INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN INFANTIL Y PRIMARIA[34]

RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION IN EARLY CHILDHOOD EDUCATION AND PRIMARY

Sierra, T.A.[1], Gascón, J.[2]

[1]Departamento de Didáctica de la Matemáticas, UCM

[2]Departament de Matemàtiques, UAB

Resumen. *En este trabajo revisamos algunas de las investigaciones más relevantes en Didáctica de las Matemáticas relativas a los niveles de Educación Infantil y Primaria y realizadas en las últimas décadas. En primer lugar abordaremos los trabajos presentados en la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) desde el año 1997 hasta 2010 atendiendo al contenido matemático tratado. En segundo lugar haremos una revisión de algunas de las contribuciones llevadas a cabo bajo diferentes enfoques teóricos dentro del PME (The International Group for the Psychology of Mathematics Education) durante los últimos 30 años, y otras no presentadas en el PME y realizadas respectivamente en los ámbitos de la Teoría de las Situaciones Didácticas, el Enfoque Ontosemiótico o la Teoría Antropológica de lo Didáctico.*

Palabras clave. Investigación en Educación Matemática, Educación Primaria, Educación Infantil, PME, Teoría de Situaciones Didácticas, Enfoque Ontosemiótico, Teoría Antropológica de lo Didáctico, Simposios SEIEM.

Abstract. *This paper reviews some of the most relevant research in Mathematics Education relating to levels of Primary Education (between the ages of 3 and 12) carried out in recent decades. First we will address the papers presented at The Spanish Society for Research in Mathematics Education (SEIEM) since 1997 to 2010 taking into account the mathematical content treaty. Secondly we will review some of the contributions carried out under different theoretical approaches within the PME (The International Group for the Psychology of Mathematics Education) for the past 30 years, and others not presented in the PME and held respectively in the fields of the Theory of Didactic Situations, the Onto-semiotic Approach or the Anthropological Theory of Didactics.*

Keywords. Research in Mathematics Education, Elementary Education, Early Childhood Education, PME, Theory of didactical situations, onto-semiotic approach, Anthropological Theory of Didactics, Symposia SEIEM.

---

[34] Trabajo realizado dentro del Proyecto EDU2008/02750, Plan Nacional de I+D+I (2008-2011).

1. INTRODUCCIÓN

Ante el encargo de llevar a cabo una revisión de las investigaciones realizadas en didáctica de las matemáticas a lo largo de los últimos 20 años, en los niveles de Educación Infantil y Primaria, se puede responder de diversas formas. Se podría, por ejemplo, hacer un listado de trabajos clasificados por el año de realización o bien por autores o grupos de trabajo y, a continuación, clasificarlos según diferentes criterios. Entre dichos criterios pueden citarse los que se basan en:

(a) Los *contenidos matemáticos* que están involucrados en cada uno de los trabajos.

(b) El *enfoque teórico* en didáctica de las matemáticas o paradigma utilizado.

(c) La *metodología de investigación* a la que se recurre en cada caso para abordar el problema didáctico planteado.

(d) La amplitud y la naturaleza del *ámbito institucional* y de la *actividad matemática* que el problema didáctico planteado toma en consideración.

Mientras que el criterio (c) se utilizará en otro de los Seminarios de este Simposio, en este trabajo utilizaremos parcialmente los criterios (a) y (b) y propondremos para terminar el (d) como punto de partida de una futura línea de investigación relacionada con el cada vez más urgente "diálogo" entre teorías o enfoques teóricos en didáctica de las matemáticas.

2. CONTENIDO MATEMÁTICO DE LAS INVESTIGACIONES DIDÁCTICAS PRESENTADAS EN LOS SUCESIVOS SIMPOSIOS DE LA SEIEM (1997 – 2010)

Sin pretender ser exhaustivos, intentaremos revisar brevemente las principales aportaciones presentadas en los diferentes Simposios de la SEIEM desde el año 1997 hasta el 2010. A lo largo de estos 14 años se han presentado en torno a 6 trabajos que hacen referencia al nivel de Educación Infantil (EI) y 26 relativos al nivel de Educación Primaria (EP).

2.1. Investigaciones relativas a la Educación Infantil

De los 6 relativos a la EI, uno de ellos (Giménez, Ruesga, Orozco 2003) trata sobre la equilibración y la introducción de tareas de transformación mediante flechas en EI. En él se estudian las diferentes respuestas de los niños de Infantil cuando se les plantean tareas en modo directo y en modo inverso.

Del resto trabajos presentados, cuatro versan sobre el número en EI y uno sobre el aprendizaje de la geometría en EI.

Fernández (2002) tiene como objetivo realizar una modelización de las competencias ordinales de los alumnos de EI mediante entrevistas clínicas.

Lacasta &Wilhelmi (2008) analizan la introducción de las nociones conjuntistas en EI durante la reforma de los años sesenta y su influencia en la enseñanza del número, señalando algunos de los fenómenos didácticos originadas por dicha reforma.

Salgado & Salinas (2009) analizan el tratamiento que hacen del número los manuales de Educación Infantil con el objetivo de ver si, a través de las actividades propuestas en los libros de texto, se tratan los contenidos establecidos en el currículo.

Núñez, Castro, del Pozo & Mendoza (2010) pretenden con este trabajo, que se halla en fase inicial de desarrollo, la elaboración y progresivo refinamiento de un *producto curricular* (el taller de problemas), dentro de un esfuerzo más amplio por desarrollar el currículo matemático de Educación Infantil.

Para ello, utilizan un modelo de *investigación de diseño*, utilizando como modelo teórico de partida la "Enseñanza de enfoque cognitivo".

Se plantean las siguientes cuestiones: *¿Cómo ayudar a los niños en la transición de estrategias de modelización directa a las de conteo, y de éstas a las de uso de hechos numéricos? ¿Cuál es el papel de materiales manipulativos y recursos didácticos como la 'banda numérica' en estas transiciones? ¿Qué edad es la adecuada para comenzar este tipo de trabajo? ¿Cómo favorecer el inicio de niños de 4-5 años en este tipo de actividad?*

Para abordarlas comienzan el *diseño* de un taller para niños de 4-5 años poniendo especial atención en el uso de materiales didácticos y en las representaciones infantiles de cantidades, y cuidando aspectos afectivos y cognitivos del trabajo en estas edades, para lo que deciden introducir la literatura infantil.

Participan en la investigación 55 niños y niñas pertenecientes a los tres grupos de 2º curso del 2º ciclo de Educación Infantil (4 años).

El taller se desarrolla en tres fases: lectura de la carta (contextualización y comprensión del problema), trabajo individual (búsqueda de solución) y puesta en común y búsqueda de consenso sobre resultado y estrategia.

Wilhelmi & Lacasta (2007) muestran una experiencia que busca la deconstrucción del *modelo epistemológico centrado en técnicas aisladas y terminadas de resolución de problemas* de las matemáticas de las estudiantes para Maestro de Infantil, para el caso de la geometría, y la determinación de un *modelo epistemológico* basado en la modelización del saber utilizada en el marco de la Teoría de las Situaciones Didácticas. La experiencia se ha realizado con 49 estudiantes de una asignatura de Didáctica de las Matemáticas, de 30 horas lectivas, de tercer curso de la diplomatura de Maestro de EI. Las estudiantes después del proceso de enseñanza deben elaborar situaciones didácticas, modelizadas según el esquema propuesto durante dicho proceso, donde se muestre los papeles, que juegan la maestra y los niños, y la función de las matemáticas como instrumento de resolución de problemas.

