de la potencialidad del conocimiento hermenéutico para la educación matemática.

Con la aplicación del modelo al episodio del algoritmo estándar de la multiplicación, hemos pretendido mostrar en la práctica su potencialidad como referencia objetiva para la interpretación de la comprensión a partir del uso visible del conocimiento matemático. Aspiramos a aportar un instrumento operativo con potencialidad descriptiva y prescriptiva para gestionar la actividad interpretativa que se ejerce regularmente en el aula de matemáticas, una labor compleja que situamos en el núcleo de la discusión sobre los problemas fundamentales de la educación matemática.

Nuestro modelo es una propuesta en desarrollo cuya configuración admite ser mejorada y ampliada. Quedan cuestiones abiertas por resolver, como profundizar en la visión funcional de la comprensión presentada aquí a través del estudio de su relación con otras nociones cognitivas de similar complejidad, como el aprendizaje o la competencia matemática. En lo que respecta a la dimensión fenómeno-epistemológica, con vistas a identificar los límites de su aplicabilidad, resultan pertinentes nuevos estudios centrados en conocimientos matemáticos más complejos que el algoritmo analizado en esta ocasión. En la dimensión hermenéutica, al situar la referencia última de la comprensión en el uso del conocimiento matemático, se hace preciso responder a la cuestión ontológica de la existencia de los objetos matemáticos (Font, Godino y Gallardo, 2013).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Brown, T. (1996), "Towards a Hermeneutical Understanding of Mathematics and Mathematical Learning", en P. Ernest (ed.), *Constructing Mathematical Knowledge: Epistemology and Mathematical Education*, Londres, Reino Unido, Routledge Falmer, pp. 141-150.

______ (2001), *Mathematics Education and Language. Interpreting Hermeneutics and Post-Structuralism*, Dordrecht, Holanda, Kluwer Academic Publishers.

______ (2008), "Making Mathematics Inclusive: Interpreting the Meaning of Classroom Activity", *Philosophy of Mathematics Education Journal*, núm. 23, pp. 1-18. Recuperado de http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome23/index.htm

Dörfler, W. (2006), "Inscriptions as Objects of Mathematical Activities", en J. Maasz y W. Schoeglmann (eds.), *New Mathematics Education Research and Practice*, Rotterdam, Holanda, Sense Publishers, pp. 97-111.

Duffin, J. y A. Simpson (2000), "A Search for Understanding", *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 18, núm. 4, pp. 415-427.

Duval, R. (2006), "A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 61, núms. 1-2, pp. 103-131.

Font, V., J.D. Godino y B. D'Amore (2007), "An Onto-semiotic Approach to Representations in Mathematics Education", *For the Learning of Mathematics*, vol. 27, núm. 2, pp. 2-7.

Font, V., J.D. Godino y J. Gallardo (2013), "The Emergence of Objects from Mathematical Practices", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 82, núm. 1, pp. 97-124.

Gallardo, J. y J.L. González (2006), "Assessing Understanding in Mathematics:

Steps Towards an Operative Model", *For the Learning of Mathematics*, vol. 26, núm. 2, pp. 10-15.

Godino, J.D. (2002), "Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 22, núms. 2-3, pp. 237-284.

Godino, J.D., C. Batanero y V. Font (2007), "The Onto-semiotic Approach to Research in Mathematics Education", *The International Journal on Mathematics Education ZDM*, vol. 39, núms. 1-2, pp. 127-135.

Goldin, G. (2002), "Representation in Mathematical Learning and Problem Solving", en L.D. English (ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*. Mahwah, NJ, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 197-218.

Hiebert, J. y T.P. Carpenter (1992), "Learning and Teaching with Understanding", en D.A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Nueva York, NY, MacMillan, pp. 65-97.

Kieran, C. (1994), "Doing and Seeing Things Differently: A 25-year Retrospective of Mathematics Education Research on Learning", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 25, núm. 6, pp. 583-607.

Llewellyn, A. (2012), "Unpacking Understanding: The (re)Search for the Holy Grail of Mathematics Education", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 81, núm. 3, pp. 385-399.

Martin, L.C. y J. Towers (2003), "Collective Mathematical Understanding as an Improvisational Process", en N.A. Paterman, B.J. Dougherty y J. Zilliox (eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Honolulu, HI, PME, vol. 3, pp. 245-252.

Morgan, C. y A. Watson (2002), "The Interpretative Nature of Teacher's Assessment of Students' Mathematics: Issues for Equity", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 33, núm. 2, pp. 78-111.

Niemi, D. (1996), "Assessing Conceptual Understanding in Mathematics: Representations, Problem Solutions, Justifications, and Explications", *The Journal of Educational Research*, vol. 89, núm. 6, pp. 351-363.

Planas, N. (2006), "Modelo de análisis de videos para el estudio de procesos de construcción de conocimiento matemático", *Educación Matemática*, vol. 18, núm. 1, pp. 37-72.

Rico, L. (2009), "Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática", *PNA*, vol. 4, núm. 1, pp. 1-14.

Ricœur, P. (2002), *Del texto a la acción*, Ciudad de México, México, Fondo de Cultura Económica.

Tahta, D. (1996), "On Interpretation", en P. Ernest (ed.), *Constructing Mathematical Knowledge: Epistemology and Mathematical Education*, Londres, Reino Unido, Routledge Falmer, pp. 125-133.

DATOS DE LOS AUTORES

Jesús Gallardo Romero
Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Didáctica de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales, Facultad de Ciencias de la Educación, Campus de Teatinos, Universidad de Málaga, Málaga, España
gallardoromero@telefonica.net

José Luis González Marí
Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Didáctica de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales, Facultad de Ciencias de la Educación, Campus de Teatinos, Universidad de Málaga, Málaga, España
gmari@uma.es

Verónica Aurora Quintanilla Batallanos
Colegio Pukllasunchis, Cusco, Perú
Departamento de Didáctica y Organización Escolar, Facultad de Ciencias de la Educación, Campus de Teatinos, Universidad de Málaga, Málaga, España
veronicaquintanilla@uma.es