teorema
Vol. XVIII/2, 1999, pp. 49-61

El argumento de indispensabilidad en matemáticas

Anastasio Alemán Pardo

ABSTRACT

The Indispensability Argument has been used as one of the strongest arguments in support of realistic conceptions in mathematics. In this paper we are concerned with (i) showing the kernel of the argument (ii) criticising a version of the argument which depends on the notion of empirical confirmation, and (iii) criticising a new and recent version of the argument by M. D. Resnik in which he attempts to avoid the difficulties involved in the notion of confirmation.

RESUMEN

El argumento de indispensabilidad se ha venido empleando como uno de los argumentos más fuertes en favor de concepciones realistas de la matemática. En este artículo nos ocuparemos de: (i) exponer el núcleo del argumento; (ii) criticar una versión del argumento que descansa en la noción de confirmación empírica y (iii) criticar la reciente y nueva versión del argumento, debida a M. D. Resnik, en un intento por evitar las dificultades envueltas en el empleo de la noción de confirmación.

I

Durante los últimos años el denominado 'argumento de indispensabilidad' se ha convertido en uno de los argumentos más fuertes en favor de posiciones realistas tanto en las ciencias empíricas como en las no empíricas (al menos *prima facie*) como la matemática. En mi opinión la razón de este estado de cosas procede del hecho de que el realista platónico se encuentra ante una seria dificultad si intenta probar la existencia de entidades matemáticas, independientes de las capacidades o estructuras cognoscitivas del agente, apelando a alguna forma de conocimiento directo —percepción empírica (P. Maddy) o intuición intelectual (Gödel)— de tales objetos[1]. Así que en un intento de obviar, o al menos soslayar, este importante problema, se apela al argumento de indispensabilidad como una vía alternativa e indirecta de probar la existencia de entidades matemáticas.

Una de las versiones de este argumento (que examiné en Alemán (1995), pp. 46 y ss.) podría formularse así: Constituye un hecho obvio que una ciencia empírica como la física, que no sólo ofrece *explicaciones* de los fenómenos que acontecen en nuestro entorno, sino que, sobre todo, permite *predecir* con envidiable exactitud la ocurrencia de multitud de diferentes tipos de fenómenos, realiza esta tarea con la indispensable ayuda de la matemática.

Indispensable porque no parece que pueda haber modo alguno, por ejemplo, de predecir las posiciones de los planetas en el firmamento, o de construir y enviar una nave espacial a la Luna, sin el empleo de complejos cálculos matemáticos.

Por otra parte, de este hecho se infiere (de modo nada obvio) que la matemática tiene que ser verdadera, pues de lo contrario ¿cómo podríamos explicar su aplicación en teorías físicas que permiten predecir con éxito los fenómenos? Ahora bien, continúa el argumento, si la matemática es verdadera, y puesto que es un hecho cierto que en ella cuantificamos sobre entidades matemáticas (números, funciones, conjuntos, etc.), entonces tales entidades matemáticas tienen que existir.

Salta a la vista que el paso anterior, que procede de la cuantificación sobre objetos matemáticos a la afirmación de la existencia de éstos, no es otra cosa que la aplicación del conocido criterio ontológico de Quine. Ha sido Putnam [Putnam (1972), p. 57] quien con más claridad ha señalado el vínculo entre el argumento de indispensabilidad y el criterio ontológico de Quine:

La cuantificación sobre entidades matemáticas es indispensable para la ciencia, tanto para la ciencia formal, como para la física; por consiguiente, deberíamos aceptar tal cuantificación; pero esto nos compromete a aceptar la existencia de las entidades matemáticas en cuestión. Este tipo de argumento procede, por supuesto, de Quine, quien, desde hace años, subrayó tanto la indispensabilidad de la cuantificación sobre entidades matemáticas, como la deshonestidad intelectual de negar la existencia de lo que uno presume diariamente.

