RUSSELL Y SU LÓGICA *

Hao Wang

1. *Notas al azar*

(1) Al intentar encasillar a Russell nos enfrentamos con obstáculos que pueden atribuirse parcialmente a la pobreza del lenguaje. Es un escritor que no escribe *belles lettres,* al menos ninguna que se la pueda tomar seriamente. No es ni artista ni científico. Shaw intencionadamente lo calificó de matemático, mientras que Littlewood, sosegadamente, habló de él como de un filósofo. Contestando a sus críticos (julio de 1943), precisó: "Pasaré gradualmente de lo abstracto a lo concreto. Lo que nos llevará en primer lugar a la lógica, a continuación al método científico, después a la teoría del conocimiento y la psicología y de aquí a la metafísica. Pasando a materias que involucran juicios de valor, llegamos en primer lugar a la ética y la religión, después a la filosofía política y económica, y finalmente a la filosofía de la historia". Incluso esta larga lista excluye desde sus pronunciamientos sobre la guerra y la paz, la educación, ciencia popular, conquista de la felicidad, hasta las contribuciones a la revista *Playboy.*

No ha sido nunca profesor normal, aunque es el ídolo de muchos profesores. Los matemáticos profesionales tienden a considerarlo como un extraño, aunque en términos de potencia intelectual está equiparado a los mejores de entre los científicos y los matemáticos. Es el único capaz de combinar un F. R. S. con un "Premio Nobel" de literatura. Entre sus

* Este artículo fue publicado originalmente en inglés en la revista *Ratio,* vol. VII, n.º 1 (junio, 1967), pp. 1-34. Se reproduce aquí, en versión castellana, gracias al amable permiso del Prof. S. Körner, director de *Ratio,* y tras adquirir de la Editorial Basil Blackwell los correspondientes derechos de publicación (N. de la R.).

amigos y admiradores hay músicos, científicos, novelistas, políticos y jóvenes: todos de categorías a las que no pertenece.

(2) Como forma de vida, la carrera de Russell presenta muchos aspectos poco corrientes. El más básico tal vez sea el efecto de la preponderancia de la especialización. Por una parte, hoy día un tema serio y valorado requiere una buena dosis de preparación intelectual y de continuos esfuerzos para mantenerse a la altura de los nuevos descubrimientos. En consecuencia, ser especialista es esencialmente una dedicación exclusiva. Por otra parte la opinión social tiende a considerar comúnmente al escritor no especializado, en el mejor de los casos, como a un intelectual de segunda fila. Esta combinación de circunstancias excluye prácticamente la posibilidad de una vida satisfactoria entregada a escritos que se extienden a muy diversos campos. Russell se las arregla para resolver este dilema tan satisfactoriamente como pocos otros lo han hecho en esta centuria. Un ejemplo más reciente de un éxito semejante, desde una posición algo distinta, es Sartre.

En varias ocasiones Russell dijo modestamente que sus escritos tienen un público tan amplio sólo porque él en su juventud hizo un trabajo serio en la lógica matemática. Uno se siente ligeramente confundido cuando Russell escribe que, habiendo hecho todo lo que él pretendía hacer en matemáticas, dirigió su atención a otras materias hacia 1910. Para deambular en diferentes áreas es esencial que los resultados de la preparación de un especialista no sean abrumadores. Esto quiere decir que se está obligado a dirigirse a campos "fáciles" o a disciplinas intelectuales menos desarrolladas, que afortunadamente incluyen la mayoría de los temas que interesan directamente al intelectual medio.

En los años cincuenta se hizo una película de una entrevista a Russell. Respondió a una pregunta diciendo que si fuera joven entonces hubiese elegido física en lugar de filosofía o, si no tuviese la capacidad para ello, la propaganda política como campo de dedicación. Esta observación ofendió a muchos filósofos académicos que rehusaron tomarla en serio. No obstante, si la meta de uno en esta vida es tener tanta influencia positiva como sea posible y con preferencia una influencia razonablemente conspicua, dentro del restringido ámbito del uso de la palabra escrita, entonces la observación no es tan sorprendente.

Por supuesto, es completamente imposible valorar y comparar las satisfacciones que se obtiene siguiendo una especialidad hasta el máximo de nuestra capacidad, sea música, poesía, matemáticas, física o filosofía, con las obtenibles si se permite a todas las inclinaciones fragmentar la atención en varias direcciones. Hubo una época en la que se deploró que Russell hubiese dejado la lógica en 1910. Aunque Russell dijo que él sentía que sus ideas en esta época estaban completamente anticuadas, se adivinaba que había razones más profundas para el cambio de dirección. La decisión de dejar la lógica debe haber requirido sabiduría y una gran fuerza de carácter. Es difícil imaginar que Russell hubiera llevado una vida más satisfactoria continuando con la lógica.

En un artículo popular reciente, se indicaba que Russell había dicho que consiguió más fama que muchos de sus más inteligentes contemporáneos en Cambridge al lanzarse de lleno a las controversias. Parece que al menos en la búsqueda del conocimiento, las polémicas y controversias tienden más bien a entorpecer que a espolear el progreso. Se sirve mejor al propósito de acumulación viendo qué hay de correcto en alguien que viendo qué hay de equivocado en él. Si las ideas de alguien no tienen valor o contenido, el mejor tratamiento es el silencio y la negligencia. Las polémicas tienden a desviar la atención de la verdad cercana y nos introducen en un juego de palabras. Una diferencia fundamental entre Wittgenstein y la mayoría de los filósofos académicos angloamericanos contemporáneos parece ser el gusto de estos últimos por los argumentos pequeños, agudos, revestidos con toda clase de detalles extraños.

(3) Otro aspecto del modo de vida de Russell es su despego de las instituciones académicas y de las grandes corporaciones en general. En las sociedades "libres" adelantadas hoy, la máxima libertad parece estar reservada para los que tienen el ingenio de los negocios. Respecto a los científicos y a los que viven de las letras y los símbolos, es prácticamente imposible escapar de las asociaciones, que naturalmente imponen restricciones para proteger sus propios

intereses. En consecuencia, hay una enorme presión para limitarse a materias que tienen muy poco que ver con los principios morales o políticos básicos.

Incluso si uno se las arregla en cierto modo para conseguir una cierta independencia económica, hay pocas posibilidades de ejercer una gran influencia en los asuntos públicos escribiendo sólo textos y argumentos lógicos. Aparte del control de los medios de comunicación por personas no adecuadas, hoy existe la desventaja de la diversificación que deja en manos del aturdido lector la elección de una variedad de panoramas de muy desigual valor.

Russell resuelve parcialmente esta dificultad mediante una combinación de circunstancias más o menos única. Primeramente se creó un considerablemente vasto capital de reputación académica, por medio de un trabajo duro, un buen estilo, una riqueza y eminencia familiar, la sociedad de clases en Inglaterra y el predominio del Imperio Británico. A esto se le añadía una gran capacidad de lectura, una escritura fácil, un ingenio agudo, una lucidez emprendedora, constantes participaciones en polémicas y una capacidad de no preocuparse por las críticas adversas. Incluso con todo esto, algunas de sus actividades públicas en los últimos años hubieran sido imposibles o mucho más difíciles si no hubiese contado con profundas raíces en un país de menguante poder con un notorio y tradicional respeto al hombre educado.

Cuando llegó, con un espíritu científico, a sus opiniones sobre la crisis cubana y el problema fronterizo entre China y la India, su desacuerdo con la posición oficial en el Oeste fue atribuido por el *Observer* a la "vanidad de un viejo" ya que se le había de conceder que no era comunista.

(4) El esquema básico de referencia al considerar el desarrollo de Russell, deben formarlo el individualismo y un egoísmo ilustrado. Cuando Moore se deshizo rápidamente del egoísmo como contradictorio, da la impresión de que el tema no fue planteado de un modo exacto. Es cierto que un grupo de egoístas se contradiría y que una concentración informal de gente exclusivamente interesada en su beneficio puede ser contraproducente. No obstante, hay ocasiones en

las que han de hacerse unas elecciones genuinas que establecen diferentes resultados según se sea egoísta o no. La situación se complica enormemente por el hecho de que se oculta la solución porque muchos factores objetivos se desconocen. Las instituciones se las arreglan para transformar casi todos los problemas del yo frente a la sociedad en problemas del yo frente a sí mismo.

Por otra parte, parece necesario para que haya un vigoroso colectivismo tolerar e incluso incitar alguna forma de individualismo que, seguramente, deberá implicar en suma un provecho para el bien común.

La posición filosófica del empirismo moderno, que empieza con mi experiencia aquí y ahora, es un fracaso como guía para la investigación científica y como guía para la acción práctica. Los dos fracasos son independientes, pero tienen un origen común en el hecho de que mis datos actuales de los sentidos están demasiado desviados de lo que realmente importa.

En cuestiones morales, muy a menudo sucede que rehusamos comparar la importancia relativa de premisas básicas diferentes. Cuando Moore predicaba el afecto personal y el aprecio de lo que es hermoso en el arte o en la naturaleza como lo intrínsecamente bueno, no especificó de un modo explícito un programa de acción basado en esta doctrina. En la práctica, sin embargo, se podría esperar que tal posición básica, si era seguida por la mayoría, no sería particularmente buena para el provecho social. Incluso Keynes superó esta filosofía confortadora cuando entró en el servicio civil.

La injusticia básica hoy en día quizá no sea la explotación dentro de cada país, con la importante excepción de los negros en los Estados Unidos, sino más bien la desigualdad económica entre países diferentes. Cuando la discrepancia es tan grande y los países ricos intentan proteger e incrementar aún más su riqueza y los pobres intentan ser menos pobres, no sorprende que no prevalezcan la paz y la buena voluntad. Si se acepta esto como premisa básica, uno no puede menos de disgustarse, ante la cantidad de hipocresía y de injustificado moralismo por parte de los países ricos. Es un placer encontrar que Russell, finalmente, en su más alto grado de madurez, acentúa este aspecto del problema moral hoy en día.

Una gran dificultad respecto a puntos de vista sobre problemas políticos y sociales es la diferencia entre lo que debería ocurrir y lo que realmente ocurre. Al proponer una línea de aproximación *A*, que si se realizase, sería mejor que *B*, existe el gran peligro de que la doctrina ayude a producir una alternativa *C* que sería incluso menos deseable que *B*. Esta es básicamente la objeción al radicalismo utópico que desvía la atención de las alternativas más reales.

(5) Acerca del escribir, Russell tiene que decir esto: "su consejo más enfático fue que siempre se debe reescribir. Yo he tratado de hacer esto conscientemente, pero me encontré con que mi primera versión era casi siempre mejor que la segunda. Este descubrimiento me ha ahorrado una inmensa cantidad de tiempo. Por supuesto no he aplicado esto al contenido, sino a la forma". Esto está en un claro contraste con la historia acerca de cómo escribía Tolstoy, que a menudo revisaba sus manuscritos de arriba abajo diez o veinte veces. Indudablemente esto está relacionado con la diferencia entre los escritos artísticos y los didácticos. Además de esta diferencia en la intención, está claro que las satisfacciones derivadas de un escrito u otro también deben ser completamente diferentes.

Wittgenstein escribió bien de un modo muy diferente al de Russell. Sería muy insultante y carente de información decir que los libros de Russell se aproximan a un buen periodismo, en tanto que los de Wittgenstein se acercan a la poesía. Ambos han tratado de hacer una filosofía más científica y menos verbal, con un progreso ascendente, pero sin una técnica repulsiva. Al perseguir esta finalidad, cada uno de ellos ha creado en cierto sentido un estilo de escribir y posiblemente también un estilo de filosofar.

(6) Hubo épocas en las que se pensó que Russell era un corruptor de la juventud. Es difícil entender cómo sus argumentos racionales sobre el matrimonio y la moral, por ejemplo, pudieron considerarse subversivos. Sin embargo se puede comprender que las opiniones de Russell pueden fácil-

mente ser malentendidas. Las especulaciones abstractas son adecuadas para dejar al margen las circunstancias prácticas bajo las que se llevan a cabo las recomendaciones implicadas. Falla la comunicación porque hay diferentes niveles en la comprensión de una frase en el lenguaje ordinario. Este es el modo en que Russell inintencionadamente ha podido causar algún daño a jóvenes que son intelectualmente capaces, pero prácticamente muy incapaces.