2.2 Investigaciones relativas a la Educación Primaria

2.2.1 Números en la Educación Primaria

En lo que se refiere a investigaciones en Didáctica de las Matemáticas sobre los números en la EP tenemos 5 trabajos en total.

En uno de ellos (Ortiz, 1998), el objetivo general es analizar la naturaleza y evolución del razonamiento inductivo numérico en alumnos de EP mediante entrevistas semiestructuradas.

Otros dos tratan sobre la numeración. En el primero de ellos (Salinas, 2007) se analizan las dificultades que surgen en el aprendizaje del valor posicional de las cifras del sistema de numeración posicional. En particular, se señalan los errores que cometen tres grupos de estudiantes para Maestro de diferentes planes de estudio, cuando se les plantean cuestiones en torno a dicho sistema. En el segundo (Bosch, Gascón & Sierra, 2009) se realiza un análisis de manuales utilizados en la formación de Maestros en España en torno a los sistemas de numeración. Para ello se empieza proponiendo un Modelo Epistemológico de Referencia del desarrollo de los sistemas de numeración, que no es otra cosa que un modelo relativo y provisional, una hipótesis elaborada desde la didáctica, que sirve de referencia para dicho análisis y permite escapar de las restricciones o condicionantes que conlleva el proceso de transposición didáctica.

Hay, también, otros dos trabajos en torno a los números racionales, por un lado el trabajo de Escolano (2001) donde se presenta un estudio de tipo exploratorio e interpretativo, en el que se evalúa una experiencia de aula dentro del enfoque de Investigación-Acción con el mismo grupo de alumnos, en 4º y 5º de Primaria, en torno a las fracciones y los números decimales. Por otro, el de Perera & Valdemoros (2007) en el que se realiza un estudio de carácter cualitativo sobre los efectos producidos por una propuesta didáctica sobre las fracciones en un grupo de 30 alumnos de 4º de Primaria de una escuela mejicana. Dicha propuesta, que ha sido realizada dentro del marco de la Matemática Realista, utiliza situaciones y experiencias de la propia vida de los alumnos.

2.2.2 La resolución de problemas en la Educación Primaria

Hay 6 trabajos sobre la resolución de problemas en la EP. Dos de ellos tratan sobre la clasificación de problemas aditivos (González, 1997 y Socas, Hernández & Noda, 1997). En el primero se clasifican los problemas atendiendo a sus estructuras numérica y semántica global y en el segundo se aporta una clasificación de los problemas aritméticos verbales elementales con el objetivo de ampliar el marco teórico existente hasta ese momento y mostrar que los números enteros son un buen modelo para caracterizar el campo conceptual de las magnitudes discretas mientras que las categorías de cambio, combinación y comparación son pertinentes para la clasificación de problemas.

Castro, Castro, Rico, Gutiérrez, Tortosa, Segovia, González, Morcillo & Fernández, (1997) analizan los problemas aditivos compuestos de dos o más pasos con el fin de determinar cuáles son sus variables estructurales y ver qué influencia tienen éstas en las dificultades que surgen al resolverlos.

Noda & Bruno (2009), describen entrevistas realizadas a alumnos con síndrome de Down. En ellas se les propone resolver problemas aditivos simples y cálculos aditivos y sustractivos para analizar las dificultades con las que tropiezan y los errores que cometen en sus estrategias, con la finalidad de proponer metodologías adecuadas que les ayuden a avanzar en su aprendizaje.

Molina & Ambrose (2010) exploran la relación entre el lenguaje y las matemáticas. Se plantea a un grupo de alumnos latinos la resolución de un conjunto de problemas formulados en inglés y en español con el fin de analizar si tienen más éxito en la resolución de problemas en su lengua materna o si su éxito es el mismo en ambas lenguas.

Por último, en Ayllón, Castro & Molina (2010) se recoge un estudio de caso donde se analiza la actuación de dos niños de 1º EP al responder a cuestiones y resolver problemas. Se pretende obtener cuál es el conocimiento informal de los alumnos sobre la noción de problema, cuál es el papel que juegan los números en un problema y qué factores influyen sobre el grado de dificultad de un problema.

2.2.3 La geometría en la Educación Primaria

Hay 5 trabajos relacionados con la enseñanza-aprendizaje de la geometría en EP.

Fiol (1999) plantea un problema de carácter general: *¿Cómo garantizar una óptima relación entre la enseñanza-aprendizaje de la geometría y el desarrollo cognitivo de los alumnos de 6 a 12 años?*

Guillén, Sáiz, Figueras & Corberán (2003) presentan tres ítems de un cuestionario diseñado para valorar si la geometría enseñada se corresponde con la que aparece el currículum de Primaria de las escuelas de algunos estados de Méjico.

Además hay dos investigaciones que consisten en estudios exploratorios sobre la enseñanza de la geometría. Una de ellas, (Figueras & Guillén, 2004), contiene un trabajo, que se enmarca dentro de la formación del profesorado, donde se describe una segunda versión de un cuestionario, administrado a 20 maestros en ejercicio, elaborado para analizar la situación de la enseñanza de la geometría en algunas escuelas mejicanas de Primaria. Y en la otra, Guillén & Figueras (2005) presentan las creencias y concepciones de 20 maestros mejicanos en ejercicio relacionadas con la enseñanza de la geometría de los sólidos y con los contenidos que imparten en sus clases. Las creencias y concepciones han sido obtenidas a partir de un estudio exploratorio llevado a cabo durante las actividades realizadas en un curso taller.

El quinto trabajo es de Climent & Carrillo (2005) y aborda un estudio comparativo, desde una perspectiva cualitativa y cuantitativa, sobre la enseñanza de los polígonos en 6º de Primaria en cuatro países (Bélgica, Hungría, España e Inglaterra). La docencia analizada ha sido llevada a cabo por un maestro de cada país y ha sido considerada por los investigadores como ejemplo de buenas prácticas en su contexto.

2.2.4 Razón, proporción y proporcionalidad en la Educación Primaria

Puig & Fernández (2002) se plantean el problema de la enseñanza y aprendizaje de la razón, proporción y proporcionalidad el 2º y 3º ciclo de Primaria y lo abordan utilizando el marco teórico de los Modelos Teóricos Locales. Dicho marco teórico tiene cuatro componentes: La componente de competencia formal que elaboran mediante el análisis fenomenológico de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad. La componente de cognición y comunicación que se lleva a cabo con una revisión bibliográfica atendiendo a los problemas, las actuaciones de los alumnos y las variables que afectan a dichas actuaciones. Aquí la componente de comunicación se limita a la forma como se presentan a los alumnos las tareas. Y en la componente de enseñanza se tienen en cuenta dos diseños curriculares (el nacional y el autonómico), los libros de texto de primaria de Matemáticas y de Ciencias Sociales. Luego llevan a cabo una experimentación donde tienen en cuenta dos partes: el estudio de los grupos de los alumnos en el aula y el estudio de casos de alumnos seleccionados. Para realizar el análisis y clasificación de las actuaciones utilizan el modelo de interpretación de comportamientos construido en anteriores investigaciones sobre razón y proporción en Méjico.