La fuerza de este argumento es tal que un reconocido antirrealista como H. Field (1980 y 1989), no parece ver otro modo de bloquear la inferencia que conduce a la conclusión, de que existen las entidades matemáticas, que intentando mostrar que la matemática es *dispensable* —teóricamente al menos— en la teoría física.

II

Ahora bien, en la versión anterior del argumento de indispensabilidad hay un paso crítico: el que va de la verdad de la teoría a la existencia de las entidades postuladas por la teoría; la existencia de las entidades postuladas se deduce (vía criterio ontológico de Quine) de la verdad de la teoría. De este modo si logramos probar la verdad de la teoría habremos demostrado, por *modus ponens*, la existencia de las entidades inicialmente presupuestas.

Pero el problema ahora es nada menos que el de probar la verdad de la teoría física que cuantifica sobre entidades matemáticas. Y ocurre que desde un punto de vista realista la noción de verdad de una teoría empírica no es reductible a nociones epistémicas como 'creencia justificada'; o metodológicas como 'confirmación', pues como advierte Putnam [1979a, p. 209], desde tal punto de vista siempre tiene buen sentido decir "según toda la evidencia disponible T, no obstante T no es (o puede no ser) verdadera" o "T ha sido verificada, no obstante T es (o puede ser) falsa". Estamos pues ante una noción de verdad trascendente a la experiencia y, en esta medida, la experiencia no puede probar la verdad de la premisa que necesitamos para inferir la existencia de las entidades matemáticas.

III

Un intento de superar la anterior dificultad consistiría en debilitar el argumento anterior sustituyendo en él la noción trascendente de verdad por la más manejable de confirmación, de modo que ahora consideraríamos que la existencia de las entidades matemáticas estaría tan confirmada como lo estuviera la teoría física que cuantifica sobre ellas. Y puesto que constituye un hecho que nuestras actuales teorías físicas se hallan confirmadas (aunque sea parcialmente) por la mejor evidencia disponible, igualmente se encontrará confirmada nuestra creencia en la existencia de entidades matemáticas.

Sin embargo, en esta nueva forma del argumento aparece una nueva dificultad relacionada con la noción de confirmación que sustituye a la noción de verdad. La dificultad procede de que si contamos las confirmaciones de una teoría empírica como confirmaciones de la teoría matemática que incorpora entonces deberíamos aceptar, simétricamente, que las disconfirmaciones de una teoría empírica puedan contar también como disconfirmaciones de la teoría matemática incorporada en ella. Pero es el caso que nunca contamos (no podemos contar) los fracasos predictivos de una teoría empírica como disconfirmando (ni aun parcialmente) la teoría matemática en ella incorporada. Pues si hiciéramos esto, es decir, si al disconfirmar una teoría empírica contáramos tal fracaso como una disconfirmación de la teoría matemática incorporada en ella entonces nos veríamos conducidos a una situación inaceptable: Sean T_1 y T_2 dos teorías físicas rivales, formuladas en el lenguaje común de la aritmética ordinaria A, que implican respectivamente predicciones incompatibles sobre la posición de determinado cuerpo celeste en un momento dado. Así supongamos que T_1 implica E y que T_2 implica no-E. Supongamos además que las observaciones relevantes permiten establecer que

E es el caso. Si ésta fuera la situación entonces tendríamos que decir que *E* confirma a T_1 y disconfirma a T_2. Pero si *E* confirma a T_1, entonces, de acuerdo con el argumento que criticamos, *E* confirma a *A*; pero, puesto que *E* disconfirma a T_2, *E* disconfirma a *A*; luego tendríamos que concluir que *E* confirma y disconfirma a *A*.

El problema es pues que no podemos considerar que la matemática resulta confirmada por las confirmaciones empíricas (aunque sean parciales) de la teoría física que la incorpora sin tener que admitir que también podría resultar disconfirmada por los fracasos predictivos de la teoría física, y esto último resulta inaceptable aún por los que apelan a este tipo de argumento. Incluso Quine, quien durante años ha defendido que no habría diferencia significativa de naturaleza epistemológica entre matemáticas y física —por ejemplo, en "Dos dogmas" (incluido en Quine (1980), p. 42)— ha venido a reconocer explícitamente en su último libro que "la matemática carece de contenido empírico" [Quine (1995), p. 53][2].