En cuestiones intelectuales, existen también jóvenes algo incautos que han sido llevados erróneamente por los escritos superficialmente claros de Russell a creer que la filosofía prometía unas matemáticas unificadas y una ciencia más grande, clara y sistemática. Es difícil estimar si esta misma gente no habría encontrado sin Russell otros proyectos menos compensadores en los que perder su tiempo y energías.

(7) La influencia de Russell en la lógica y la filosofía ha sido profunda y grande. Probablemente ha sido el más leído y citado de los filósofos de este siglo. Trabajos básicos tales como el de Skolem sobre la teoría de números variables libres, las tesis de Herbrand y Gödel, el trabajo de Gödel sobre la incompletabilidad de la aritmética, tomaron como su punto de partida los *Principia*. La idea de una jerarquía ramificada (predicativa) juega un papel esencial en el estudio de los fundamentos de la teoría de conjuntos, en particular, en las cuestiones de la independencia y consistencia relativa. El contraste entre lo falso y lo sinsentido, tal como es sugerido en la teoría de los tipos, continúa fascinando a filósofos profesionales.

A menudo se ha dicho que las contribuciones más sólidas de Russell al conocimiento humano, son mucho más pequeñas que sus influencias. La valoración mas hostil e injusta de los trabajos de Russell que puede oírse entre algunos lógicos y filósofos discurre más o menos como sigue. Muchas de sus ideas más preclaras en lógica fueron anticipadas e incluso desarrolladas más adecuadamente por Frege: la reducción de las matemáticas a la lógica (en particular, la definición de los números naturales), la invención del cálculo proposicional y del cuantificacional, la formulación de los conceptos básicos de la moderna filosofía de la lógica. Incluso la teoría de los tipos apareció en cierta forma en Frege y en Schröder. La paradoja de Russell y la teoría de las descripciones vienen a ser como dos breves observaciones, y la primera de éstas fue también descubierta independientemente por Zermelo. El principio del círculo vicioso fue sugerido primeramente por Richard y Poincaré. En filosofía Russell estuvo de moda en una época, pero últimamente fue suplantado por Wittgenstein; y puesto que difícilmente existe alguna acumulación de progreso en filosofía, tan pronto como se pasó de moda, no ha quedado prácticamente nada que pueda salvarse.

El que una valoración semejante sea enteramente malintencionada es muy obvio. Hay un poco de envidia y resentimiento del especialista contra un talento más o menos universal. Hay un elemento de frustración en la filosofía "científica" y en la académica en general. Quizá lo más importante sea el impacto del criterio de originalidad del matemático: la búsqueda de innovaciones definidas y específicas es de alguna manera análoga al uso del acto sexual como la única norma para evaluar el éxito de una relación amorosa. Además existe el deleite del historiador al trazar las anticipaciones y arbitrar la distribución de los créditos: una pequeña dosis no es malsana, pero se podría fácilmente exagerar y perder la visión de una estructura más amplia. Este juego se reduce él mismo al absurdo cuando se llega a la conclusión de que la figura central de un período, tal como es Russell en lógica y filosofía, *realmente* no hizo mucho. Se puede emplear un sistema semejante de desmitificación prácticamente con cualquiera. Una gran parte de este trabajo será suficiente, así lo espero, para refutar la valoración negativa, antes citada, de los logros de Russell.

(8) Muchos de los anteriores comentarios sobre Russell como hombre son intolerablemente crudos y de mal gusto. Quienes eran jóvenes en una Europa próspera y en paz (internamente al menos) son naturalmente más amables, optimistas y generosos que los individuos de una generación desarrollada en guerra y llevando una vida en circunstancias extrañas. Quizá esta es la razón por la que Russell parece tener más fuerza, valor y esperanza que la gente cuya edad está comprendida entre un tercio y la mitad de la suya.

He aquí un mensaje de Russell escrito en su ochenta cumpleaños:

> He podido concebir verdades teóricas erróneamente, pero no estaba equivocado al pensar que existía tal cosa, y que merece nuestro homenaje. Puedo haber creído que el camino hacia un mundo de seres humanos libres y felices era más corto de lo que se ha demostrado que es, pero no estaba equivocado al pensar que un mundo semejante es posible, y que merece la pena vivir con el propósito de hacerlo más cercano. He vivido buscando una visión personal y social a la vez. Personal: preocuparme por lo que es noble, por lo que es hermoso, por lo que es amable; conseguir momentos de reflexión que aporten sabiduría en un tiempo más mundano. Social: imaginar la sociedad que ha de ser creada, donde los individuos se desarrollen libremente y donde el odio, la avaricia y la envidia mueren porque no hay nada para alimentarlos. Creo en estas cosas, y el mundo, a pesar de todos sus horrores, me ha dejado inconmovible.

2. *Principles (1903)*

La primera gran obra de Russell sobre lógica y fundamentos es sin duda sus *Principles* de los cuales la Parte I (págs. 1-108) y el Apéndice B (págs. 523-528) son probablemente las más interesantes. Además, la Introducción a la segunda edición (1937, págs. v-xiv) ofrece un sumario y evaluación de los trabajos referentes a sus intereses originales, efectuados por él mismo y otros durante los 34 años de intervalo. Puesto que él no ha hecho nada en este área desde 1937, parece razonable usar este libro como una guía preliminar para la discusión de su obra lógica.

Este libro comienza con una audaz definición de la matemática pura como la clase de todas las proposiciones de la forma 'p implica q' donde p y q son proposiciones que contienen una o más variables, las mismas en las dos proposiciones, y ni p ni q contienen otras constantes que las constantes lógicas. En 1937 modificó esto para incluir otras funciones de verdad además de la implicación. Podría argüirse, sin embargo, que el condicional es, en verdad, solamente una entre las funciones de verdad y no más importante que las otras, pero la implicación ocupa un lugar especial, como se desprende, por ejemplo, de la importancia del *modus ponens* y los teoremas de deducción. Es ésta una cuestión que Russell no considera. Pero las constantes lógicas son un tópico al cual retorna constantemente.

La tesis fundamental del libro es que matemáticas y lógica son idénticas (reducibilidad de las matemáticas a la lógica). Es ésta una posición que Russell sostiene incluso hoy. Una tercera cuestión global es la referente al realismo y constructivismo en lo concerniente a clases. En *Principles,* la posición realista es conspicua, por ejemplo, se dice en el prefacio que definir diferentes tipos de números como clases no hace surgir dudas en torno a los teoremas de existencia, es decir, que hay entidades del género en cuestión. Esto es totalmente lo contrario de su posterior énfasis sobre las construcciones lógicas. Otra cuestión favorita de los filósofos, la distinción analítico-sintético, no ha interesado tanto a Russell, aunque ha dejado una nota singular en un capítulo sobre Kant (pág. 457): 'En primer lugar, Kant no dudó, ni por un momento, de que las proposiciones de la lógica fuesen analíticas, percibiendo correctamente, al mismo tiempo, que las matemáticas son sintéticas. Desde entonces se ha creído que la lógica es tan sintética como todos los demás géneros de verdad; pero es esta una cuestión puramente filosófica, que pasaré aquí por alto'. Finalmente, continuando en este alto nivel de generalidad filosófica, incluiremos una cita en honor de los lingüistas matemáticos (pág. 42): 'En su conjunto la gramática me parece que nos acerca más a la lógica correcta que las opiniones corrientes de los filósofos; y, en lo que sigue, la gramática, aunque no sea nuestro patrón, será tomada como nuestro guía'.

Al nivel más asequible, Russell apunta un sistema de lógica simbólica e insinúa una teoría de tipos como medio de resolver las paradojas de teoría de conjuntos. El sistema contiene tres partes con siete indefinibles y veinte premisas (págs. 13-26).

El cálculo proposicional usa tres indefinibles y diez premisas: (*a*) implicación (material), (*b*) implicación formal, (*c*) verdad; las premisas (1), (2), (3) dicen esencialmente que las proposiciones se forman con *p, q,* etc., mediante $\supset$, (4) *modus ponens,* (5) $pq \supset p$, (6) $(p \supset q)(q \supset r) \supset (p \supset r)$, (7) $(p \supset (q \supset r)) \supset (pq \supset r)$, (8) $(pq \supset r) \supset ((p \supset q) \supset r)$, (9) $(p \supset q)(p \supset r) \supset (p \supset qr)$, (10) $((p \supset q) \supset p) \supset p$. '$p$ es una proposición' es definido por '$p \supset q$', pq por $(r)((p \supset (q \supset r)) \supset r)$, $p \vee q$ por $(p \supset q) \supset q$, $\sim p$ por $(r)(p \supset r)$.

El cálculo de clases usa tres indefinibles más (*d*) $\in$, (*e*) tal que, (*f*) función proposicional, y las premisas: (11) $x \in \hat{x}\, \phi x \supset \phi x$ ($\supset$ sería probablemente $\equiv$), (12) $(x)(\phi x \equiv \psi x) \supset \hat{x}\, \phi x = \hat{x}\, \psi x$ y '$x = y$' se define por '$(u)(x \in u \supset y \in u)$'. El cálculo de relaciones usa un indefinible más (*g*) relación y siete premisas más (inverso, complemento, producto relativo, par ordenado, xRy es proposición, implicación y $\in$ son relaciones).

Se observa que la implicación formal y la función proposicional están relacionadas y ambas son muy complejas. Al analizarlas, Russell tropieza con nuevos indefinibles tales como *cada término* (pág. 40), *variable,* que a su vez remite a *denotación,* y *cualquier término* (pág. 80), así como con la clase de proposiciones definidas por una función proposicional (pág. 93). Además, en el capítulo sobre la denotación encontramos *todo, cada, cualquiera, uno, alguno,* y *el*: 'Encontramos que conceptos de este género son fundamentales en matemáticas, y nos permiten tratar de clases infinitas mediante proposiciones de complejidad finita' (pág. 106).

Sin duda, los lógicos actuales no quedarían satisfechos con el modo inapropiado en que las construcciones se efectúan. Lo que no está tan claro es si estos intentos primitivos podían, o no, contener gérmenes de desarrollos fructíferos, que han sido marginados en los sistemas lógicos más claros que poseemos actualmente.

Al discutir las clases y las paradojas, Russell prueba primero que para todo R no puede haber ningún a tal que, para todo w, $wRa \equiv \sim wRw$. En consecuencia, hemos de abandonar el axioma $x \in \hat{x}\, \phi x \equiv \phi x$ o el principio de que toda clase puede tomarse como un término. En esta coyuntura se sugiere la distinción entre clase como muchos y clase como uno (págs. 104-105, y pág. 76). 'Una clase como uno, diremos, es un objeto del mismo *tipo* que sus términos; i. e. cualquier función proposicional ϕx que es significativa cuando x se sustituye por uno de los términos lo es también cuando lo que se sustituye es la clase como uno. Pero la clase como uno no siempre existe, y la clase como muchos es de un tipo distinto del de sus términos... A este respecto, una clase como muchos puede ser sujeto lógico, pero en proposiciones de un género distinto de aquellas en las que sus términos son sujetos'. Iniciando un, al parecer, cambio de tópico, Russell establece un contraste entre todo y cualquiera: 'Así el enunciado correcto de las verdades formales requiere las nociones de *cualquier* término o *cada* término, pero no la noción colectiva de *todos* los términos'.