2.2.5 La optimización y la medida en la Educación Primaria

Lacasta, Malaspina, Pascual & Wilhelmi (2009) se plantean la cuestión siguiente: *¿Es posible construir una situación de optimización en el tránsito del número natural a la medida a partir de los conocimientos escolares propios del primer ciclo de EP?* Más tarde, reformulan la cuestión para buscar cuáles deben ser características de dicha situación. Y luego describen el análisis a priori y la experimentación de una situación de optimización planteada en el paso del número natural a la medida, realizada con alumnos del primer ciclo de Primaria.

2.2.6 Sobre el álgebra temprana en la Educación Primaria

Molina (2007) presenta una caracterización del Early-Algebra (EA) o Álgebra temprana explicando que dicha propuesta promueve en las aulas la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas y, de ese modo, cultiva hábitos de pensamiento que atienden a la estructura que subyace a las matemáticas.

Señala las diferencias entre el Early-Algebra y la Pre-álgebra y habla del origen y la evolución del EA.

Nos muestra la visión del álgebra dentro de la propuesta EA, indicando que es compartida por los estándares del NCTM. Según la autora, dicha visión consiste en distinguir como componentes estándar del álgebra la comprensión de patrones, las relaciones entre cantidades y funciones, la representación de relaciones matemáticas, el análisis de situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos, el uso de modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas y el análisis del cambio.

El interés de la autora por la EA se concreta en el análisis del uso del pensamiento relacional por parte de los alumnos, ya que conjetura que el pensamiento relacional puede ayudar a los alumnos a desarrollar métodos propios, personales y flexibles, para la resolución de ecuaciones. Algo que, según la autora, suele trabajarse en el aprendizaje de la aritmética pero no en el aprendizaje del álgebra.

Para analizar el uso de pensamiento relacional puesto de manifiesto por los alumnos, ha realizado un experimento de enseñanza con un grupo de 26 alumnos de 3º de EP.

El estudio se enmarca dentro del *paradigma de la investigación de diseño*.

El contexto elegido para analizar el uso del pensamiento relacional de los alumnos ha sido la resolución de sentencias numéricas de suma y resta, basadas en propiedades aritméticas básicas.

Para terminar, la autora propone dos líneas a profundizar: el proceso de generalización de las propiedades aritméticas, una vez los alumnos han explicitado el uso de pensamiento relacional, y el uso de este tipo de pensamiento en contextos algebraicos, en especial, en el trabajo con expresiones, igualdades y ecuaciones algebraicas.

2.2.7 Sobre el desarrollo profesional del profesor en la Educación Primaria

En lo que se refiere al desarrollo profesional del profesor hay un total de 6 trabajos. Dos de ellos están dedicados al análisis del desarrollo profesional de una maestra a partir de un estudio de caso. En el primero, Carrillo & Climent (2002) analizan la evolución que experimenta una maestra, que está implicada en un proceso de reflexión y modificación de su práctica, en el contexto de una investigación colaborativa sobre la resolución de problemas, en el aula de matemáticas. Un resultado obtenido, fruto de este análisis, es que el principal detonante de cambio de sus concepciones se produce cuando la maestra reflexiona sobre la necesidad de dominar el conocimiento del contenido que se requiere para trabajar en el aula desde el enfoque de la resolución de problemas.

En el segundo trabajo (Muñoz-Catalán, Carrillo &Climent, 2006), siguiendo en la misma línea de trabajo, analizan el desarrollo profesional de una maestra novel (no prototípica) inmersa en un proyecto de investigación colaborativo. Primero se centran en su reflexión durante el período de prácticas, cuando todavía es estudiante para maestra, y después estudian su actuación como maestra durante el primer trimestre de su vida como docente. Se pretende conocer sobre qué reflexiona y cómo se posiciona como estudiante en prácticas y como maestra en ejercicio, identificando las posibles diferencias en ambos casos. Para el análisis de los datos obtenidos combinan la técnica de análisis de contenido con el método de comparación constante de la Grounded Theory.

Hay otros dos dedicados al trabajo cooperativo. Así, Lopes & Salinas (2006), a partir de un experimento realizado sobre una unidad curricular de Matemáticas, en una clase de 25 alumnos de 5º de Primaria, se plantean el problema siguiente: *¿Cómo influye en la forma que los alumnos aprenden y ven los conceptos geométricos y de medida, la enseñanza que privilegia el aprendizaje en grupos cooperativos?*

Y Lopes, Salinas & Palhares (2008) presentan un estudio de caso. A partir de una experiencia educativa de una sesión, donde se proponen dos problemas de áreas a un grupo de cuatro alumnos de 5º de Primaria, utilizando una metodología que privilegia el trabajo cooperativo, analizan cómo interactúan los alumnos al resolver ambos problemas. El propósito es investigar con detalle si las estructuras de aprendizaje cooperativo introducen o no cambios significativos en los participantes en el aula.

Alfonso, Rigo & Gómez (2008) exponen un estudio de caso de carácter etnográfico donde se destacan las actuaciones diarias en el aula, y en especial la conducta de la profesora. La investigación se lleva a cabo en un aula con 25 alumnos de 6º grado de una escuela pública de Ciudad de México. La maestra de 25 años de experiencia profesional resalta como buena docente ya que sus alumnos obtienen muy buenos resultados en las evaluaciones oficiales. El propósito de los autores es identificar cómo la maestra, en condiciones espontáneas, promueve entre sus alumnos el desarrollo de competencias de regulación autónoma en sus procesos de aprendizaje de las matemáticas. Privilegian la observación no participante como metodología de toma de datos y proponen un instrumento de análisis.

En el último trabajo, Ribeiro, Carrillo & Monteiro (2009) pretenden obtener una mayor comprensión del papel que juegan los objetivos del profesor en su práctica docente. Para ello analizan dos secuencias de clases de matemáticas de una maestra en dos momentos distintos, estando uno de ellos asociado a un trabajo colaborativo.

2.2.8 Sobre el juego en la EP

Edo & Deulofeu (2005) tienen como objetivo general conseguir una mejor comprensión sobre el modo en que alumnos del primer ciclo de Primaria aprenden contenidos matemáticos en una situación didáctica que incorpora juegos de mesa, gracias a los procesos de interacción. El marco psicológico de referencia adoptado es la concepción constructivista del aprendizaje y la enseñanza. La investigación está basada en el *modelo conceptual y metodológico para el análisis de algunos mecanismos de influencia educativa que operan en la interactividad.*

Los autores obtienen los datos a partir de una experiencia de innovación que consiste en la realización de un *Taller de juegos y matemáticas* en una clase del primer ciclo de Primaria.

3. CLASIFICACIÓN DE ALGUNAS INVESTIGACIONES DIDÁCTICAS EN BASE AL ENFOQUE TEÓRICO QUE LAS SUSTENTA

El criterio elegido para clasificar las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas en los niveles de Educación Infantil y Primaria no tiene por qué ser único. En esta sección hemos elegido el enfoque teórico que sustenta cada una de las investigaciones como criterio porque nos ha permitido una mayor facilidad de aplicación. Primero consideraremos los trabajos llevados a cabo dentro del PME (The International Group for the Psychology of Mathematics Education), luego, los realizados en el marco de la TSD (Teoría de las Situaciones Didácticas); a continuación los trabajos sustentados en el EOS (Enfoque Ontosemiótico); para terminar con los enmarcados en la TAD (Teoría Antropológica de lo Didáctico).