En resumen, esta última versión del argumento de indispensabilidad que substituye la noción de verdad por la más manejable de confirmación[3] a fin de evitar las dificultades que entrañaba aquella noción se ve envuelto en nuevas dificultades que dejan al argumento incapaz de probar aquello que se pretendía, v.g., la existencia de entidades matemáticas independientes de la mente humana.

IV

En un reciente trabajo M. D. Resnik [Resnik (1995a)] ha denominado "Confirmational Indispensability Argument" [*op. cit*., p. 166] a una versión del argumento de indispensabilidad que coincide en sus líneas esenciales con la que critiqué en Alemán (1995) y que hemos resumido a lo largo de las páginas precedentes. En el mencionado trabajo Resnik se muestra bien consciente de las dificultades envueltas en esta versión del argumento (no tanto de aquellas que surgen al apelar a la noción de verdad cuanto de aquellas debidas al empleo de la noción de confirmación empírica) y parte de su propósito es ofrecer una nueva versión del argumento que no dependiendo de la verdad, o de la confirmación, de las teorías científicas que incorporan a la matemática en ellas [*op. cit*., p. 169] logre sin embargo demostrar que la matemática es verdadera. O, dicho de otro modo, lo que pretende mostrar es que aun admitiendo la existencia de teorías científicas falsas, refutadas, o meramente disconfirmadas, hemos de admitir que la matemática es verdadera. A esta última versión del argumento Resnik la denomina "Pragmatic Indispensability Argument" [*op. cit*., p. 169] y lo resume en ocho tesis divididas en dos partes de las que reproducimos a continuación las que componen la segunda y más importante parte:

> 4. Estamos justificados en hacer ciencia.
> 5. El único modo que conocemos de hacer ciencia comporta [*involve*] extraer conclusiones desde y dentro de la ciencia.
> 6. Estamos justificados en extraer conclusiones desde y dentro de la ciencia sólo si estamos justificados en tomar como verdadera a la matemática empleada en la ciencia.
> 7. Así que estamos justificados en tomar a la matemática como verdadera.
> 8. Así que la matemática es verdadera.

Aunque el argumento concluye aparentemente en (8) no debemos olvidar que la otra parte del objetivo de Resnik es probar la existencia (independiente de nuestras teorías y capacidades o estructuras cognitivas) de los objetos matemáticos tales como números, funciones o conjuntos; en una palabra, se trata de probar el realismo matemático [*op. cit.*, p. 174]. El paso desde (8) a la tesis realista puede efectuarse apelando al criterio ontológico de Quine[4]. Sin embargo no es mi propósito en estas páginas examinar este último paso sino que comenzaré por centrar mi atención en el llamativo salto que hay entre (7) y (8); salto que el propio Resnik ha sido el primero en advertir [*op. cit.*, p. 172].

V

El salto se produce, como el propio Resnik reconoce, entre estar justificado en *considerar* o *creer*, verdadera a la matemática y que la matemática sea (de hecho) verdadera. Resnik pretende justificar este salto mediante el siguiente argumento:

> Así que el salto que estamos intentando cumplimentar es el que hay entre estar justificado al creer algo y su ser verdadero. Verdad aquí es verdad desentrecomillada, así en el caso de un enunciado particular *p*, estamos intentando cubrir el salto entre estar justificado en creer que *p*, y *p*. No hay incoherencia en decir de algún otro que está justificado en creer que *p*, pero no *p*. Pero hay una clase de incoherencia (¿una incoherencia pragmática?) en reconocer que uno está justificado en creer que p mientras se niega p. Y esto, aduzco, apoya [*supports*] la inferencia: estamos justificados en creer que *p*, por consiguiente *p* [*op. cit.*, p. 172].