Aunque la distinción de clase como uno y clase como muchos se asemeja superficialmente a la separación de Cantor y von Neumann entre conjuntos y clases, Russell no adopta el criterio decisivo de que una clase como muchos es también una clase como uno, cuando no es demasiado amplia. La cuestión general que se sugiere es más bien la de que $a \in \hat{x}\,\phi x$ es algunas veces carente de significado, aun cuando $a \in \hat{x}\,\phi x \equiv \phi a$ es siempre verdadera, si $a \in \hat{x}\phi x$ es significativa. Esta doctrina es elaborada ulteriormente en el Apéndice B. Convendría señalar que Russell habla de 'la solución verdadera' (pág. 522) y 'un primer paso hacia la verdad' (pág. 523) en conexión con la solución de las paradojas. Aparentemente no considera la posibilidad de que haya soluciones alternativas, no siendo ninguna de ellas una teoría unificada que sea superior en todos los aspectos. Esto recuerda el debate entre Einstein y Bohr sobre los fundamentos de la física.

En el Apéndice B se establece con gran detalle la doctrina de los tipos. Contiene esencialmente la teoría simple de tipos, aunque algunas de las dificultades que aquí se discuten no parecen haber sido abordadas correctamente, incluso en las versiones más definitivas. La idea no es forzada, si consideramos el ejemplo familiar de que 'la virtud es triangular' no es ni verdadera ni falsa, sino sin-sentido. Los dos postulados básicos se establecen explícitamente (pág. 523):

> T1. Cada función proposicional ϕx tiene, además de su rango de verdad, un rango de significatividad, i. e. un rango dentro del cual debe caer x, si ϕx es una proposición, sea verdadera o falsa.
>
> T2. Los rangos de significatividad forman *tipos,* i. e. si x pertenece al rango de significatividad de ϕx, entonces hay una clase de objetos, el *tipo* de x, todos los cuales deben pertenecer también al rango de ϕx, por más que pueda ser variado ϕ.

Sobre estos dos postulados, se discuten los tipos para las clases, relaciones, proposiciones y números. En la base están los individuos: un individuo es cualquier objeto que no es un rango; es éste el tipo de objeto de más bajo nivel. Hay una dificultad básica con los números y las proposiciones, porque todos los números se consideran como un tipo y todas las proposiciones se consideran como otro (porque de todas ellas puede decirse, significativamente, que son verdaderas o falsas). El tipo de todos los números requiere una consideración de la totalidad de tipos y rangos, puesto que todos los rangos tienen números. El tipo de todas las proposiciones da lugar a una contradicción al considerar todas las clases de proposiciones y la clase de todas las proposiciones, una para cada clase m de proposiciones, 'cada proposición de la clase m es verdadera' que no pertenece a la clase m.

En la versión más definitiva de los *Principia* se evitan estas dificultades, tomando cada número como realizado en diferentes niveles con infinitas copias diferentes, y aplicando el principio de círculo vicioso para obtener diferentes órdenes del concepto de verdad. Los conceptos semánticos, tales como verdad, presentan otras cuestiones sobre las que volveremos más tarde.

Hay otras dificultades que parecen haber sido pasadas, más o menos, por alto en los últimos escritos de Russell. Russell no considera en ningún lugar la posibilidad de conservar T1 pero eliminar T2, permitiendo así el solapamiento de tipos. Aunque T2 excluye el solapamiento de tipos, Russell sugiere que 'la suma de cualquier número de tipos mínimos es un tipo, i. e. es un rango de significatividad para ciertas funciones proposicionales' (pág. 525).

Parece que ello permitiría una teoría de tipos menos rígida, aunque no está claro cómo podría construirse tal esquema. Además, se plantea también la cuestión de si hay tipos de orden infinito: 'Todos los rangos forman, ciertamente, un tipo, ya que todo rango tiene un número; y lo mismo todos los objetos, puesto que cada objeto es idéntico a sí mismo... pero el rango de todos los rangos es, por supuesto, un tipo de orden infinito' (pág. 525).

3. *Preludios a los Principia (1903-10)*

En 1902, Frege discutió las paradojas en el Postcript al segundo volumen de sus *Grundgesetze* y consideró la posibilidad de que pudiese haber conceptos a los que no correspondieran clases. Pero se decidió por un remedio suave que excluye solamente unos cuantos 'puntos singulares'. Varias personas demostraron después que el sistema modificado era inconsistente. De hecho, durante sus últimos años, Frege había abandonado la creencia de que la matemática es reducible a la lógica y emprendió, entre otras cosas, una investigación de nuestra intuición geométrica del continuo.

Mientras tanto, Russell se centro en la búsqueda de una solución a las paradojas. En sus propias palabras, 'A lo largo de 1903 y 1904, mi trabajo estuvo casi totalmente dedicado a esta materia, pero sin éxito. Mi primer triunfo fue la teoría de las descripciones, en la primavera de 1905... fue generalmente aceptada, y se llegó a pensar que era mi más importante contribución a la lógica'. Aunque el análisis violenta de algún modo el uso ordinario (por ejemplo, como señala G. E. Moore, no es aplicable a 'La ballena es un mamífero'), ha llegado a ser un modelo consagrado en los libros de lógica. De hecho, Ayer, siguiendo a Ramsey lo llamó una vez el paradigma del análisis filosófico, aunque el autor sea personalmente parcial respecto del ejemplo más antiguo de resolver el problema de los infinitésimos mediante el concepto de límite. En cualquier caso la teoría de las descripciones ha obtenido publicidad más que suficiente y no requiere ser elaborada aquí.

En 1906, Russell usó su respuesta a un trabajo de Hobson como ocasión para iniciar sus pensamientos sobre las paradojas. Pensaba que había algunas funciones proposicionales (normas, propiedades) que no determinan clases, y el problema era dar las reglas por las cuales esas normas no-predicativas pudiesen ser separadas de las demás. Discutió tres caminos alternativos: A, la teoría del zig-zag; B, la teoría de limitación de tamaño; C, la teoría de las no-clases (pág. 37). El trabajo fue recibido el 24 de noviembre de 1905 y en una nota adicional del 5 de febrero de 1906 podemos leer: 'Desde mis últimas investigaciones creo fuera de toda duda que la teoría de las no-clases ofrece la solución completa a todas las dificultades surgidas en la primera sección de este trabajo.

En la teoría de zig-zag, 'partimos de la creencia de que las funciones proposicionales determinan clases cuando son completamente simples, y no lo hacen sólo cuando son complicadas y recónditas... en la teoría de zig-zag la negación de una función predicativa es siempre una función predicativa'. La estratificación de Quine parece cumplir correctamente los requisitos exigidos. Hay una nota accidental que parece difícilmente compatible con la teoría de las no-clases: 'Cuando se introduce una nueva entidad, el Dr. Hobson considera la entidad como *creada* por la actividad de la mente, mientras que yo la considero como meramente *discernida*'. (pág. 41).

Russell señaló que en la teoría de limitación de tamaño ningún conjunto puede tener complemento. Más tarde dio una generalización de la paradoja de Burali-Forti 'una propiedad ϕ no define una clase, si hay una función f tal que para todas las clases u, si $(x)\ (x \in u \supset \phi x)$, entonces $f(u)$ existe, $(f(u))$, y $f(u)$ no es un miembro de u (pág. 35). De este modo, si ϕ define w, obtenemos $\phi(f(w))$ y $\sim\phi(f(w))$. Si ϕ es 'ser un ordinal' y $f(u)$ es 'el ordinal de u' obtenemos la paradoja de Burali-Forti. Si ϕ es 'ser un cardinal' y $f(u)$ es 'el cardinal del conjunto potencia del mayor cardinal en u' obtenemos la paradoja de Cantor. Si ϕ es 'no pertenece a sí misma' y $f(u)$ es simplemente u, obtenemos la paradoja de Russell. 'Es probable, a la vista de la forma general anterior de todas las contradicciones conocidas, que, si ϕ es cualquier propiedad no-predicativa demostrable, podemos efectivamente construir una serie ordinalmente similar a la serie de todos los ordinales, compuesta enteramente de términos, que tienen la propiedad ϕ. Por tanto, si los términos que satisfacen ϕ pueden ser ordenados en una serie ordinalmente similar a un segmento de la serie de ordinales, se sigue que no resulta contradicción alguna de aceptar que ϕ es una propiedad predicativa. Pero esta proposición es de uso muy limitado, mientras no conozcamos hasta dónde llega la serie de ordinales (pág. 36). La teoría de conjuntos de Zermelo con el axioma de sustitución y el axioma de von Neumann, que excluye clases tan amplias como el conjunto universal, parecen realizar estas ideas literalmente. Aunque las notas de Russell sobre la teoría de las no-clases en este trabajo son muy crípticas, indicó que se tratasen las clases como 'símbolos incompletos' y correlacionó una clase u con una sentencia abierta Fx de modo que 'u tiene solamente un miembro' resulta ser $(\exists\ b)\ (x)\ (x = b \equiv Fx)$.

En esta etapa, se produjo una intervención de Poincaré. En 1905, Richard inició el estudio de las paradojas semánticas al considerar el conjunto de todas las fracciones decimales definibles en un número finito de palabras. Richard resolvió la paradoja sugiriendo que el conjunto de decimales definibles en un número finito de palabras no podría ser propiamente entendido como capaz de incluir cualquier decimal definible solamente por referencia al conjunto total. Esto fue recogido por Poincaré en 1906, al comentar el trabajo de Russell que aquí se considera. Poincaré propuso identificar las normas no-predicativas con aquellas que contienen un círculo vicioso, como se evidenciaba en la paradoja de Richard. Esto ha llegado a ser considerado como un concepto establecido bajo el término 'definiciones impredicativas'. Se desprende claramente del contexto que la principal objeción de Poincaré iba contra el infinito actual y no era su deseo someter los principios básicos, tales como el de inducción matemática, a la prueba de predicatividad.

En una pronta respuesta, Russell aceptó la sugerencia, formuló el principio de círculo vicioso, señaló la similaridad con la vieja paradoja de Epiménides y defendió la doctrina cantoriana del infinito. Russell también señaló que aún quedaba una gran tarea hasta construir una teoría sobre la base del principio de círculo vicioso, porque lo necesario era edificar una estructura positiva y no meramente decir, de forma negativa, aquello que no era permitido. La resistencia de Russell a tratar las clases finitas y las clases infinitas de modos básicamente diferentes está estrechamente ligada con su deseo de identificar la lógica con las matemáticas. Ya que el infinito es central en las matemáticas, una teoría que hiciera responsables de las paradojas a las peculiaridades de las clases infinitas haría dudosa la pretensión de que la lógica contiene la riqueza total de las matemáticas.

La primera exposición completa de la teoría de tipos de Russell apareció en 1908, año en que también fueron publicados el trabajo de Zermelo sobre los fundamentos de la teoría de conjuntos y el trabajo de Brouwer sobre la independencia de los principios de la lógica. El trabajo de la teoría de tipos contiene esencialmente la estructura básica de los *Principia,* tal como fue elaborada en las primeras 200 páginas del volumen I (1910).

Parece lo mejor considerar ambos trabajos al mismo tiempo. De hecho, ya que el tratamiento posterior sobrepasó ampliamente el primero, aludiremos preferentemente al libro.

En 1909 (de nuevo en *Rev. Métaph. Mor.*) Poincaré comentó el trabajo de Russell de 1908, señalando que los ordinales estaban presupuestos en la descripción de la teoría de tipos. Como réplica, Russell publicó una traducción francesa de las páginas 37-60 de los *Principia* con una nota adicional en la que argumentaba que se podría esquivar pedantemente el hablar del orden de un tipo hablando de $\phi!x$, $f!(\phi!x)$, 'y así sucesivamente'. Puesto que la teoría general menciona cualquier orden finito, la defensa parece difícilmente aceptable.

Una pequeña cuestión es la distinción entre *cualquiera* y variables reales, por un lado, *todo* y variables aparentes, por otro, en parte debida a Peano. Esto indudablemente corresponde al contraste de variables libres con variables ligadas. En la segunda edición de los *Principia* (1925), esta distinción fue abolida totalmente. En la discusión informal, las variables libres y las letras esquemáticas (símbolos de comunicación) parecen estar juntos de manera descuidada. De este modo, por ejemplo, en la construcción de Gödel, hay en el sistema un predicado Px tal que para cualquier m, Pm es un teorema, pero para $(x)Px$ o Pa (con a como variable libre) no es un teorema. Por tanto, hay ciertamente una distinción entre *todo* y *cualquiera,* tomados en el sentido esquemático. En cuanto a la distinción entre variables libres y ligadas, la escuela alemana continúa usando diferentes letras para ellas. En un sentido, las variables libres parecen corresponder a los parámetros que permanecen inalterados en el curso de una prueba, de modo que, por ejemplo, la variable de inducción no puede ser considerada como una variable libre. En otro sentido, las variables libres son las variables cuantificadas universalmente, que no van regidas por ningún cuantificador existencial y se comportan como constantes, al considerar la validez de los esquemas cuantificacionales. Como observó Skolem, los sistemas de variables libres son especialmente transparentes, al menos cuando se usan solamente predicados decidibles y funciones efectivas.