3.1 Investigaciones sobre el desarrollo de los conocimientos matemáticos en alumnos de Educación Infantil y Primaria en el PME[35]

Las bases teóricas de las primeras investigaciones desarrolladas dentro del PME fueron explicadas, en su mayor parte, a través de trabajos realizados con alumnos de Educación Infantil y Primaria. La mayor parte de estos trabajos giraron en torno al aprendizaje del conteo y de la aritmética. En los últimos 15 años, se ha empezado a investigar con alumnos de Infantil y Primaria sobre el desarrollo de contenidos matemáticos que previamente se habían tratado sólo con alumnos de mayor edad (Secundaria), como el razonamiento multiplicativo, el álgebra, la exploración y análisis de datos y la modelización matemática.

[35] Para la revisión de los trabajos del PME hemos tomado como base el capítulo que realizan Mulligan & Vergnaud (2006) en el *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*. (pp. 117 - 146). (http://www.sensepublishers.com/catalog/files/90-77874-19-4.pdf) (Última consulta el 1/05/2011)

Ha habido más concentración de investigaciones en el nivel de Educación Infantil y Primaria y en el ámbito del aprendizaje de la aritmética entre los años 1975 y 1995 que posteriormente. Dichos trabajos versaron sobre el desarrollo del conteo, la noción de cardinalidad, la comprensión de las estructuras aditivas y multiplicativas, la iniciación a la noción de fracción y algunos estudios de figuras geométricas. Entre los años 1995 y 2005 ha habido menos de un 10% de estudios dedicados al desarrollo de las matemáticas en alumnos de Educación Infantil y Primaria (excluyendo los trabajos sobre el desarrollo profesional del profesor).

Este último periodo se ha caracterizado porque las investigaciones muestran una ampliación de los contenidos y procesos matemáticos considerados y un mayor ámbito de aplicación con estudios transversales y longitudinales. Los paradigmas de investigación se han vuelto más dinámicos y ya no abordan estudios de contenido único, centrados en el análisis de las estrategias y niveles de los niños, sino que pasan a analizar los sistemas de enseñanza y el aprendizaje de determinados contenidos matemáticos, por ejemplo Anghileri (2001). Algunas contribuciones recientes derivan de proyectos gubernamentales de gran escala sobre la aritmética, que se han llevado a cabo en el ámbito de marcos teóricos basados en trabajos de investigadores del PME como, por ejemplo, Askew (2003), Brown (2002), Clarke, McDonough & Sullivan (2002). La investigación ha evolucionado y en lugar de estudiar únicamente las bases psicológicas del desarrollo matemático ha pasado a cuestionar la enseñanza de la aritmética elemental.

Las conferencias del PME que se han centrado en campos relacionados con la Educación Infantil y Primaria, han sido las siguientes: sobre los primeros esquemas del conteo y la simbolización (PME8, 1984), sobre el pensamiento numérico elemental (PME21, 1997), sobre las matemáticas en la educación infantil (PME26, 2002) y sobre el Álgebra temprana o Early-Álgebra (PME28, 2004).

3.1.1 Perspectivas teóricas de las investigaciones sobre el desarrollo matemático de los niños en el PME.

Los enfoques teóricos desarrollados en los primeros años del PME se centraron fundamentalmente en el estudio del aprendizaje de los niños y en el desarrollo de diferentes perspectivas psicológicas. Algunos ejemplos de estas contribuciones son: Los modelos intuitivos de Fischbein, la estructura de los resultados del aprendizaje de Collis, los campos de experiencia de Boero, los campos conceptuales de Vergnaud, el conteo temprano y el desarrollo de Goldin, una visión proceptual de Gray, Pitta y Tall, el constructivismo social de Yackel y las perspectivas interaccionistas de Hershikowitz.

a) La teoría de los *modelos intuitivos* de Fischbein (1978) afirma que los modelos primitivos (implícitos) influyen en el desarrollo de los conceptos y en el comportamiento en la resolución de problemas de los niños, y, además, esos modelos continúan ejerciendo influencia con matemáticas más complejas (Fischbein, 1983). Su investigación sobre problemas de multiplicación y división y pensamiento probabilístico han contribuido de modo significativo a comprender el pensamiento matemático y las dificultades experimentadas por estudiantes de la escuela secundaria. Las bases psicológicas de su teoría aparecen en muchos estudios sobre el desarrollo intuitivo del niño que emergen en el grupo del PME.

b) La *estructura de los resultados del aprendizaje observados* (SOLO)[36] de Collis se basa en los modos de funcionamiento y en los niveles de estructura de las respuestas de los estudiantes: preestructural, uniestructural, relacional y de resumen extendido. Aunque este modelo estructural ha mejorado nuestra comprensión de la estructura cognitiva, tiene algunas limitaciones cuando se aplica al aprendizaje de las matemáticas escolares, particularmente para niños pequeños, debido a la carencia de recomendaciones didácticas. Las mismas limitaciones asociadas con el modelo de Collis pueden ser esgrimidas para otras descripciones propuestas de los niveles de desarrollo, más o menos influenciadas por la teoría Piagetiana de los estadios, tales como la propuesta por Harrison, Bye y Schroeder (1985).

c) Los *campos de experiencia* de Boero.

A mediados de 1980, los investigadores desarrollaron amplias perspectivas sobre el aprendizaje de las matemáticas que consideraban que el conocimiento de los niños se desarrollaba principalmente cuando éste se enfrentaba a situaciones dentro y fuera de la escuela. Los primeros trabajos de la escuela brasileña (Nunes y Schlieman, 1987) pusieron de relieve en varias reuniones del PME que era esencial estudiar el conocimiento matemático informal, y comprender cómo dicho conocimiento podría ser utilizado en la escuela. Una importante cuestión didáctica apareció al cuestionarse en qué forma y con qué objetivos muchas experiencias de la vida diaria podrían ser introducidas en las clases de matemáticas. Una reflexión sistemática y un análisis de este problema fueron avanzados por Boero (1989) en el PME13. Lesh (1985) y otros también contribuyeron a esta cuestión. Sin embargo, otros miembros de PME afirmaron que la referencia a la experiencia no era necesariamente autosuficiente desde un punto de vista epistemológico, puesto que esta no lleva directamente a conceptos matemáticos sólidos de número, espacio, álgebra y geometría.

d) Los *campos conceptuales* de Vergnaud

En relación con la problemática anterior, la idea de campo conceptual ofreció una conexión entre las matemáticas de la experiencia y las convencionales, identificando las principales relaciones y conceptos que podrían ser tomados y estudiados como objetos matemáticos. Las situaciones encontradas en la experiencia no son consideradas de manera organizada y sistemática. Por lo tanto, la noción de campo conceptual fue útil para reflexionar sobre las situaciones desde un punto de vista conceptual e intentar organizarlas en un conjunto de situaciones estructuradas. Para ello, Vergnaud (1981) introdujo el concepto de campo conceptual (estructuras aditivas, estructuras multiplicativas, álgebra elemental y geometría elemental), que está en la base de muchos de los trabajos sobre problemas aritméticos verbales que siguieron (Vergnaud, 1983, 1990). Vergnaud acuñó los términos "estructuras aditivas" y "multiplicativas" para describir este nuevo campo de trabajo basado en estructuras conceptuales.

e) Las investigaciones sobre *el conteo*.