En este argumento se encuentran mezcladas algunas afirmaciones claramente aceptables como un no menos claro *non sequitur*. En cuanto a las primeras, resulta patente que si alguien tiene una creencia justificada en que *p* es el caso y al propio tiempo niega que *p* sea el caso está siendo incoherente de algún modo; esto es, consideraríamos que hay una incoherencia entre las afirmaciones (realizadas por la misma persona), "creo justificadamente que *p* es el caso" aunque "no-*p*". Pero el punto crucial aquí es que no hay ninguna inconsistencia entre la afirmación "creo justificadamente que *p*" y el hecho, independiente de mi creencia, de que sea el caso que no p, y es precisamente esta posibilidad la que produce el *non sequitur* entre estar justificado en creer que p es el caso y deducir de aquí que p es el caso. (Estaba justificado en creer que mi décimo de la lotería era el premiado, lo había cotejado y coincidía exactamente con el que indicaba el periódico como premiado, pero, ¡ay!, ¡había una imperdonable errata en el número indicado por el maldito periódico![5]). Además, si admitimos con Resnik que no hay incoherencia en decir de *algún otro* que está justificado en creer que *p*, pero no-*p*, entonces basta reparar en que ese *otro* es *cualquier* otro (incluido el que habla, pues cualquier otro puede decir lo mismo de él) para apreciar que nadie se encuentra a salvo de la posibilidad de estar justificado en *creer* que *p* es el caso y que, en realidad, *p* no sea el caso.

Si la inferencia hubiera sido meramente desde "creo (o creemos) justificadamente que *p*" a la más modesta conclusión "creemos que *p*" o incluso "creemos que *p* es verdadero" la inferencia habría sido claramente inobjetable; pero a Resnik no le sirven tan modestas conclusiones; él necesita concluir algo mucho más fuerte, necesita concluir que la matemática es *verdadera* (tanto si lo creemos como si no) para inferir como consecuencia, vía criterio ontológico de Quine, que existen los objetos matemáticos sobre los que cuantifica la teoría. Pero, si nuestra crítica precedente resulta correcta, entonces no es posible extraer esta conclusión mediante el argumento de Resnik.

VI

En el argumento de indispensabilidad que nos ofrece Resnik hay aún otro problema en torno al condicional formulado inmediatamente antes de los puntos (7) y (8) acabados de examinar:

> 6. Estamos justificados en extraer *conclusiones* desde y dentro de la ciencia sólo si estamos justificados en tomar como *verdadera* a la matemática empleada en la ciencia [sin cursiva en el original].