Aunque la implicación formal no ocupa un lugar destacado en los *Principia,* se ha señalado que las implicaciones entre sentencias cerradas 'no sirven al propósito para el que las implicaciones son principalmente útiles, a saber el de hacernos conocer, por deducción, conclusiones de las que fuésemos previamente ignorantes. Las implicaciones *formales,* por el contrario, sirven para este propósito, debido al hecho psicológico de que a menudo sabemos '(x) $(\phi x \supset \psi x)$' y ϕy, en casos en que ψy (que se sigue de esas premisas) no puede ser fácilmente conocida de una manera directa' (pág. 21). Esta distinción no está lo suficientemente marcada; en particular, Quine en *Mathematical Logic* fue capaz de derivar el *modus ponens* para la implicación formal a partir del caso especial en que tan sólo se manejan sentencias cerradas.

4. *Principia*

Para evitar complejidades extrañas, limitaremos nuestra atención a las clases, marginando las relaciones, que podrían ser añadidas con ayuda de pares ordenados, ya sea introducidos como primitivos, como en Peano, ya definidos de alguna manera adecuada. También, por el momento, dejaremos de lado nociones semánticas como verdad y denotación.

En el tipo inferior, se encuentran los individuos y ciertos predicados aplicables a individuos. De esta forma, obtenemos una clase de proposiciones atómicas a partir de la cual obtenemos otras proposiciones mediante conectivas veritativo-funcionales. Hay variables x, etc., que tienen por rango individuos. Por cuantificación sobre esas variables, obtenemos funciones proposicionales de primer orden. Se introducen variables ϕ, etc. (preferiblemente ϕ_1, etc.), que tienen por rango estas funciones, y que son construidas como una sentencia abierta Px o como la expresión abstractiva $P\hat{x}$ o como la propiedad denotada por ella. Usando las variables, llegamos, a partir de ... Px ... a resultados tales como (ϕ_1) ... $\phi_1 x$ ..., (ϕ_1) ... $\phi_1 \hat{x}$ ..., (x) ... $\phi_1 x$ ..., (x) ... $\hat{\phi}_1 x$ ... que son todos (a excepción del tercero) de orden 2. Como orden de una función proposicional se toma el mínimo entero que excede el orden de todas las variables ligadas en ella, o sea, todas las variables cuantificadas y también todas las que llevan circunflejo. Así, el orden de una sentencia abierta $F\phi$ está determinado por los órdenes de las variables ligadas que haya en ella, el orden de un abstracto $F\hat{\phi}$ (la expresión) y la propiedad nombrada por ella está determinado por el orden de la sentencia abierta $F\phi$ y el de la variable de abstracción ϕ. El orden de una variable (una expresión) está a su vez determinado por el orden único de todas las propiedades que la variable toma como valores.

Una propiedad ha de ser de orden superior a las cosas que tienen la propiedad, p. ej., Px es una propiedad, de orden 1, de individuos (cosas de orden 0) mientras que (ϕ_1) ... $\phi_1 \hat{x}$ ... es de orden 2. Las propiedades que son justamente del orden inmediatamente superior a las cosas que las tienen (sus argumentos, en términos de funciones proposicionales) son llamadas por Russell *predicativas* (pág. 53), uso éste que se remonta a las discusiones con Poincaré, aunque introduce diferencias por medio del axioma de reducibilidad (véase más adelante). Puede pensarse que necesitamos introducir variables para las propiedades de, digamos, individuos de cada orden *m,* así como usar variables de orden *m* y nivel *n* para todo par (*m, n*) de enteros positivos. Esto era, según Russell, innecesario (pág. 54). De hecho sólo introdujo variables para funciones predicativas y, por tanto, si marginamos las relaciones, las variables necesarias forman una jerarquía infinita simple: *x, y,* etc.; $\emptyset_1$, etc., $\emptyset_2$, etc., y así sucesivamente.

Si tomamos en consideración el axioma de reducibilidad, este procedimiento, más sencillo, cumple realmente el mismo objetivo que la aproximación alternativa de usar dos jerarquías. Así, el axioma establece que, para toda sentencia abierta $F\emptyset_n$, tenemos:

$$(\exists \emptyset_{r+1})\ (\emptyset_n)\ (\emptyset_{n+1}\ \emptyset_n \equiv F\emptyset_n).$$

Esto significa que, aunque hayamos incluido infinitos géneros de variables para propiedades de objetos de un nivel y un orden determinados, éstas podrían ser reemplazadas por las variables de la clase menor usadas por Russell, con la ayuda del axioma.

Con todo, una vez realizado esto, la diferencia entre la teoría de Russell y la versión moderna de la teoría simple de tipos queda esencialmente reducida a una cuestión de propiedades versus clases para las que el axioma de extensionalidad es verdadero. De hecho, el sistema formal oculto puede sacarse a la luz sin demasiada dificultad. En particular, se puede hablar de cada variable o abstracto como siendo de un tipo *i* (*i* = 0, 1, ...).

4.1. *El sistema formal PM*

P1. El alfabeto incluye variables sobre individuos *x, y,* etc. (o, más bien, $\emptyset_0$, etc.), variables sobre funciones proposicionales de individuos $\emptyset_1$, etc., y, en general, variables $\emptyset_n$, etc., para cada entero positivo n; V, $\sim$; símbolo para la cuantificación universal; posiblemente determinados nombres constantes para individuos y propiedades de tipos fijados que desestimaremos. Una fórmula atómica es cualquier expresión de la forma $\emptyset_{n+1}\ \emptyset_n$, para algún n; en general, las fórmulas se obtienen a partir de otras ya dadas por medio de $\sim$, V, y la cuantificación universal según los criterios habituales. Las constantes $\supset$, $\equiv$, $\wedge$, $(\exists)$, son definidas a partir de $\sim$, V, ( ) según los criterios habituales.

P2. El cálculo proposicional. Es más natural construir p, q, F, etc., como letras esquemáticas.

*1.1. Si p y $p \supset q$, entonces q.

*1.2. $(p \vee p) \supset p$.

*1.3. $q \supset (p \vee q)$.

*1.4. $(p \vee q) \supset (q \vee p)$.

*1.5. $p \vee (q \vee r) \supset q \vee (p \vee r)$ (redundante, como demostró Bernays).

*1.6. $(q \supset r) \supset ((p \vee q) \supset (p \vee r))$.

P3. La teoría de la cuantificación. En cada una de las siguientes (fórmulas), x, y, son variables cualesquiera del mismo tipo, y x no figura libre en p.

*10.1. $(x)\, Fx \supset Fy$.

*10.11. Si Fy, entonces $(x)Fx$.

*10.12. $(x)\, (p \vee Fx) \supset (p \vee (x)Fx)$.

P4. El axioma de reducibilidad.

*12.1. $(\ \emptyset_{n+1})\ (\emptyset_n)\ (F\emptyset_n \equiv \emptyset_{n+1}\ \emptyset_n)$.

P5. Identidad.

13.01. $(\emptyset_n = \psi_n) = (\emptyset_{n+1})\,(\emptyset_{n+1}\ \emptyset_n \supset \emptyset_{n+1}\ \psi_n)$ Df.

P6. El axioma de infinito.

P7. El axioma de elección.

En tanto que parte integral del sistema PM, las clases se introducen como 'símbolos incompletos'. La engorrosa notación $\emptyset x$ de circunflejos locales para propiedades, es ahora reemplazada por una notación $x\ \emptyset x$, relacionada pero más conveniente, para abstracción de clases. En *20, encontramos: "las proposiciones en las que ocurre una función ϕ pueden depender, en cuanto a su valor de verdad, de la función particular ϕ, o pueden depender sólo de la *extensión* de ϕ. En el primer caso, llamaremos a la proposición en cuestión una función *intensional* de ϕ; en el último caso, una función *extensional* de ϕ... Las funciones de funciones de las que la matemática se ocupa de manera especial son todas extensionales. Cuando una función $\phi!z$ es extensional, puede considerarse que versa sobre la clase determinada por $\phi!z$, ya que su valor de verdad permanece inalterado en tanto en cuanto la clase permanece inalterada".

La definición contextual de clases es:

$$*20.01. \quad G\,(\hat{\phi}_n\, F\phi_n = (\exists\, \phi_{n+1})\,((\phi_n)\,(\phi_{n+1}\,\phi_n \equiv F\phi_n) \wedge G\phi_{n+1}) \quad \text{Df.}$$

Las variables α, etc., cuyo rango está compuesto por clases, se introducen además en contexto:

$$*20.07. \quad (\alpha_{n+1})\,F\alpha_{n+1} = (\phi_{n+1})\;F\;(\hat{\phi}_n\,(\phi_{n+1}\;\phi_n)) \quad \text{Df.}$$

$$*20.071. \quad (\exists\,\alpha_{n+1})\;F\alpha_{n+1} = (\exists\,\phi_{n+1})\;F\,(\hat{\phi}_n\;(\phi_{n+1}\,\phi_n)) \quad \text{Df.}$$

Con base en estas definiciones, el axioma de extensionalidad se deriva como teorema:

$$*20.43. \quad (\phi_n)\,(\phi_n \in \alpha_{n+1} \equiv \phi_n \in \beta_{n+1}) \supset \alpha_{n+1} = \beta_{n+1}.$$

Para $n > 0$, podemos asimismo derivar:

$$(\gamma_n)\;(\gamma_n \in \alpha_{n+1} \equiv \gamma_n \in \beta_{n+1}) \supset \alpha_{n+1} = \beta_{n+1}.$$

A partir de las discusiones anteriores, debería estar claro que todo lo que la teoría de no-clases lleva a cabo es la reducción de clases a propiedades. Es ésta una reducción de menor alcance que la pretendida, sin duda, originalmente por Russell: el axioma de reducibilidad introduce una diferencia mayor que la distinción entre propiedades y clases. De hecho, en la introducción a la segunda edición de los *Principia* (1925), la distinción entre funciones proposicionales y clases es abandonada sobre la base de que estamos interesados sólo en funciones extensionales. También se renuncia al axioma de reducibilidad, y las clases de órdenes diferentes compuestas de miembros del mismo orden se distinguen de modo que las variables llevan tanto superíndices como subíndices.

Continuando con nuestras consideraciones sobre la primera edición, volvemos a varios rasgos peculiares que deliberadamente hemos marginado.

En la práctica, los índices de tipo son suprimidos por medio de una convención de *ambigüedad sistemática.* En efecto, la convención consiste en que se ha de imaginar que los índices se suplen de manera adaptable a la restricción de que una clase lleva un índice de tipo superior en una unidad a sus miembros ('estratificación'). Esto hace que el desarrollo resultante sea muy similar al de *New Foundations* de Quine, excepto en que PM se mantiene más débil en su teoría de cuantificación, porque en el sistema de Quine no se impone ningún requisito de estratificación a la parte cuantificacional.

Algo parecido al sistema PM, con el axioma de extensionalidad añadido como directamente aplicable a las variables para funciones proposicionales, se conserva en Hilbert y Ackermann (1938), y es conocido en la literatura como cálculo de predicado o funcional de orden superior.