En el PME5 celebrado en Grenoble, se presentan muchas investigaciones en torno al conteo. Por ejemplo, comunicaciones de Comiti & Bessot; Fischer; Richards, Schimidt & Steffe; Van den Brink; y Von Glasersfeld. Steffe, Von Glasersfeld y Richards

[36] the Structure of Observed Learning Outcomes (SOLO)

discutieron el papel del conteo en las primeras concepciones de número de los niños (Richards, 1981; Steffe, 1981; Von Glasersfeld, 1981). Cuestionaron si una unidad de conteo es concreta o abstracta y se preguntaron cuál es el elemento que se cuenta. Concluyeron que depende de su posición de la secuencia completa de acciones de conteo, y del problema que se debe resolver.

f) Las bases iniciales de las investigaciones sobre *las estructuras aditivas.*

Ya en 1978 varios grupos de investigación propusieron clasificaciones de tareas cognitivas implicadas en problemas de adición y sustracción. Vergnaud (1978) en el PME3 y Nesher y Greeno (1981) en el PME6 identificaron tres relaciones principales que los niños deberían construir para enfrentarse a esas tareas: combinación de dos partes en un total, transformación de un estado inicial en un estado final, y comparación de dos cantidades. Carpenter & Moser (1979) añadieron el caso de igualar 2 cantidades. Vergnaud consideró relaciones más complejas como la combinación de transformaciones, la combinación de relaciones y la transformación de una relación. La ventaja fue que se extendió la clasificación a problemas con números con signo, incluyendo sustracción de números de distinto signo, un caso que plantea obstáculos de larga duración, incluso para los alumnos mayores de 15 años y para adultos. La principal contribución de la investigación sobre estas clasificaciones es que hace posible el estudio sistemático de la dificultad comparativa de diferentes tareas cognitivas implicadas. Esas clasificaciones también hacen posible introducir el marco de los campos conceptuales y los conceptos de esquema, concepto en acción y teorema en acto (Vergnaud, 1982, 1984).

g) Las investigaciones en torno a las *estructuras multiplicativas y las fracciones*

El campo conceptual de las estructuras multiplicativas proporciona otra importante contribución al estudio de los procesos aritméticos de los niños. Vergnaud ilustró el prototipo de estructura multiplicativa como la relación de proporción de cuatro términos, la cual a menudo es pasada por alto en simples problemas de multiplicación y división porque uno de los términos es el número 1. Describió 4 casos prototípicos: multiplicación, “quotition”, partición y encontrar el cuarto término. Durante las dos primeras décadas del PME se han presentado muchos estudios sobre problemas de multiplicación y división (partición y “quotition”) y sobre situaciones de encontrar el cuarto término. Si consideramos la fracción como un concepto asociado con la división y la multiplicación en el campo conceptual de las estructuras multiplicativas, entonces las principales aportaciones a este ámbito las encontramos en los primeros años del PME (hay 5 o 6 comunicaciones cada año). Por ejemplo, Behr, Bell, Figueras, Fischbein, Greer, Gaza, Hunting, Karplus, Lesh, Nohda, Post, Reiss, Seeger, Southwell, Strefland, Vinner, Waschsmuth, y muchos otros han realizado trabajos en este campo. La mayoría de las contribuciones se refieren a primaria y secundaria, de modo que los problemas de proporción no se considera que sean dominados por los niños hasta el final de la escuela primaria. Lo sorprendente es que, a pesar del gran número de trabajos presentados en el PME sobre este tema, se echan en falta trabajos sobre las relaciones entre las fracciones y el razonamiento proporcional, y esto a pesar de que una fracción es primero comprendida como una relación escalar entre dos cantidades o magnitudes del mismo tipo.

h) Investigaciones sobre las *representaciones simbólicas: la numeración.*

Durante la década de los ochenta en las reuniones del PME hubo una serie de contribuciones sobre la comprensión de los símbolos por los niños y sobre su uso en la enseñanza. Se tuvieron en consideración diferentes sistemas simbólicos como tablas y gráficos, símbolos algebraicos y fracciones, pero el sistema simbólico más investigado fue la representación del valor posicional de los números naturales y decimales. Janvier & Bednarz (1989) diagnosticaron errores persistentes en la escuela primaria (por ejemplo, los niños no reconocían la equivalencia entre 40 decenas y 400) y Nunes (1989) mostró las dificultades encontradas por alumnos brasileños en situaciones "fuera de la escuela".

i) El impacto de las *teorías constructivistas.*

La mayoría de los participantes en las primeras reuniones del PME eran constructivistas. Glasersfeld y sus colegas Cobb, Confrey, Richards y Steffe promovieron un enfoque radical constructivista. De acuerdo con este enfoque, es imposible representar el mundo real, y por tanto la comunicación podría ser problemática, tanto palabras como símbolos podrían no tener significados unívocos.

Aunque Von Glasersfeld en 1983, presentó una versión débil del constructivismo radical, dicho enfoque teórico rápidamente llegó a ser dogmático. Y se convirtió en uno de los temas polémicos en la historia del PME. Kilpatrick (1987) abogó por una visión más equilibrada y afirmó que, después de todo, los constructivistas no habían sido capaces todavía de desarrollar nuevos métodos para enseñar y aprender matemáticas. En la misma sesión del PME, Sinclair (1987) afirmó que Piaget nunca había sido un constructivista radical sino un "constructivista interactivo" o incluso un "constructivista dialéctico". Para él, se trata de conocer los resultados de las transformaciones que el sujeto introduce en la relación conocedor/conocido como una "acción y reacción". Vergnaud (1987), alumno de Piaget, también argumentó que Piaget había dedicado gran atención a las propiedades físicas de los objetos, e incluso se opuso a la contraposición entre abstracción matemática desde la acción por un lado y abstracción física desde los objetos por otro lado. Vergnaud advirtió que podría ser peligroso ir demasiado lejos en la crítica al constructivismo, porque algunos enfoques alternativos como el procesamiento de la información, la manipulación simbólica, o las secuelas de larga duración del conductismo podrían ser contraproducentes para la investigación en educación matemática. La ideología predominante de los profesores del momento estaba marcada todavía por el dogmatismo (la verdad matemática es expuesta y transmitida) y por el empirismo (la ciencia consiste en observar regularidades). Por tanto, el constructivismo tenía la fecundidad potencial de cuestionar una visión demasiado ingenua de los procesos, promoviendo que se tuviera en cuenta la epistemología específica de los conceptos matemáticos.

A pesar del aparente conflicto de posiciones teóricas y las interpretaciones y disparidades ofrecidas por los investigadores en este ámbito, los trabajos relativos al desarrollo temprano de las matemáticas, basados en el constructivismo, florecieron desde 1980 hasta pasado 1990. El trabajo de Steffe (1984) y sus colegas sobre el comienzo del conteo y los esquemas multiplicativos jugó un papel decisivo en articular el proceso de abstracción reflexiva y el desarrollo de las estrategias aritméticas de los niños. Este enfoque tuvo un impacto muy significativo en la dirección de las investigaciones llevadas a cabo por el grupo del PME de Norteamérica.

j) La *teoría proceptual del pensamiento matemático elemental*

Gray y Tall (1991) propusieron en el PME15 la teoría proceptual del desarrollo de los conceptos matemáticos. Una visión de la aritmética simple, donde los símbolos usados dualmente como **pro**ceso y con**cepto**, pasan a denominarse “proceps”. Más tarde, Gray y Pitta (1996) ampliaron la noción de *proceps* a distintos tipos de representaciones mentales.