Lo que se nos viene a decir mediante (6) es que nuestro estar justificados en considerar a la matemática como verdadera (al menos aquellas partes que se emplean en las ciencias) es condición necesaria de nuestro estar justificados en extraer conclusiones en la ciencia. Pero a esto cabe oponer que para extraer conclusiones (justificadamente), tanto en la ciencia como fuera de ella, lo que se requiere es algo bastante más débil (al menos *prima facie*), a saber, que la lógica (o la matemática) empleada en esta tarea sea *preservadora de la verdad*. Esto es, que si partimos de premisas verdaderas sólo podamos arribar como conclusiones a enunciados verdaderos. Se trata pues de la conocida propiedad de *corrección* que debe poseer cualquier cálculo (lógico o matemático) para que tenga un mínimo interés en su aplicación a la práctica de realizar inferencias. Ahora bien, podría objetarse a esto último que nada impide considerar verdadero a un sistema que tiene la propiedad de conservar la verdad y de este modo nuestras últimas consideraciones sólo ilustrarían y reforzarían el punto (6). Así podríamos considerar equivalente "el sistema S (lógico y/o matemático) es verdadero" con "el sistema S es correcto". Pero el problema es que si optamos por esta salida nos vemos conducidos a un nuevo problema para las pretensiones realistas de Resnik. Efectivamente un sistema puede ser correcto y absolutamente trivial e inapropiado para los propósitos inferenciales en la ciencia y fuera de ella. Por ejemplo, un sistema que contuviera como única regla de inferencia $A \vdash \neg (B \wedge \neg B)$ sería obviamente correcto pero inadecuado para su empleo en sancionar inferencias. Además hay, o es posible construir, diferentes sistemas lógico-matemáticos S_1, S_2 ... S_n que contienen (al menos prima facie) tesis incompatibles entre sí en sus interpretaciones pretendidas pero todos igualmente correctos. ¿Estaríamos dispuestos en este caso a mantener que todos ellos son igualmente verdaderos? El problema es que si respondemos afirmativamente a esta última cuestión (como seguramente lo haría un formalista) entonces nos vemos abocados a una concepción de la verdad que está muy lejos de lo que Resnik pretende, pues para éste no basta que los postulados de un sistema sean correctos o no conduzcan a contradicción, han de constituir además "un modo de reconocer lo que está 'previamente ahí'" [Resnik (1995b), p. 293] así que un matemático "puede erróneamente postular lo que no existe" [*op. cit.*], por muy correcto o coherente que sea lo que postula. Se trata de la vieja idea de que un ladrón (una teoría matemática falsa) no es menos ladrón (menos falsa) por no haber sido cogido *in fraganti* (en contradicción). Una idea similar a la que empleó Brouwer en su polémica con Hilbert [Kneale & Kneale (1972), p. 638].

VII

Quizás pueda alegarse frente a nuestras últimas consideraciones que en ellas se apela a diferentes sistemas lógico-matemáticos $S_1, S_2, \ldots S_n$, mientras que Resnik sólo se refiere a aquellas partes de la matemática que son realmente *usadas en la ciencia* , y esto, por sí solo, parece eliminar bastantes alternativas.

Pero aun siendo acertada esta última observación el problema persistiría en tanto en cuanto permanecieran en pie al "previamente ahí" al menos dos sistemas matemáticos rivales que tuvieran aplicación en la ciencia, y esto es precisamente lo que acontece con la geometría euclídea y la geometría riemaniana: ambas tienen sus respectivas y fructíferas aplicaciones en la física. Así que ni mediante la noción de corrección de un sistema; ni a través de la noción de sistema empleado en la ciencia, ni apelando a la combinación de ambas nociones logramos determinar cuál sea ese sistema matemático que sólo postula lo que está.

VIII

Pero ¿no habría otro modo de interpretar la noción de verdad de modo que podamos mantener (6)? Al fin y al cabo Resnik no ha apelado a la noción de corrección para defender (6); eso lo hemos hecho nosotros en un intento de clarificar la relación entre la noción de verdad y la de conclusiones justificadas en una inferencia; y ya hemos visto que este intento plantea más problemas que resuelve.

Resnik ha propuesto explícitamente una concepción de verdad como inmanencia, destinada a servir de apoyo a una concepción realista de la matemática y de la ciencia natural, y que se encuentre a salvo de las dificultades que conlleva una noción de verdad, como correspondencia con los hechos, asociada tradicionalmente con el realismo [Resnik (1990), pp. 405 y ss.]. Tal concepción la concreta en una teoría de la verdad que presenta dos importantes características: es una teoría de la verdad como desentrecomillado y se trata de una teoría inmanente de la verdad. Lo primero porque para cualquier enunciado *S* de la matemática (o de la ciencia) postula el enunciado que se obtiene poniendo *S* en el lugar de "*p*" y un nombre de *S* en el lugar de "*S*" en el esquema (tarskiano):

S es verdadero si y sólo si *p*

Lo segundo porque no se requiere que "el predicado 'verdadero' se aplique más allá de nuestro lenguaje científico y matemático" [Resnik (1995), p. 166], esto es, se acaban identificando las verdades matemáticas con los "enunciados matemáticos verdaderos"[6] [Resnik (1990), p. 442].