La mixtura de las paradojas semánticas y matemáticas crea dificultades más serias. No es descabellado querer desarrollar una lógica más comprensiva en la cual las nociones semánticas aparezcan también directamente. De hecho, tal desarrollo parece altamente atractivo y se presenta, incluso hoy, en espera de una ejecución satisfactoria. Pero, en orden a desarrollar tal teoría, estamos obligados a afrontar la distinción entre uso y mención, entre símbolos y su significado. Así, en los *Principia,* hay también una jerarquía de proposiciones (sentencias cerradas). Sin embargo, las grandes complicaciones resultantes de las interacciones de proposiciones y funciones proposicionales no encuentran un tratamiento totalmente serio. Por ejemplo, si A significa 'afirmado por Epiménides' y T significa verdadero, aunque tengamos (p_{n-1}) $(Ap_{n-1} \supset \sim T_n\ p_{n-1})$, abreviadamente, q, y Aq, no podemos derivar $\sim T_n\ q$ porque q es de orden n. Entre otras cosas, tendríamos que incluir axiomas como $p_n \equiv$

$T_{n+1}\ p_{n-1}$, y permitir que variables proposicionales desempeñasen un doble papel, como sustitutos de nombres y de sentencias. Necesitamos, por supuesto, reglas que permitan la sustitución de variables proposicionales por proposiciones, las cuales pueden suponerse implícitas en *10.1.

Aun cuando parece perfectamente posible desarrollar una teoría unificada, ello, aparentemente, no fue capital en el intento de Russell. En los años más recientes y en varios lugares, Russell se ha mostrado de acuerdo en separar de su teoría la parte concerniente a las nociones semánticas.

Hay una idea filosófica acerca del desarrollo de la teoría de la cuantificación que tiene un interés técnico considerable. Es la idea de que las funciones de verdad que rigen expresiones cuantificadas han de ser explicadas en términos de proposiciones en las que las funciones de verdad no rijan expresiones cuantificadas. En *9 y en la segunda edición (*8 y la nueva introducción), donde se describen desarrollos alternativos que reemplacen *10, está elaborado con gran amplitud que la teoría de funciones de verdad se supone sólo para sentencias libres de cuantificador al principio, junto con cuantificadores que ocurren en fórmulas en forma normal prenex. Los cuantificadores que ocurren de otro modo son introducidos mediante definiciones.

El sistema indicado en *9 es esencialmente el siguiente:

*1.1.-*1.6. Teoremas libres de cuantificador de funciones de verdad.

*9.01.-9.06. Por ejemplo, $\sim (\exists x)\ Fx = (x) \sim Fx$. Df,

$(x)\ Fx \vee p = (x)\ (Fx \vee p)$ Df.

*9.1. $Fx \supset (\exists y)\ Fy$.

*9.2. $Fx \vee Fy \supset (\exists t)\ Ft$.

*9.12. Si p y $q \supset q$, entonces q (p, q, pueden contener cuantificadores).

*9.13. Si Fx, entonces $(y)Fy$.

Los conceptos primitivos son $\vee$, $\sim$, (x), $(\exists y)$. Este es prácticamente el mismo sistema que el de la disertación de Herbrand, excepto en que, aquí, el sistema se supone simultáneamente para todos los diferentes tipos, mientras que el sistema de Herbrand es exactamente para un solo tipo. Las definiciones *9.01 a *9.06 están construidas de modo que permitan aplicaciones reiteradas, y así Fx y p puedan contener cuantificadores. Esto no fue apreciado por Russell porque la distinción entre teoremas y metateoremas no era familiar: 'La inducción matemática es un método de prueba que no es todavía aplicable, y no es (como se verá) susceptible de ser usada libremente hasta que la teoría de proposiciones que contienen variables aparentes haya sido establecida' (pág. 130).

En conexión con la idea de aislar las reglas para manipular cuantificadores, es también, para ciertos propósitos, conveniente, usar formas de minialcance más bien que formas prenex, o incluso proceder sin manipulación extensiva alguna de cuantificadores. En este caso, es natural tener reglas para introducir también cuantificadores en el interior de una fórmula, y no sólo en el principio. Un sencillo ejemplo que algunos han encontrado conveniente usar es tomar $\wedge$, $\vee$, $\sim$, (x), $(\exists y)$ como primitivos, y considerar sólo fórmulas en la forma positiva, a saber, en una forma en la cual el signo de negación rija sólo fórmulas atómicas. Obtenemos entonces un sistema formalmente simple con sólo tres reglas:

Q1. Cualquier tautología veritativo-funcional (posiblemente con cuantificadores) es un teorema.

Q2. Si ... Fx ... es un teorema, y x no figura libre en ningún otro lugar, ... $(x)Fx$ ... es un teorema.

Q3. Si ... $((\exists x)Fxy \vee Fyy)$ ... es un teorema, entonces ...$(\exists x)Fxy$ ... es un teorema.

Para extender el sistema hasta incluir fórmulas que no estén en las formas positivas, hemos de añadir:

Q4. En cualquier contexto, $\sim (\exists x)Fx$ y $\sim (x)Gx$ pueden ser respectivamente reemplazadas por $(x) \sim Fx$ y $(\exists x) \sim Gx$; $\sim (p \vee q)$, $\sim (p \vee q)$, $\sim \sim p$ por $(\sim p \vee \sim q)$, $(\sim p \wedge q)$, p.

Si usamos los conceptos de Herbrand de cuantificadores general y restringido en lugar de (x) y $(\exists x)$ en Q2 y Q3, podemos prescindir totalmente de Q4.

5. *Wittgenstein y Ramsey*

Hasta ahora nos hemos abstenido de discutir los pasajes filosóficos de los *Principia,* especialmente págs. 37-59. El autor puede aún recordar como cavilaba sobre estas páginas como principiante en 1940, hora tras hora, con escaso éxito. Particularmente relevantes para la filosofía de la lógica de Russell son el *Tractatus,* el libro de Ramsey, y los ensayos de Quine (1940) y de Gödel (1944) de la Library of Living Philosophers.

En la Sección 2 anterior, hemos mencionado los principios T1 y T2. Desde 1908, un tercer principio ha sido particularmente conspicuo, T3. El principio de círculo vicioso.

El principio T2 excluye la posibilidad de tipos mixtos. Este principio es establecido explícitamente como *1.11 en pág. 95. Los tres principios en conjunto determinan esencialmente alguna forma de la teoría ramificada de tipos, si bien queda en pie la cuestión de qué ordinales son permitidos como índices de orden. En particular, podemos inferir de estos principios:

T3a. Ninguna clase puede ser del mismo tipo que sus miembros.

A partir de T1, T2 y T3 llegamos a la teoría simple de tipos.

La derivación de T3a a partir de T3 se expone en página 40: 'Ahora bien, dada una función $\phi\hat{x}$, los valores de la función son todas las proposiciones de la forma ϕx. Se sigue que no puede haber proposición alguna de la forma ϕx, en la que x tenga un valor que envuelva $\phi\hat{x}$. (Si así ocurriera, los valores de la función no estarían determinados todos hasta que la función estuviese determinada, encontrando al mismo tiempo que la función no está determinada a menos que sus valores estén previamente determinados)... De hecho, $\phi(\phi\hat{x})$ debe ser un símbolo que no exprese nada: podríamos, por tanto, decir que carece de significado'. También se arguye que 'el valor de $\phi\hat{z}$ con el argumento $\phi\hat{z}$ es verdadero' no carece de significado, sino que es falso, ya que no existe ningún valor de tal índole.

Ahora bien, puesto que la teoría simple de tipos no requiere toda la potencia de T3, es natural preguntarse si T3a se puede derivar de otros fundamentos. De hecho, Russell ofrece otro argumento mediante una consideración directa (págs. 47-48), a saber, que la función proposicional es ambigua y no puede ser usada como sujeto. Aquí, la confusión entre funciones proposicionales como propiedades y como sentencias abiertas parece particularmente evidente. En este sentido, es la sentencia abierta la que es una mera ambigüedad que espera determinación, y no puede ocurrir como argumento; mientras que en '$\phi\hat{x}$ es un hombre' se diría que la ambigüedad de ϕx se elimina mediante el circunflejo.

Si prescindiéramos por completo de T3a, no habría nada que nos impidiese obtener la propiedad de todas las propiedades ϕ tales que $\sim \phi\phi$ o $\hat{x}\,(x \notin x)$. Por otra parte, puede concebirse el reemplazo de T3a por principios más débiles tales como el de que ninguna clase de un tipo dado pueda ser tan amplia como la clase de todos los números ordinales de dicho tipo.

En la segunda edición de los *Principia,* Russell tomó prestado de Wittgenstein un principio de extensionalidad (véase más adelante) y además intentó operar sin el axioma de reducibilidad. El fruto de la primera revisión es, esencialmente, el de hacer extensionales todas las propiedades de modo que no se diferencien de las clases excepto en que, de acuerdo con la segunda revisión, sólo se permitan clases predicativas. Se añaden algunas páginas (Apéndice C) para argüir que '*A* cree *p*' y '*p* es acerca de *A*' no son genuinos contra-ejemplos del principio de extensionalidad.

La eliminación del axioma de reducibilidad tiene, al menos, cuatro tipos de consecuencias. En primer lugar, la definición de identidad no tendría en adelante cometido alguno. Esta, sin embargo, podría ser reemplazada por el principio de extensionalidad $(x)\,(\phi x \equiv \psi x) \supset (F(\phi \hat{z}) \equiv F\,(\psi \hat{z}))$. Algunos conceptos y resultados sobre infinitos superiores, tales como el teorema de Cantor, no podían ser obtenidos; pero esto no fue lamentado. Se perderían análisis clásicos, tales como el del teorema de mínima cota superior, y esto sí que lo sería. Finalmente, existen dificultades con la inducción matemática.

Sin el axioma de reducibilidad, no sólo hay enteros de diferentes tipos, sino que, dentro de cada tipo superior a 1, hay enteros de infinitos órdenes, ya que un entero corresponde a toda clase (de un orden determinado) que sea inductiva, i. e. que contenga 0 y esté cerrado bajo la operación sucesor. En el Apéndice B, Russell ofreció una prueba de que la clase de enteros de orden 5 no es mayor que la clase de enteros de orden n, para cualquier $n > 5$. Se concluiría que la clase de los enteros puede ser definida como la intersección de todas las clases inductivas de orden 5. Esto parecería contradecir el hecho de que se puede probar, usando la inducción de orden superior, la consistencia del sistema con inducción de orden inferior y, en consecuencia, eliminar más enteros no-standard. Como Gödel hizo ver, la prueba de *89.16 no es concluyente.

En el *Tractatus,* Wittgenstein sujetó a discusión una serie de puntos de capital interés sobre la filosofía de la lógica y la matemática. Dicho esquemáticamente, hay objetos simples y hechos atómicos. Las proposiciones atómicas, si son verdaderas, son pintura de los hechos atómicos ('La teoría pictórica del significado'). Los cuantificadores son reducidos a conjunciones y disyunciones. Todo objeto simple tiene un nombre único, y por consiguiente la identidad no es, en el análisis final, indispensable, aunque no se niega que sea útil e incluso esencial a la matemática, donde nuestro principal interés es determinar si diferentes descripciones tienen la misma referencia. Por añadidura, se entiende que el principio de extensionalidad (5.54) es aplicable a todas las proposiciones compuestas: 'En la forma proposicional general, las proposiciones ocurren en otras proposiciones sólo como bases de operaciones de verdad'. Partiendo de estas afirmaciones generales, se obtiene la forma general de las proposiciones, que a su vez da lugar a todas las proposiciones mediante aplicación de una función barra generalizada (negación de todas las proposiciones de cualquier conjunto dado, esto es, en la notación de Schönfinkel, $fx|^{x}gx$) repetidamente sobre la clase de todas las proposiciones atómicas. La totalidad de la teoría omite la distinción entre rangos finitos y rangos infinitos, y es, por lo tanto, en gran medida irrelevante para la fundamentación de la matemática. Los números son tratados, manifiestamente, de acuerdo con una línea distinta: 'Un número es el exponente de una operación' (6.021).

El principio más básico es quizá el de atomicidad, que afirma la posibilidad de análisis último. Poco se dice acerca de los objetos simples, que parecen más semejantes a objetos materiales que los datos sensoriales preconizados por Russell y los positivistas lógicos. La teoría de las descripciones parece haber ejercido importante influjo al sugerir esta posición del 'atomismo lógico'.