La perspectiva teórica de Gray, Pitta y Tall ha ido avanzando a través de las diferentes contribuciones realizadas en la reuniones del PME, tales como el estudio de imágenes (Pitta & Gray, 1996), una teoría explicativa del éxito y el fracaso en matemáticas (Gray & Tall, 2001), y el papel de las imágenes en el cálculo mental (Bills & Gray, 2001). Más recientemente, el papel de esta teoría se ha visto reflejado en los estudios sobre fracciones (Pitta-Pantazi, Christou & Gray, 2002) y el análisis del patrón y de la estructura en la aritmética temprana (Mulligan, Prescott & Mitchelmore, 2004).

k) *La perspectiva social constructivista e interaccionista*

A finales de los años 1980 y 1990, ha habido un nuevo cambio de paradigmas de investigación, los nuevos enfoques se han centrado en el análisis de la enseñanza y aprendizaje del aula. Los puntos de vista socio-cultural e interaccionista del aprendizaje de las matemáticas han influido en los investigadores que han tratado de comprender mejor la relación entre la enseñanza y el aprendizaje a través de las prácticas en el aula. La perspectiva constructivista social trasladó la investigación más allá de considerar al individuo como sujeto de desarrollo matemático, hacia el estudio del desarrollo de la construcción social del significado a través de la negociación y el consenso en la comunidad de estudiantes. Experimentos de enseñanza como los realizados por Cobb, Yackel, Wood y sus colegas, durante largos períodos, han caracterizado el desarrollo y diseño de esta investigación en los primeros años de la escolaridad (Cobb, 1994; McClain & Cobb, 2001). En el PME25, Yackel (2001) discutió la importancia de desarrollar formas de analizar las aulas de matemáticas que fomentan el aprendizaje significativo. Describió de qué forma la construcción de las normas sociales y socio-matemáticas, que surgen cuando se adopta una perspectiva simbólica, proporcionan un medio para analizar y fomentar los aspectos de la explicación, justificación y argumentación en las clases de matemáticas. Yackel se basó en ejemplos de interacción profesor/alumno en segundo de Primaria, proporcionando formas sofisticadas de explicación y justificación en la descripción de las estrategias mentales para la adición. Las ideas importantes surgieron del pensamiento del grupo ya que ello permitió que emergiera el razonamiento matemático y la argumentación. En el PME23, Hershkowitz (1999) puso de relieve la complejidad de la investigación en educación matemática como la interacción de múltiples entornos de aprendizaje entre los estudiantes, entre estudiantes y profesores, con la herramienta o con las tareas, etc. Afirmó que no debe descuidarse el papel del individuo, que utiliza los conocimientos construidos, mientras se está investigando la interacción social dentro de la comunidad de la clase.

Hasta aquí hemos visto la diversidad de perspectivas teóricas (psicológicas, cognitivas o sociales) que han influido en los investigaciones sobre el desarrollo matemático temprano presentadas en las reuniones del PME.

3.1.2 Investigaciones más recientes dentro del PME

Las investigaciones más recientes han tratado sobre los conceptos numéricos y los procesos de cálculo, los modelos matemáticos, el razonamiento y el álgebra temprana.

Uno de los cambios más importantes en la atención de la investigación en las últimas dos décadas ha sido el desarrollo de la investigación de las ideas de los niños asociadas con los procesos matemáticos. Estas incluyen la modelización y el razonamiento matemático, la representación y la comunicación de ideas (Jones, Langrall, Thornton & Nisbett, 2002; Perry & Dockett, 2002). Este énfasis en la resolución de problemas y el pensamiento matemático entre los niños mayores durante los 80 y los 90 y un aumento de la evidencia de las capacidades para resolver problemas de los niños pequeños, ha inspirado a los investigadores para diseñar investigaciones de modelización y razonamiento matemático en los primeros años. Esta tendencia es la que ha proporcionado la dirección de las investigaciones más recientes sobre las representaciones matemáticas, la modelización, el razonamiento y el pensamiento algebraico temprano.

a) El papel de las imágenes y las representaciones matemáticas

Varios grupos que investigan las estrategias y el razonamiento matemático en la resolución de problemas se han centrado en aspectos como la visualización y las imágenes (Gray & Pitta, 1999; Pitta-Pantazi, Christou & Gray, 2002). Algunas investigaciones han empleado estudios longitudinales para analizar el desarrollo del razonamiento de los niños como, por ejemplo, en el aprendizaje de las fracciones (Goldin & Passantino, 1996) e investigaciones estructuradas (Diezmann, Watters & English, 2001; Maher, 2002). Otros estudios han investigado el uso de diagramas en la resolución de problemas (Diezmann, 2000). Al mismo tiempo, la investigación sobre la resolución de problemas ha integrado el papel del desarrollo estructural y de patrones en una variedad de estudios sobre conteo (Thomas et al., 2002), patrones de número utilizando calculadoras (Groves, 2002) y razonamiento analógico (English, 2004).

Por ejemplo, en un estudio descriptivo con 103 estudiantes de primero de Primaria, incluyendo 16 estudios de caso longitudinales, Mulligan, Prescott & Mitchelmore (2004) y Mulligan, Mitchelmore & Prescott (2005) encontraron que la percepción y representación de los niños de la estructura matemática era generalizada a lo largo de los dominios matemáticos (conteo, partición, “unitizing”, patrones, medida, espacio y gráficos). Describieron cómo los conceptos matemáticos de los niños se desarrollan en 5 estados de desarrollo estructural. El logro de estas investigaciones en relación a las matemáticas escolares iniciales fue encontrar la relación entre el desarrollo y la percepción de los niños de patrones y estructuras matemáticas. Estos hallazgos apoyan lo que los investigadores del PME han dicho sobre la importancia de las imágenes y la estructura en la comprensión matemática (Gray & Tall, 2001).

Sin embargo, ha habido pocos estudios que examinen las prácticas de enseñanza y aprendizaje que fomentan que los niños pequeños se centren en patrones y estructuras. Esto podría requerir que los investigadores pusieran más atención a los procesos de representación y abstracción y al desarrollo de estructuras matemáticas inherentes a varias situaciones.

b) *La modelización y el razonamiento matemático*

Los primeros investigadores interesados en el modelización matemática se centraron en la resolución de problemas aritméticos verbales. Algunos han construido sobre esta investigación las bases para investigar los procesos de razonamiento y comunicación matemática en contextos de resolución de problemas más abiertos utilizando paradigmas de investigación más dinámicos.

Un ejemplo de esta línea de investigación lo constituye el trabajo de English (1996, 1997, 2004) sobre el desarrollo de la modelización matemática en estudiantes de Primaria, la resolución de problemas, el planteamiento de problemas y el razonamiento matemático, (deductivo, combinatorio y analógico). En un estudio longitudinal y transcultural English (2004) estudió el desarrollo del razonamiento analógico y matemático en niños de 4 a 7 años. Observó que los niños que destacaban en razonamiento analógico y matemático reflexionaban sobre lo que habían aprendido y aplicaban su conocimiento en nuevas situaciones. English &Watters (2005) hicieron un estudio longitudinal a lo largo de tres años con niños de 8 años sobre problemas de modelización que requerían que los niños plantearan problemas e hipótesis y hasta matematizaran una situación. El estudio se centraba en las características estructurales de los sistemas a modelizar tales como los patrones y las relaciones entre sus elementos en lugar de quedarse en las características superficiales.