Resnik dedica buena parte de su artículo [Resnik (1990)] a mostrar como esta concepción de la verdad permite formular las principales tesis realistas sobre la matemática y la ciencia natural. No tengo objeciones dignas de mención que ofrecer (salvo la observación recogida en la nota 4) a los lúcidos comentarios del propio Resnik sobre algunas de las limitaciones de su concepción para satisfacer todo lo que un realista puede desear decir para formular su posición. La cuestión que a nosotros nos ocupa aquí es otra. Se trata de si con esta concepción de la verdad podemos o no apoyar la tesis (6) de su argumento de indispensabilidad.

IX

Por lo que respecta a la característica de desentrecomillado de la concepción de la verdad que Resnik propone no veo problema alguno en aceptarla, y en admitir que resulta compatible con las tesis realistas que Resnik defiende. Pero una cosa es compatibilidad y otra, bien diferente, implicación; y no creo que haya tal implicación entre la noción de verdad como desentrecomillado y las tesis realistas a las que Resnik pretende arribar. Y ello por la sencilla razón de que tal característica de la verdad resulta igualmente compatible con tesis antirrealistas.

Así un antirrealista puede aceptar de buen grado por ejemplo que

"56789 + 98765 = 157554" es verdadero si y sólo si
56789 + 98765 = 157554,

pero negarse a continuación a admitir que esto implica la existencia de números como entidades ontológicas reales independientes de la mente. Puede alegar que los números no son más que un producto de las capacidades constructivas de la mente pero que carecen de existencia considerados como entidades independientes de aquélla[7], y así se negará a admitir que el matemático esté descubriendo 'lo que está previamente ahí' como Resnik pretende [Resnik (1995b), p. 293].

Tarski, quien propuso explícitamente el esquema *T* que Resnik emplea, fue plenamente consciente de esta situación cuando indicó que "podemos aceptar la concepción semántica de la verdad sin eliminar ninguna actitud epistemológica que podamos haber tenido; seguimos siendo realistas ingenuos, realistas críticos o idealistas, empiristas o metafísicos, cualquier cosa que hayamos sido antes. La concepción semántica es completamente neutral respecto a todas estas cuestiones" [Tarski (1944), p. 302]. Y la razón de esto, como el propio Tarski observa, es que al aceptar, por ejemplo, el esquema

(*T*) "La nieve es blanca" es verdadera si y sólo si la nieve es blanca sólo compromete a aceptar que si afirmamos (o rechazamos) la oración del lado izquierdo del bicondicional hemos de afirmar (o rechazar) la oración que aparece en el lado derecho (y viceversa). Pero si al afirmar, por ejemplo, el lado derecho del bicondicional nos estamos comprometiendo, o no, con la existencia de hechos, u objetos, independientes de la mente, es algo no implicado por tal concepción de la verdad[8]. Se necesitan argumentos adicionales para mantener que hay tal tipo de compromiso. Incluso Quine [Quine (1987), pp. 212 y ss.] quien no se caracteriza precisamente por intentar disimular los compromisos ónticos que pueda haber en la aceptación de una teoría parece ser bien consciente de la falta de compromiso óntico de este tipo en la concepción de la verdad como desentrecomillado. Sin embargo, no pretendo sugerir con esto que Resnik esté afirmando explícitamente que haya tal implicación; más bien parece pensar lo contrario cuando indica que la concepción inmanente de la verdad como desentrecomillado ofrece un modo de formular las tesis contrapuestas de realistas y antirrealistas [Resnik (1990), p. 423]. Más esto no hace sino reforzar lo que pretendemos defender, a saber, que en la interpretación en la que (6) resulta aceptable no permite fundamentar un argumento en favor del realismo en matemáticas. No lo permite porque, como hemos visto, la concepción de la verdad invocada resulta neutral respecto al debate entre realismo y antirrealismo.