'Una espada está rota' tiene sentido sólo si hay objetos simples tales que podemos pensar en ellos como siendo reordenados. Ello supone que el sentido ha de ser formulado en términos de referencia, y la referencia ha de ser a objetos materiales. Quizá no justamente objetos materiales, pero objetos simples en todo caso.

La lógica ha de ser verdadera en todos los mundos posibles. ¿Cómo hemos de pensar entonces los mundos posibles? Las diferentes posibilidades surgen de la reordenación de la misma materia básica.

Todo ello es muy familiar: 'El presidente de Inglaterra' parece tener una referencia ficticia y la teoría de la descripción hace que parezca innecesario ir más allá de objetos reales. ¿Por qué no, pues, en todos los casos? El análisis conduciría a signos simples y por tanto a objetos simples. Si los signos simples han de tener sentido, el sentido sólo puede ser referencia. Si el sentido de un signo simple no es un objeto, entonces es posible ulterior análisis. De hecho, el que un nombre tenga sentido, tendría que depender siempre de si algo es verdadero. En otras palabras, si sólo tenemos descripciones, ¿dónde obtienen éstas sentido? A menos que las proposiciones no alcancen en alguna parte la realidad, no puede haber un fundamento para explicar la verdad o la falsedad de cualquier proposición. Puede que no sepamos qué son las proposiciones atómicas, pero es preciso que tales proposiciones existan.

El contraste entre sentidos definidos e indefinidos introduce un elemento que recuerda la ley de identidad establecida con varias cualificaciones. Existe el sentimiento de que, cuando uno se toma la suficiente molestia, una proposición no puede menos de tener un sentido definido: no tener un sentido definido es no tener sentido alguno.

Si comenzamos con proposiciones no analizadas y generamos proposiciones más complejas mediante operaciones lógicas, hemos de elegir entre diferentes significados de las constantes lógicas y decidir por tanto si se permiten sentencias sin un valor de verdad definido.

El tratamiento matemático de un dominio finito dado de objetos resulta fácil de llevar a cabo por el hecho de que podemos contar todos los objetos y asignar a cada objeto un único signo. Predicados y funciones fijos pueden ser definidos extensionalmente, acaso por tablas. Es claro que, extensionalmente, puede haber sólo un número finito de predicados y funciones posibles sobre un dominio finito. Entonces las constantes lógicas $\wedge$, $\vee$, $\sim$, ( ), $(\exists)$ pueden ser también explicadas del modo natural, y las leyes usuales de la lógica pueden ser comprobadas en su verdad de acuerdo con la explicación. No podemos esperar sin más que estas leyes sean completas relativamente a la explicación, puesto que hay en general enunciados accidentalmente verdaderos acerca del pequeño mundo dado que no son lógicamente verdaderos, por ejemplo $(x)\,(y)\,(z)\,(x = y \vee x = z \vee y = z)$ en un mundo con dos objetos. De aquí no resta sino un corto paso para llegar a la posición de que en la secuencia de proposiciones $(\exists x_1) \ldots (\exists x_n)\,(x_1 \neq x_2 \wedge \ldots \wedge x_{n-1} \neq x_n)$, comenzamos con tautologías cuando n no es más que el número total de objetos simples y terminamos con contradicciones (véase el libro de Ramsey, págs. 59-61).

En sus lecciones de 1930-3 (*Mind,* Vol. 64, págs. 1-4), Wittgenstein llegó a percatarse, de los dos errores básicos en el *Tractatus,* probablemente bajo el impacto de Brouwer. El primero de ellos concernía a las proposiciones atómicas. 'Decía que ambos, él y Russell, tenían la idea de que las proposiciones no atómicas podrían ser "analizadas" en proposiciones atómicas, pero que no sabíamos aún qué era el análisis... Su concepción actual era que carecía de sentido hablar de un "análisis final" '. Se proponía considerar en cualquier contexto proposiciones no analizadas (más bien que no analizables) como atómicas. El segundo error importante era su análisis de las proposiciones generales como conjunciones. 'Decía que había sido llevado a error por el hecho de que $(x)Fx$ puede ser reemplazado por $Fa \wedge Fb \wedge Fc \wedge \ldots$, sin advertir que la última expresión no siempre es un producto lógico: de que sólo es un producto lógico si los puntos son lo que él llamaba "el punto de comodidad" '.

El ensayo de Ramsey de 1926 contiene una reinterpretación de la teoría simple de tipos bajo influencia de Wittgenstein. Ramsey constató tres errores básicos en *Principia*. En primer lugar, la referida teoría tiende a decir que toda clase tiene una propiedad definitoria. 'El error se comete no por tener una proposición primitiva que afirme que todas las clases son definibles, sino por dar una definición de clase que se aplique solamente a clases definibles, de suerte que todas las proposiciones matemáticas acerca de algunas o todas las clases sean malinterpretadas'. Por el teorema de Löwenheim, en cada sistema formal hay clases indefinibles. Ramsey parece sugerir asimismo la posibilidad de clases absolutamente indefinibles. 'Si hay o no clases indefinibles, es una cuestión empírica; ambas posibilidades son perfectamente concebibles'. En segundo lugar, los *Principia* yerran al no distinguir las paradojas semánticas de las matemáticas. En tercer lugar, el tratamiento de la identidad da lugar a malinterpretaciones por cuanto no define el sentido según el cual se usa realmente el símbolo de identidad. En su recensión del libro de Ramsey (*Mind*, Vol. 40, págs. 476-82), Russell dijo: 'Por mi parte, admito el primero y el segundo de estos defectos, y considero de gran valor la obra de Ramsey sobre estos puntos. ... Con respecto a la identidad, sin embargo, estoy menos convencido'.

La posición de Ramsey es la de un realista que pone en el mismo plano a los conjuntos finitos y a los conjuntos infinitos. En particular, todas las verdades matemáticas son, de acuerdo con él, tautologías (veritativo-funcionales), a veces de infinitas proposiciones. 'Una *función predicativa* de individuos es una función veritativa cualquiera de argumentos, sean finitos o infinitos en número, todos los cuales son, o bien funciones atómicas de individuos o proposiciones atómicas... Admitir un número infinito lleva consigo el que no definamos el rango de funciones como el de aquellas que podrían ser construidas en un cierto modo, sino que las determinemos por una descripción de sus significados' (pág. 39 del libro de Ramsey). De acuerdo con Ramsey, nuestra incapacidad para escribir proposiciones de longitud infinita es, lógicamente, un mero accidente (pág. 41). Desde tal perspectiva, deja de ser indispensable el axioma de reducibilidad, el cual es reemplazado por el axioma de comprehensión, que parece por su forma ser, en buena medida, el mismo, pero que es verdadero, de acuerdo con la posición realista, con respecto a clases o funciones veritativas infinitas. Por otra parte, de acuerdo con la interpretación de los *Principia,* el axioma de reducibilidad no es una contradicción (puede ser verdadero) ni una tautología (puede ser falso). El axioma de elección se comporta del mismo modo en las dos interpretaciones. Que es una tautología en la interpretación realista, se sigue del hecho de que todas las especificaciones determinan clases (de algún tipo dado), puesto que consideramos todas las clases posibles de objetos en cada tipo. A la objeción de que, si el axioma de elección es verdadero, sería demostrable, Ramsey replica, 'Pero no me parece, al menos, inverosímil que hubiese una tautología que pudiese ser establecida en términos finitos, cuya prueba fuese, sin embargo, infinitamente complicada, y, por tanto, imposible para nosotros' (pág. 59). El axioma de infinito sigue siendo motivo de perturbación por causa de la preocupación por los 'individuos' y la negativa a conceder un puesto aparte a los números o construcciones recursivas.

Las observaciones de Ramsey son de poca significación matemática por no arrojar luz sobre cómo pueda probarse con ayuda de medios finitos que el axioma de comprehensión es consistente (cuando hay infinitos objetos de algún tipo dado), o cómo pueda establecerse la cuestión de la independencia del axioma de elección con relación a pruebas (que no sean infinitamente complicadas). Con respecto a los axiomas en la teoría constructiva, puede observarse, en efecto, que el axioma de reducibilidad es falso (porque hay clases de orden superior no coextensivas con clases de órdenes inferiores) y el axioma de elección es verdadero (porque el universo es enumerable y el modelo intuitivo asegura la posibilidad de selecciones mediante clases de orden suficientemente superior).

El tratamiento que hace Ramsey de las paradojas semánticas pone de manifiesto algunas oscuridades en los *Principia*. Considérese la paradoja de Grelling de 'w es heterológica'. Si utilizamos w teniendo por rango símbolos de propiedades y siendo R la relación de nombrar, el predicado es dado por:

$$Hw \equiv (\exists \phi)\ (wR(\phi x) \wedge \sim \phi w).$$

En particular, $H`H' \equiv (\exists \phi)\ (`H'R(\phi x) \wedge \sim \phi`H')$.

Ahora bien, podemos desear argüir que, por el axioma de reducibilidad, existe una función predicativa (en el sentido de los *Principia*) F tal que $Fw \equiv Hw$. Por lo tanto, puesto que $`H'RH$, obtenemos $F`H' \equiv \sim H`H'$, y de ahí $H`H' \equiv \sim H`H'$. Parecería, por ende, que el axioma de reducibilidad reintroduce las contradicciones semánticas. Pero la teoría de tipos no excluye la sustitución de $w$ por $`H'$ o la sustitución de F por H, sino que simplemente guarda silencio respecto de tales discursos. Ello es una indicación de que si deseamos dar un tratamiento unificado de las matemáticas y la semántica, hemos de introducir explícitamente conceptos semánticos y reglas que gobiernen su uso.

En una popular conferencia publicada poco después, Ramsey expresó su desconfianza acerca del axioma de infinito y afirmó de su propia teoría: 'es imposible considerarla como totalmente satisfactoria' (pág. 81). Y, de acuerdo con el editor de su libro, 'en 1929 se había convertido a una concepción finitista que rechaza la existencia de cualquier agregado infinito actual y a la que se alude en alguna de las notas posteriores' (pág. xii).

6. *Verdad Lógica y otras materias filosóficas*

La introducción a la segunda edición (1937) de los *Principles* puede considerarse como un sumario de los puntos de vista de Russell sobre la filosofía de la lógica. El punto central es la verdad lógica y las constantes lógicas, y la conclusión principal es que no ha encontrado una definición adecuada de la lógica.

(1) Críticas del intuicionismo y del finitismo. Son más bien superficiales. En los comentarios, por ejemplo, sobre finitismo, la comprensión del elemento de idealización en la teoría es fallida; la explosión contra esta doctrina parece estar basada en poco más que un mero juego con la palabra 'finitista'. 'Si se admite el principio del finitismo no debemos hacer *ningún* enunciado general sobre una colección que esté definida por sus propiedades y no por la mención real de todos sus miembros.' Pero es bien sabido que las definiciones recursivas y todas las leyes de la aritmética recursiva (primitiva) son perfectamente aceptables de acuerdo con la posición finitista.

(2) Identidad de matemáticas y lógica. La posición básica de Russell parece ser que lógica y matemáticas son idénticas, independientemente del modo en que la lógica y las matemáticas se definan con mayor exactitud, siempre que las definiciones sean razonablemente correctas. En abstracto, tal posición puede ser perfectamente aceptable, puesto que a veces sabemos que A y B son lo mismo sin disponer de una definición adecuada de ambos. En el presente caso, sin embargo, resulta difícil entender la persistencia de Russell en su creencia, en contraste con Frege, Ramsey, Wittgenstein, junto con su inhibición a resolver las numerosas dificultades restantes, que él claramente percibe. En particular, el lugar en lógica del concepto de infinito, que es central en matemáticas, requiere una buena dosis de atención, antes, incluso, de que pueda ser formulado adecuadamente un *enunciado* claro de la posición 'reduccionista'. Una posible teoría, por ejemplo, sería tomar la posición inicial de Ramsey y extender la despreocupación por la diferencia entre finito e infinito a una justificación del axioma de infinito en términos de constructos tales como el de todas las cadenas posibles de asteriscos. Tal posición, sin embargo, habría de suponer que la lógica que es verdadera para conjuntos finitos, automáticamente es apli-

cable también a conjuntos infinitos. Pero esta teoría es muy opuesta al punto de vista constructivo de Russell.