c) El razonamiento algebraico temprano

Los estudios sobre pensamiento algebraico de niños pequeños (Blanton & Kaput, 2002, 2004; Schliemann, Carraher, Brizuela, Earnest, Goodrow, Lara-Roth & Peled, 2003; Tabach & Hershkowitz, 2002; Warren, 2005) están principalmente centrados en las bases de la abstracción y la generalización matemática. En particular, investigaciones recientes sobre el pensamiento funcional (Blanton & Kaput, 2004; Schliemann & al., 2003) descubren recursos, desconocidos hasta la fecha, de razonamiento algebraico en niños de 3 a 8 años. En un estudio longitudinal sobre el álgebra temprana o early algebra, Schliemann & al. (2003) encontraron que estudiantes de tercero de Primaria tenían una rica comprensión de la función y eran capaces de describir algunos aspectos del pensamiento algebraico utilizando múltiples representaciones. Otros investigadores han abordado el problema del razonamiento algebraico temprano alejándose del enfoque casi exclusivo en la aritmética y el cálculo y centrándose en el estudio de la comprensión infantil de la naturaleza algebraica de la aritmética (Fujii & Stephens, 2001). La eficiencia computacional ya no se considera la razón dominante para el estudio de la aritmética. Otro aspecto de la relación entre el álgebra y la aritmética es la comprensión de la equivalencia, pero ha habido pocos estudios que examinen esta área con los estudiantes más jóvenes (Irwin, 1990, Womack & Williams, 1998).

3.1.3 Futuras líneas de investigación en el desarrollo matemático temprano

Los estudios de la enseñanza de las matemáticas utilizando los enfoques socio-culturales son limitados, puesto que existen pocos estudios de corte cultural y etnográfico.

Es posible que haya que revisar algunas teorías fundamentales que proporcionan, en muchos sentidos, marcos teóricos integrados de los procesos matemáticos. Por ejemplo, la teoría de Fischbein sobre la intuición no se ha explorado a fondo en particular en el contexto del aprendizaje de los niños pequeños o en sus consecuencias prácticas para situaciones de enseñanza. Del mismo modo, la teoría de los campos conceptuales que abarca las estructuras aditiva y multiplicativa podría utilizarse en el desarrollo de una nueva investigación más comprensiva.

a) *Nuevas líneas de investigación sobre razonamiento algebraico temprano*

A pesar de las reformas curriculares y el interés de las investigaciones recientes en el pensamiento algebraico temprano, sigue habiendo relativamente poca investigación sobre el desarrollo de patrones matemáticos en los niños pequeños y estudios de los programas educativos que promocionen patrones (Fox, 2005; Papic, 2005).

La investigación sobre los principios de pensamiento funcional algebraico puede mejorar nuestra comprensión de cómo los niños distinguen entre las relaciones aditivas y multiplicativas. Se podría considerar que la investigación sobre razonamiento matemático y principios de la modelación matemática está vinculada con el estudio del álgebra temprana. Teniendo en cuenta esto, podría resultar conveniente utilizar conjuntamente, en un mismo estudio, las tareas de investigación que involucran patrones cuantitativos y espaciales, la modelización y el razonamiento.

b) *La investigación sobre el papel de la tecnología*

El estudio sobre el uso y la influencia de la tecnología en el desarrollo matemático temprano ha sido bastante limitado. El grupo de investigadores PME no ha prestado suficiente atención a este tema.

El estudio sobre la aplicación de las calculadoras de mano también ha sido escaso a pesar de la evidencia científica de sus efectos positivos en la escuela infantil y primaria. Otra área que parece estar insuficientemente representada dentro del PME es el desarrollo de conceptos elementales de medición tales como el tiempo, la velocidad, el crecimiento y el cambio, a menudo representados a través del uso de la tecnología.

c) La investigación sobre la alfabetización cuantitativa en los primeros años.

Dentro del PME ha habido pocos estudios sobre la influencia de la lectura infantil en el aprendizaje de las matemáticas de los niños pequeños. Los estudios sobre la lectura infantil y la utilización de la literatura fuera de la escuela, en preescolar y en ambientes de clase podrían proporcionar mayor información sobre el desarrollo de conceptos matemáticos, del lenguaje y del razonamiento. Esto puede contribuir a hacer avanzar la comprensión de las bases sociales, culturales y psicológicas de la educación matemática temprana.

Otra área de investigación que es necesario impulsar en el PME dentro de este campo es la realización de estudios que se centren en la exploración de datos y habilidades de manejo de datos. En Jones & al. (2002) se lleva a cabo una investigación de las representaciones que realizan los niños pequeños de gráficos sencillos y tablas, incluyendo el uso de la tecnología. También hay un trabajo reciente sobre el análisis del rendimiento de alumnos de primaria en lenguajes gráficos en matemáticas (Lowrie & Diezmann, 2005).

Del mismo modo, ha aumentado el interés de la investigación por los vínculos entre los conceptos numéricos de los niños pequeños y la representación gráfica (Selva & al., 2005). Un programa de investigación relacionado con la exploración del razonamiento probabilístico ofrecería una imagen más coherente del desarrollo de los niños en este dominio (Perry, Putt, Jones, Thornton, Langrall & Mooney, 2000; Spinillo, 1997).

Para terminar, digamos que desde el PME se propone proporcionar una visión más holística de las diferentes perspectivas o enfoques de investigación.

La colaboración entre equipos de investigadores a nivel internacional podrá fomentar los estudios interculturales y la ampliación de las bases de investigación del grupo del PME. Por otra parte, la integración de la investigación del PME con otros ámbitos como la ciencia y la alfabetización, contribuirá significativamente al diseño de los futuros estudios de aprendizaje y desarrollo de los niños pequeños que rebasen los límites de plan de estudios tradicional.

En el PME26, Brown destacó la necesidad de llevar a cabo investigaciones desde múltiples perspectivas con el fin de tener una visión más holística de la enseñanza y el aprendizaje y evitar conclusiones simplistas.

En la última década la atención de la investigación se ha fijado sobre la influencia de la enseñanza en el aprendizaje en las aulas (Boaler, 2003).

Otros estudios han observado los aspectos sociales de la situación de aprendizaje, tales como el papel de la tarea en el aprendizaje (Groves & Doig, 2002), el discurso de los niños (Irwin & Ginsburg, 2001) o la interacción dialógica entre el estudiante y el maestro (Sáenz-Ludlow, 2003).

Es evidente, en resumen, que la investigación didáctica en la escuela elemental ha pasado del estudio clínico de la evolución de los conceptos matemáticos al estudio de la enseñanza práctica en aula y en grupos pequeños. Sin embargo, hay todavía una escasez de investigación sobre cómo los niños construyen su conocimiento matemático previo a la escolarización, y fuera de la escuela.

Desde el PME se preguntan si es necesario reunir, a través de meta-análisis o grupos de estudio, los nuevos enfoques teóricos para el estudio del desarrollo matemático temprano, con el fin de combatir las diferencias y disparidades habidas en este campo de investigación en la última década.

3.2 Investigaciones didácticas sobre las matemáticas de Educación Infantil y Primaria dentro de la Teoría de Situaciones Didácticas

Una de las aportaciones más relevantes de los últimos años a la investigación en Didáctica de las Matemáticas en los niveles de Educación Infantil y Primaria es la realizada por las investigaciones desarrolladas en el ámbito de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD).

La TSD surge en torno al año 1970 con el proyecto de construir un modelo de las situaciones que permita tanto ser utilizado para enseñar como para cuestionar las nociones matemáticas escolares intentando construir otras más adecuadas.