X

Por otra parte, si apelamos a la otra característica de la concepción de la verdad defendida por Resnik, a saber, su inmanencia, en el intento de apoyar el realismo, tampoco correremos mejor suerte; pues con esta característica estamos señalando meramente que la noción de verdad aparece relativizada a los enunciados de un determinado lenguaje —al inglés, indica Resnik [Resnik (1990), pp. 408 y 422]— y esto es algo que resulta perfectamente asumible para un antirrealista; sobre todo si lo que éste pretende mantener es que los objetos matemáticos no son entidades lingüísticamente independientes en cuando a su naturaleza y existencia.

XI

En resumen, las versiones examinadas del argumento de indispensabilidad no logran su propósito de probar las tesis realistas en matemáticas. En un caso porque se apela a una noción de verdad[9] trascendente a la experiencia y esto imposibilita justificar una premisa necesaria para la prueba. En otra versión, en la que se apela a la noción de confirmación, se plantean nuevos problemas que conducen a situaciones claramente indeseables para cualquiera (sea realista o antirrealista). Finalmente, examinamos el argumento pragmático de indispensabilidad de Resnik y encontramos, de una parte, un claro *non sequitur* entre las tesis (7) y (8) de su argumento, y de otra que si bien su tesis (6) puede ser defendida en una determinada interpretación que emplea su propia noción de verdad como inmanencia, no obstante, en esa interpretación, no resulta de ayuda alguna para apoyar las tesis realistas en matemáticas puesto que resulta igualmente compatible con posiciones antirrealistas[10].

Departamento de Lingüística, Lenguas Modernas,
Lógica y Filosofía de la Ciencia
Universidad Autónoma de Madrid
Ciudad Universitaria de Cantoblanco, E-28049 Madrid
E-mail: Anastasio.Aleman@uam.es

NOTAS

[1] Una crítica al intento de fundar el conocimiento matemático en la percepción empírica se encuentra en Alemán (1995) y más detalladamente en Alemán (1997b). Para una breve crítica de la apelación a la intuición intelectual puede verse Alemán (1993), pp. 42-3.

[2] Podría objetarse a esto último que Quine, en la misma página, también dice que "Este rasgo no es, sin embargo, peculiar de la matemática" sino compartido con otras clases de enunciados de la ciencia natural. Pero esta última observación deja intacto el punto esencial, pues si la matemática carece de contenido empírico no es posible que resulte confirmada o refutada por la experiencia. Me ocupo de esta cuestión en Alemán (1997b).

[3] Un buen análisis crítico del uso de la noción de confirmación en el argumento de indispensabilidad en matemáticas se encuentra en Sober (1993) y otro más reciente en Vineberg (1996).

[4] Para un análisis crítico del criterio ontológico de Quine véase Alemán (1997a).

[5] Si se objetara que la comprobación en el periódico no constituiría una razón suficiente para considerar justificada la creencia en cuestión, podríamos continuar añadiendo cláusulas, que suponemos cumplimentadas, tales como que lo comprobó en diferentes periódicos, lo escuchó en la radio, lo vio en televisión, etc.

[6] Obsérvese que esta condición está lejos de ser aceptable para todo realista, puesto que, entre otras consecuencias, se tendría que aceptar que el número de verdades matemáticas no puede exceder del número enumerable de *enunciados* matemáticos verdaderos.

[7] Una consideración análoga efectúa Dummett [Dummett (1978), p. 233] cuando señala que un matemático intuicionista puede aceptar el esquema (*T*) de Tarski pero que éste reinterpretará el enunciado que aparece a la derecha del bicondicional de la manera que es peculiar al intuicionismo.

[8] Una detallada explicación de como las instancias del esquema (*T*) admiten interpretaciones no-realistas puede encontrarse en R. L. Kirkham [Kirkham (1992), pp. 72 y ss.].

[9] Aquí no nos hemos detenido en examinar otra de las tesis sostenidas por Resnik, a saber, que la noción de verdad desempeña un importante papel como objetivo de la ciencia. Dos opiniones contrarias a esta pretensión pueden encontrarse en dos filosofías de la ciencia tan diferentes como las de B. C. van Fraassen [van Fraasen (1980)] y U. Moulines [Moulines (1991)].