(3) Construcción lógica y platonismo. El platonismo inicial de Russell, en particular en lo que respecta a clases, ha sido abandonado en la teoría de las descripciones, la abolición de las clases (en favor de los atributos), y la definición de Whitehead de espacio, tiempo y materia como clases de eventos. Este mantenimiento de la filosofía constructivista es algo incompatible con la manifiesta aprobación de Russell de la teoría original de Ramsey, que es tan no-constructiva como lo pueda ser cualquier filosofía de la matemática.

(4) Verdad lógica y constantes lógicas. Es ésta una cuestión central, que parece reclamar un comentario amplio.

Según Russell, una proposición lógica debe tener una generalidad completa y debe ser verdadera en virtud de su forma. Con excepción de las constantes lógicas, en la expresión verbal o simbólica de las proposiciones lógicas no ocurre constante alguna. Por ejemplo, podemos considerar el silogismo tradicional más o menos reformulado: 'Si todos los placeres son transitorios y la inmortalidad es un placer, entonces la inmortalidad es transitoria'. Este es, según Russell, verdadero en virtud de su forma, pero no completamente general, ya que contiene las palabras 'placer', 'transitorio', 'inmortalidad'. Si reemplazamos estas palabras por variables adecuadas, entonces obtenemos el enunciado: 'Con independencia de los valores posibles que *S, P* y *M* pueden tener, si todos los *M* son *P* y *S* es un *M,* entonces *S* es *P*', que representa para Russell una proposición de la lógica.

Surgen al menos dos cuestiones: qué sean las constantes lógicas, y si todas las sentencias verdaderas (o, más bien, válidas), en las que todas las constantes sean constantes lógicas, son verdades lógicas.

Según Russell, 'tras los últimos esfuerzos por reducir el número de elementos indefinidos del cálculo lógico, nos encontraremos con dos (cuando menos) que parecen indispensables: uno es la incompatibilidad; el otro es la verdad de todos los valores de una función proposicional' (pág. xi). En otras palabras, las dos son la o-exclusiva y la cuantificación universal. Ello permite marginar la relación de membrecía que puede ser considerada razonablemente como radicada más allá del dominio de la lógica. Sin embargo, Russell, presumiblemente, cree que la predicación, simbolizada mediante concatenación de modo que tengamos yx en lugar de $x \in y$, no ha de ser considerada como un primitivo adicional, sino que desempeña el papel de la relación de membrecía. Tal punto de vista induciría a error puesto que necesitamos para la predicación axiomas especiales que no son requeridos por la naturaleza de la o-exclusiva y la cuantificación universal.

En todo caso, parecería necesitarse algún criterio para separar las constantes lógicas de las constantes no lógicas. Russell dijo, en una ocasión, que una constante lógica es algo que permanece constante en la expresión verbal o simbólica de una proposición aun cuando se cambien *todos* los *constituyentes* de la proposición. También dijo que una constante lógica fundamental sería lo que hay de común entre un número de enunciados, cada uno de los cuales puede obtenerse de cualquier otro mediante sustitución de unos términos por otros. Así tan sólo se reduce el problema a las cuestiones igualmente complejas de que sean los términos o constituyentes de las proposiciones.

En el *Tractatus* se sugiere que en una notación adecuada (en un lenguaje ideal) las constantes lógicas serían semejantes a signos de puntuación o paréntesis (4.441, 5.4, 5.4611, 5.474). Está claro, pues, que no les corresponde constituyente (objetos o complejos de objetos) alguno; no existe 'objeto lógico' alguno. Esta sugerencia puede ayudar en la selección de constantes lógicas si existe un criterio independiente para las notaciones adecuadas. En otro caso, puede racionalizarse cualquier selección arbitraria estipulando *ad hoc* que una notación es adecuada si, y sólo si, representa dichas palabras mediante signos similares a los signos de puntuación y paréntesis.

Supuesto que la primera cuestión ha sido respondida en mayor o menor grado, queda la segunda. Ya en *Math. Philosophy* (1919) Russell comenzó a ser consciente de que la ausencia de constantes no lógicas, si bien es condición necesaria de las proposiciones de la lógica, no es condición suficiente. El contraejemplo de Ramsey es: 'cualesquiera cosas difieren cuando menos en treinta aspectos'. Si no se exige respecto de la verdad lógica alguna propiedad adicional, al parecer se vería uno conducido a un punto de vista aireado en cierta ocasión por Quine (*Mind,* 1953, pág. 436): el de que todo enunciado que ejemplifique una forma enunciativa válida que no contenga constante no lógica alguna, es lógicamente verdadero, con la consecuencia de que habríamos de aceptar como verdades lógicas determinados enunciados cuya verdad depende del tamaño del universo.

Si no queremos aceptar esta consecuencia, necesitamos una propiedad adicional, *tautológica* según el primer Wittgenstein y Ramsey, y *analítica* según otros muchos. La noción natural de *tautológico* es 'verdadero en todos los mundos posibles'. Sobre tal base se desarrolla en el *Tractatus* una teoría más bien sugestiva, que parece explicar plenamente las leyes de la teoría de la cuantificación con identidad. Cuando llega a una teoría de clases, Ramsey, como antes indicábamos, introduce de nuevo el tamaño del universo en conexión con el axioma de infinito.

Tanto Russell como el primer Ramsey parecen creer que no se puede construir las matemáticas ordinarias a menos que supongamos no sólo la existencia de individuos en el mundo, sino también la de un número infinito de ellos. Ya que estamos lo suficientemente seguros de que, con independencia de cuantas cosas haya en el mundo físico, n será siempre diferente de $n + 1$, la consecuencia natural a concluir es la de que toda teoría que haga depender esto de una hipótesis empírica sobre el mundo debe ser errónea. El infinito debe surgir de alguna otra parte. De hecho, es la dificultad de dar una explicación adecuada del infinito en términos de conceptos estrictamente lógicos lo que hace sumamente dudosa la tesis de Russell de identificar lógica y matemáticas.

7. *Definiciones predicativas y el principio del círculo vicioso*

(1) Formulación del principio. El problema de formular el principio correcta y claramente no es menos complejo que el de su justificación. Si nuestro propósito es determinar todos los principios aceptables de existencia de clases, surge

el problema de si tenemos que excluir todas las definiciones que violan el principio del círculo vicioso o si somos libres para incluir también definiciones que puedan justificarse por otros fundamentos generalmente aceptados. Idealmente sería más escrupuloso usar el principio como la única guía o al menos aislar el dominio de todas las definiciones justificables mediante el principio exclusivamente. Esta última tarea no es tan fácil, particularmente porque el principio es esencialmente negativo en la medida en que dice directamente tan sólo qué definiciones han de excluirse como ilegítimas. De aquí que, en la práctica no esté siempre claro cuándo es aplicable el principio.

En los *Principia,* el principio se formula esencialmente del siguiente modo (pág. 37).

(1a) El principio del círculo vicioso. Ninguna totalidad puede contener miembros definibles solamente en términos de dicha totalidad; cualquier cosa que sea definible solamente en términos del total de una colección no debe ser un miembro de la colección.

Esta formulación es sumamente ambigua. Algunas de las ambigüedades podrían resolverse examinando la teoría positiva propuesta por Russell, otras exigen diversos grados de análisis ulteriores.

Un dominio finito, determinado, de objetos no presenta una seria dificultad teórica. La primera noción interesante para las matemáticas es el concepto general de finitud.

(2) El concepto de finitud. Este es presupuesto de diversos modos en la teoría ramificada de tipos russelliana. (i) En la descripción sintáctica de la teoría tenemos que hablar de todos los órdenes finitos *n* y, dentro de cada orden, tenemos que pensar en todas las combinaciones finitas obtenibles mediante funciones de verdad y cuantificaciones. (ii) La definición de la función sucesor presupone un número finito de aplicaciones reiteradas. (iii) Incluso el axioma de infinito construido en términos de un mundo físico ha de presuponer que el concepto de finitud tiene significado.

De hecho, el hablar de infinito a través de individuos (en lugar de alguna forma de idealización abstracta) parece estar descaminado. Russell parece desear distinguir la comprensión del concepto general de finitud del supuesto de la existencia de infinitos objetos. Esto es perfectamente razonable si pensamos en objetos físicos. Sin embargo, es completamente fútil tratar de desarrollar las matemáticas sobre una base así. Realmente, la reducción de la aritmética a la lógica, tal como Russell la planeó y la llevó a cabo, es, de un modo enteramente definido, un fallo.

Russell se opone a la unión de todas las clases obtenidas a partir de la clase vacía o tomando repetidamente la clase unidad $\{x\}$ de cada clase dada x, sobre la base de tipos impuros y engorros de un conjunto universal. Tales objeciones no son válidas contra una teoría de tipos ramificada divorciada de los otros aspectos separables del sistema russelliano. Podemos, por ejemplo, comenzar con * y considerar una clase A tal que (i) $* \in A$; (ii) $x \in A \supset x * \in A$.

La dificultad aquí está en la variable x. Nos gustaría decir que x tiene por rango (a), la clase constituida por * y todas y solamente todas las cadenas obtenidas de x mediante cualquier número *finito* de aplicaciones de la operación de añadir un * a una cadena dada. Esto presupondría el concepto de finitud. Alternativamente, podemos decir que hay muchas clases A que satisfacen (i) y (ii) ya que no hay nada que excluya cosas extrañas. A fin de obtener una definición podríamos hablar de la clase más pequeña que satisface (i) y (ii). Pero entonces la definición ya no es predicativa. Por otra parte, si aceptamos el concepto de finitud como dado, podemos tomar (a) como la definición de A.

Si trasladamos la carga a la regla de formación, podemos decir: (i) * es un término; (ii) si x es un término, x^* es un término. Podemos también usar como axiomas los enunciados verdaderos: (iii) $x^* = y^* \supset x = y$; (iv) $x^* \neq *$. Entonces podemos definir clases mediante condiciones tales como: (v)$** \in B$; (vi) $x \in B \supset x^{**} \in B$.

No hay enunciación explícita en el principio del círculo vicioso de si las definiciones recursivas son aceptables. Por otra parte, podemos argumentar que, puesto que entendemos la finitud y las definiciones recursivas de algún modo, son aceptables y no violamos el principio. Por otra parte, se puede indicar que una definición explícita de $x \in B$ tendrá el aspecto de (A) $((** \in A \wedge (z)\,(z \in A \supset z** \in A)) \supset x \in A)$, que es obviamente impredicativa. Si reemplazamos $z \in A$ por $(z \in A \wedge z \neq x)$, tendríamos la comodidad de que la variable A puede tomarse de modo que tenga como rango sólo clases finitas y de aquí que no necesitemos incluir B que es una clase infinita.

Si dejamos de lado el tabú sobre tipos mixtos, que no tiene nada que ver con el principio del círculo vicioso, parece que Russell desea aceptar una teoría de clases finitas. Puesto que sabemos que es posible desarrollar la aritmética sobre tal base, podemos entonces generalizar el mecanismo anterior para obtener al menos conjuntos recursivos de números.

El problema central es llegar predicativamente a variables que tengan como rango (la totalidad de las) clases finitas o números naturales. Si estamos de acuerdo en que o es un término y en que $j\,(x, y)$ es un término si x e y lo son, y usamos como axiomas $x \in o \equiv x \neq x$, $z \in j\,(x, y) \equiv (z \in x \vee z = y)$, parece que estamos seguros de que el rango R de las variables incluye todas las clases finitas construidas a partir de o; ¿hay justificación para pensar que la colección C de todas estas clases finitas no es una totalidad ilegítima?

El principio (1a), no parece proporcionar una respuesta explícita a esta pregunta, aunque es más verosímil que Russell no estuviera atormentado con respecto a la posibilidad de que R pudiera ser mayor que C. Esta cuestión de las interpretaciones no pretendidas o de los modelos no standard obviamente no es relevante para nuestra cuestión. Pero el que la manera familiar de excluirlos use una definición impredicativa nos hace sospechar de la legitimidad de C. Nos vemos llevados a preguntar si hay algún modo, sea el que sea, de introducir un total infinito sin violar el principio del círculo vicioso.

Cualquiera que pueda ser la solución, ciertamente deseamos buscar un total infinito como base para la ulterior construcción. Y un total como C es ciertamente inaceptable, aunque se considere que viola (1a), puesto que entendemos el concepto de finitud. En vista del hecho de que podemos llegar al total C y a la colección N de números mediante este concepto, no tenemos que elegir el modo particular de introducir estos totales que resultan violar (1a). Y la conclusión que obtenemos es que *C* y *N* son totales legítimos sobre cuya base podemos proyectar ulteriores definiciones predicativas.

Los que rehusen aceptar esta conclusión tendrán que hablar de predicatividad relativa a números naturales. Existe también un problema similar con respecto a las definiciones inductivas en general (véase más adelante).

Hay un tema marginal interesante que nos parece particularmente relevante para la cuestión de la predicatividad. Una vez que tenemos *C* o *N*, podemos obtener definiciones predicativas para todos los predicados aritméticos mediante el uso de cuantificadores y un pequeño número de predicados iniciales simples. Sin embargo, las definiciones recursivas y todas las variables libres aritméticas pueden desarrollarse con letras esquemáticas (en lugar de variables) de manera que los modelos no standard no afectan sus interpretaciones en la medida en que los predicados se aplican a los números standard. Ello es así porque la igualdad hace únicas las denotaciones de cada guarismo y los números no naturales no pueden interferir. Esto no es cierto de los predicados aritméticos en general porque los números no naturales pueden desordenar la interpretación de los cuantificadores de modo que, por ejemplo, 3 puede satisfacer una condición definitoria en un modelo y puede no hacerlo en otro. Así, obtenemos una interesante característica distintiva de las definiciones recursivas, que es idóneamente llamada por Kreisel "presuponer potencialmente tan solo totalidades infinitas". Sin embargo, esta distinción más refinada no parece ser relevante para la cuestión de la predicatividad según la cual, una vez que disponemos de un total, somos libres de usar variables ligadas que lo tengan como rango. Es, de algún modo, rebuscado argüir que la variación en los modelos no-standard sirve para perturbar la constitución de un predicado aritmético *A* y, por tanto, *A* no es definido predicativamente. Más bien los modelos minimum o standard para los rangos de variables se suponen en la construcción de una teoría y son únicamente las malas perturbaciones las que nos fuerzan a cambiar los rangos previos de modo que ya no podamos sujetarnos a un modelo minimum. Desde el punto de vista formal hay un claro contraste entre una definición de algunos conjuntos numéricos que contienen sólo cuantificadores de número frente a una especificación en la que hay cuantificadores que tienen como rango conjuntos numéricos arbitrarios.

(3) Las definiciones y su orden. La noción relevante de definición no es el uso de una abreviatura para la cual todo lo requerido es un procedimiento mecánico de eliminación única de la expresión definida. Por una razón, tales abreviaturas no atienden al punto de partida y usualmente no permiten la posibilidad de infinitas abreviaturas precedentes. El concepto de definición que está bajo consideración es más estricto que la categoría general de especificación que es enteramente neutral para el sabor constructivo que deseamos preservar. Por un lado, para ser pedantes, nos gustaría decir que una definición impredicativa de un conjunto numérico no es una definición, sino una especificación relativa a un modelo realista preconcebido. Por otro lado, no tenemos nada que objetar contra la persona más alta de la habitación o el número perfecto más pequeño, supuesto que hayamos de algún modo obtenido la clase de las personas que están en la habitación y la clase de los números. Nos gustaría decir que estas son especificaciones impredicativas de objetos que fueron definidos predicativamente al comienzo.

Desde un punto de vista clásico, se podría desear decir que aquí también estamos interesados sólo por las especificaciones y que el principio del círculo vicioso solamente distingue un tipo de especificación de los otros tipos. Exigimos, no obstante, que las definiciones predicativas estén de algún modo bien ordenadas de manera que cada clase se defina mediante una condición de membrecía en la que los valores de todas las variables estén limitados a cosas introducidas por definiciones anteriores en la buena ordenación. Se sigue que una definición ulterior no perturba una definición anterior; si una definición *A* contiene variables ligadas con un rango que incluye cosas que deben definirse en *B*, entonces la clasificación determinada por *A* tiene que ser ajustada por lo determinado por *B* y, en general, hay complicadas cuestiones con respecto a la satisfacción simultánea de un grupo de condiciones. Por ejemplo, según Russell, "el menor entero no nombrable en menos de diez y nueve sílabas" denota 111.777 en la clasificación de acuerdo con los nombres ingleses de enteros, pero el nombre anterior contiene sólo diez y ocho sílabas.

El orden no puede construirse literalmente como un orden temporal y los números ordinales son de importancia central.

Si se supone que comenzamos con ordinales arbitrarios, no se puede llegar a obtener un modelo para la totalidad de la teoría de conjuntos, como hace Gödel. Naturalmente, con ordinales superiores la impredicatividad es intrínseca, al menos en la medida en que lo sabemos. Para el propósito de una teoría de conjuntos predicativa usamos sólo los ordinales inferiores y empezamos por los números naturales.

Una vez que pretendemos asumir los números naturales sobre un nivel sintáctico y conceptual, cosa que Russell hace sin admitirlo en modo alguno, el problema de la inducción matemática ya no es difícil. En cuanto a los números reales, podemos también obtener teoremas standard tales como el teorema de la mínima cota superior (la cortadura de Dedekind) tomando la unión en los ordinales límite.

Quedan las cuestiones de los ordinales admisibles, definibilidad *versus* demostrabilidad y definiciones inductivas.

(4) Ordinales admisibles: expansiones automáticas; verdad y conocimiento. Para obtener los ordinales, tenemos que poseer una teoría que a su vez dependa de los ordinales. En 1954 (*J. Symbol. Logic,* pág. 261), el autor sugirió que tomemos todos los ordinales *definibles* en un sistema dado y luego usemos estos ordinales para hacer nuevos sistemas. Esta idea de "acumulación" tiene un cierto atractivo conceptual. Se entrevió una extensión automática alternativa entre ordinales y sistemas. La ambigua palabra ordinal "definible" se tomó como significando el tipo ordinal de cualquier predicado que aparezca en un sistema que resulta ser bien ordenado. En 1955, Spector probó un resultado que implica que el anterior proceso de expansión en un sentido definido se detiene con los ordinales recursivos y los conjuntos hiperaritméticos.

En términos formales, se puede modificar ligeramente la teoría de conjuntos de Bernays para obtener un sistema formal como codificación de la teoría. La modificación que se necesita es asegurar que en los axiomas generales se evitan variables de conjuntos generales ligadas en favor de variables que tienen por rango conjuntos determinados previamente.

Kreisel exige que, para que un ordinal sea aceptable, debe reconocerse (probarse) que la buena ordenación correspondiente es una buena ordenación en el sistema predicativo dado. Esto naturalmente plantea la cuestión de cómo un sistema predicativo, que no contiene variables sobre conjuntos arbitrarios de ordinales, puede expresar con verdad la propiedad de ser una buena ordenación. Aparentemente Kreisel tiene maneras de salvar esta dificultad y él y otros han obtenido interesantes resultados a lo largo de la línea que se pone bajo el nombre de "progresiones autónomas".

La cuestión más general es si en la caracterización de la definición predicativa habría que imponer el requisito de conocimiento sobre la verdad anterior. Un problema enteramente paralelo ha surgido en conexión con las definiciones recursivas: si deberíamos exigir que la recursividad sea demostrable constructivamente. En ambos casos, parece razonable desarrollar ambas interpretaciones. En el caso de las definiciones predicativas al menos se podría argüir que la cuestión de la definibilidad es primariamente una cuestión de verdad y debería separarse la cuestión de la recognoscibilidad. En alguna medida, es posible tener una concepción de la definición predicativa divorciada del requisito de demostrabilidad.

Esta misma cuestión surge también con respecto a reconocer que una definición inductiva propuesta es realmente una definición.

(5) Definiciones inductivas. En una definición inductiva general los cuantificadores ya disponibles (por ejemplo, los números supra naturales) son permitidos. Uno está tentado a decir que éstos son aceptables porque la única parte que se pierde es la cláusula extrema "nada más", que entendemos completamente bien. Aquí, de nuevo, el modo standard de tomar la más pequeña (la intersección) de todas las clases

que satisfacen la condición inductiva nos deja de lleno en abierta impredicatividad.

Precisamente como en el caso de todas las clases finitas podemos, por ejemplo, dar una definición explícita de la clase de los ordinales recursivos usando variables que tengan por rango todas y sólo las clases hiperaritméticas. De hecho, esto parece un fenómeno completamente general: podemos, en lugar de emplear la intersección de las anteriores, emplear la unión de las posteriores. Esta situación lleva a otra ambigüedad en el principio (1a).

Dado que podemos definir cada clase hiperaritmética (o finita) predicativamente, ¿hay justificación para introducir variables que tengan como rango todas estas? Parece que esto es aceptable porque cada miembro de la clase CH de todos los conjuntos hiperaritméticos es definible sin usar el CH total, aunque la propiedad abstracta de ser-un-miembro-de-CH no puede definirse sin usar de algún modo CH misma. Puesto que CH no contiene ningún miembro definible sólo en términos de CH, el principio (1a) no se viola.

En conexión con las definiciones inductivas existe de nuevo la cuestión de reconocer que lo que parece por su forma una definición inductiva tiene realmente un modelo minimum. Es de interés tratar de encontrar condiciones sintácticas suficientes (y preferiblemente también necesarias) bajo las cuales una fórmula propuesta dé una definición inductiva. Sin embargo, podemos de nuevo aislar las cuestiones de verdad y recognoscibilidad y admitir que si una fórmula resulta ser una definición inductiva, es predicativamente aceptable, aunque pudiéramos no tener ningún método disponible para reconocer que es realmente una definición inductiva.

En general, no estamos, en nuestra discusión, siguiendo a Brouwer al usar el concepto de pruebas constructivas, que introduce otras cuestiones interesantes sobre las definiciones inductivas centradas en torno a su teorema de la barra.

Pretendemos considerar las definiciones predicativas dentro del más amplio entramado de la teoría clásica de conjuntos. De aquí que sea también posible hacer uso de conceptos clásicos más drásticamente al tratar de determinar el rango de conjuntos predicativos. Algunas propuestas de este tipo han sido sugeridas en algún otro lugar, pero no serán consideradas aquí.

(6) Justificación del principio del círculo vicioso. Si uno supone que las clases están ahí desde el mismo punto de partida, justificado por otras razones tales como una intuición semicombinatoria, el principio sirve sólo para separar un tipo interesante de clase, comparable a, digamos, los primos entre los números. Gödel ha argüido que objetivamente el principio no es verdadero.

Desde un punto de vista constructivo, o desde una posición nominalista según la cual los nombres sean introducidos en algún orden (aunque los ordinales pueden ser más que nombres), se puede considerar el principio como establecido sobre la base de que no tenemos modo constructivo de ir más allá de él. La cuestión de acomodar las secuencias de libre elección de Brouwer, no obstante, puede quizás significar una inadecuación del principio. [1]

Universidad de Harvard.

Versión castellana de E. CASABÁN y E. GARCÍA

[1] Este artículo fue preparado en Abril de 1963 para un *Festschrift* en honor de Lord Russell, por invitación de Mr. Ralph Schoenman, editor. Ha transcurrido casi un año antes de que finalmente se hiciese claro que el editor y este contribuyente particular no serían capaces de ponerse de acuerdo sobre lo que es adecuado para un *Festschrift*. Se piensa que quizás haya personas que encontrarán en este trabajo un tributo apropiado a un gran intelectual.