[10] Una reciente interpretación ficcionalista del argumento de indispensabilidad en matemáticas se encuentra en M. Balaguer [Balaguer (1996)]. Tanto este artículo como el de S. Vineberg [Vineberg (1996)] criticando las conclusiones realistas en matemáticas del argumento de indispensabilidad, gravitan sobre una tesis común, a saber, la inexistencia de conexiones *causales* entre objetos matemáticos y fenómenos físicos; pues si no existe tal tipo de conexión entonces el realismo respecto a las entidades no observables postuladas por la física sería compatible con una posición no realista respecto a las entidades matemáticas, en contra de lo que Putnam sostiene en [Putnam (1979b)].

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALEMÁN, A. (1993), "El debate Carnap-Quine en torno a la naturaleza de la Lógica", *Arbor*, 576, pp. 33-48

—— (1995), "El realismo en matemáticas", *Mathesis*, vol. XI, pp. 37-53.

—— (1997a),"Objetos y propiedades"; incluido en Solís (ed.), *Ensayos en homenaje a Thomas Samuel Kuhn*. *Endoxa*, nº 9, pp. 101-23.

—— (1997b), "Matemáticas y experiencia", *Mathesis*, vol. XIII, pp. 131-46.

BALAGUER, M. (1996), "A Fictionalist Account of the Indispensable Applications of Mathematics", *Philosophical Studies*, vol. 83, pp. 291-314.

DUMMETT, M. (1978), *Truth and Other Enigmas*, Londres, Duckworth.

FIELD, H. (1980), *Science Without Numbers*, Princenton, Princenton University Press.

—— (1989), *Realism, Mathematics and Modality*, Oxford, Basil Blackwell.

KIRKHAM, R. L. (1992), *Theories of Truth: A Critical Introduction*. Cambridge, Mass., The MIT Press.

KNEALE, W. y KNEALE, M. (1961), *The Development of Logic*, Oxford, Clarendon Press. [Versión castellana: *El desasarrollo de la Lógica*, Madrid, Tecnos, 1972; por donde cito].

MOULINES, U. (1991), *Pluralidad y recursión*, Madrid, Alianza Editorial.

PUTNAM, H. (1972), *Philosophy of Logic*, Londres, George Allen and Unwin.

—— (1979a), "Reference and Understanding", en Margalit, A. (ed.), *Meaning and Use*, Dordrecht, Reidel.

—— (1979b), "What is Mathematical Truth?", en *Mathematics, Matter and Method*, vol. 1, segunda edición, Cambridge, Cambridge University Press.

QUINE, W. V. (1980), *From a Logical Point of View*, 2ª ed., Cambridge, Harvard University Press.

—— (1984), *Quiddities*. *An Intermittently Philosophical Dictionary*,. Cambridge, Mass., Harvard University Press.

—— (1995), *From Stimulus to Science*, Cambridge, Mass., Harvard University Press.

RESNIK, M. D. (1990), "Immanent Truth", *Mind*, vol. 99, pp. 405-24.

—— (1995a), "Scientific vs. Mathematical Realism: The Indispensability Argument", *Philosophia Mathematica,* vol. 3, pp. 166-74.

—— (1995b), "Review of J. Azzouni 1994", *Philosophia Mathematica*, vol. 3, pp. 288-94.

SOBER, E. (1993), "Mathematics and Indispensability", *The Philosophical Review*, vol. 102, pp. 35-57.

TARSKI, A. (1944), "The Semantic Conception of Truth and the Foundations of Semantics". [Traducción incluida en Valdés, L. M. (1991). *La búsqueda del significado*, Madrid, Tecnos; por donde cito.]

VAN FRAASSEN, B.C. (1980), *The Scientific Image*, Oxford, Oxford University Press.

VINEBERG, S. (1996). "Confirmation and the Indispensability of Mathematics to Science", *Philosophy of Science*, vol. 63, pp. 256-63.