Una situación es un modelo de interacción entre un sujeto y un medio determinado que está asociado a un conocimiento dado. Aquí este conocimiento se presenta como el recurso del que dispone el sujeto para poder conseguir un estado óptimo dentro de ese medio. Dentro de estas situaciones va a haber algunas que le van a permitir al individuo construir por sí mismo un conocimiento nuevo mediante un procedimiento de génesis artificial.

El principio metodológico fundamental de la TSD es que el conocimiento matemático está representado por una "situación" que involucra problemas que pueden resolverse de manera óptima usando este conocimiento.

El objeto fundamental de estudio de la TSD no es el sujeto que aprende, sino la situación en que el sujeto interactúan con otro y con la matemática (Artigue, 2004).

Desde la perspectiva de la teoría de las situaciones, los alumnos se convierten en los reveladores de las características de las situaciones a las que reaccionan (es importante señalar esta inversión de posición con respecto a las aproximaciones de la psicología, donde las situaciones suelen estudiarse como dispositivo para revelar los conocimientos del alumno. (Brousseau 2007, p. 24)

Esta es la diferencia clave con respecto a los demás enfoques teóricos, de carácter psicológico o cognitivo. En la TSD, se parte de la hipótesis de que para cada conocimiento matemático existe al menos una situación que lo caracteriza y lo diferencia de los demás (Brousseau, 2000). Por ello, dado un conocimiento matemático determinado, se busca qué tipo de situaciones son capaces de propiciar que aparezca, se utilice y se construya y, en consecuencia, se aprenda. Además, se conjetura que el conjunto de situaciones que caracterizan una noción matemática está estructurado y se puede generar, a partir de un pequeño número de situaciones llamadas fundamentales, a través del uso y manejo de las variables didácticas. Veamos un ejemplo:

La noción de conteo o cardinación está caracterizada por las tres situaciones fundamentales siguientes:

Situaciones fundamentales de la cardinación:

Aspecto cardinal (1)

"Un emisor E dispone de una colección de objetos y debe fabricar un mensaje para que un receptor R pueda realizar una colección que tenga tantos objetos como la de E"

Aspecto cardinal (2)

"Un emisor E dispone de una colección de objetos y debe fabricar un mensaje para que un receptor R que dispone también de otra colección, pueda prever cuál de las dos es más numerosa"

Aspecto ordinal

"Un emisor E dispone de una colección de objetos organizados en una fila y debe fabricar un mensaje para que un receptor R pueda reconocer la posición de un objeto señalado por el emisor en la fila"

En este caso las variables didácticas que van a permitir generar la noción de conteo y cardinación en el sujeto serán: *el tamaño de la colección, la disposición de los elementos, el tipo de comunicación, el tamaño de los números utilizables por el alumno, el número de viajes que se permite realizar para ir de una colección a la otra, la accesibilidad simultánea a las dos colecciones (esta variable sólo puede tomar dos valores), el hecho de que los objetos de las colecciones tengan o no movilidad (dos valores), la proximidad o lejanía del objeto señalado de los extremos de la fila.*

Por tanto, en este marco teórico serán los comportamientos de los alumnos los que revelarán cómo funciona el medio que se considera como un sistema. Así tenemos que la caja negra dentro de la TSD es el medio (Brousseau, 2000). Por ello, lo que es problemático, donde está el misterio y, por lo tanto, lo que se modeliza, es el medio considerado como un medio autónomo y antagonista del sujeto.

3.2.1 Tres investigaciones relevantes dentro de la TSD

La TSD ha realizado relevantes aportaciones a la investigación en Didáctica de las Matemáticas en torno a la enseñanza de diferentes nociones matemáticas, como los números naturales, los racionales, los decimales, el espacio y la geometría, la iniciación al álgebra, la estadística y la probabilidad, el estudio del razonamiento y de la lógica, y la medida de magnitudes. A continuación presentaremos de una forma un poco más detallada tres investigaciones desarrolladas en los niveles de Educación Infantil y Primaria, que consideramos muy relevantes por la problemática didáctica que abordan.

Dicha problemática gira en torno al siguiente fenómeno:

En ciertas situaciones, el alumno tiene necesidad de conocimientos que no le son enseñados, pero que él debe poner en práctica para aprender algo o para utilizar lo que ha aprendido… Por tanto, existen conocimientos necesarios para realizar ciertas prácticas sociales o de enseñanza relativos a un cierto saber, que no pueden ser objeto de enseñanza porque no aparecen como una forma cultural conocida. Generalmente dichos conocimientos son dejados bajo responsabilidad del alumno, y el profesor no puede hacer nada para cambiar este reparto de responsabilidades. (Briand, 1993, p. 5)

Los trabajos realizados en torno a esta problemática muestran que existe otro modo de estudiar el reparto de responsabilidades entre el profesor y el alumno. Dichos conocimientos son la *enumeración de colecciones*, los *conocimientos espaciales* y el *razonamiento natural*.

La enumeración de colecciones

En Briand (1993), se lleva a cabo un cuestionamiento de las actividades de conteo y de cardinación. Se observa que para poder tener un dominio efectivo del conteo y de la cardinación de los elementos de una colección finita es necesario que los alumnos sepan *enumerar*, es decir, sean capaces de pasar por cada uno de los elementos de dicha colección una y solo una vez. Este nuevo saber, *enumerar*, apenas es reconocido culturalmente y en algunos casos es confundido con contar o cardinar. Además el aprendizaje de la enumeración no figura en el curriculum de la enseñanza elemental. La primera parte del trabajo de Briand se dedica a mostrar, por un lado, que para poder controlar el conteo y la cardinación se requiere que los alumnos dominen la enumeración, y, por otro lado, que dicho dominio es necesario para la construcción y comprensión de las operaciones aritméticas. En la segunda parte, se estudian las consecuencias que tiene el hecho de que la enseñanza tenga necesidad de conocimientos de los que no se puede hacer cargo, porque no forman parte del currículum. La imposibilidad de realizar la transposición didáctica de la enumeración conduce a que sea el propio alumno quien debe adquirir dicho conocimiento bajo su exclusiva responsabilidad. Esto produce dificultades tanto a los alumnos como a los profesores. Con el fin de hacer posible dicha transposición didáctica el autor desarrolla una ingeniería didáctica de la enumeración de conjuntos y muestra cómo puede ser aprendida y utilizada por los estudiantes para Maestro.

Los conocimientos espaciales

Berthelot & Salin (1992) estudian el papel de los conocimientos espaciales en la transposición didáctica de la geometría. Dichos autores (Salin, 2004) subrayan las diferencias entre los conocimientos espaciales y los conocimientos geométricos y señalan las relaciones que hay entre estos dos tipos de conocimientos. Por un lado la geometría euclídea ha surgido en gran parte de la resolución de problemas espaciales y, por otro, el control eficaz del sujeto de sus relaciones con el espacio sensible es más fácil si domina los conocimientos geométricos.

El aprendizaje de los conocimientos espaciales apenas aparece en el currículo de Educación Primaria y es reemplazado por la geometría de las figuras elementales. Esta ausencia deja a los niños y a los adultos sin recursos en muchas situaciones que implican la utilización o producción de representaciones espaciales de la vida diaria o profesional. Por otra parte, la enseñanza de la geometría en la secundaria es para muchos estudiantes un obstáculo para el aprendizaje de las matemáticas.

Los autores proponen distinguir tres tipos principales de relaciones con el espacio, llamadas problemáticas: la problemática práctica, la problemática de la modelización “espacio-geométrica” y la problemática geométrica propiamente dicha (deductiva o teórica). Muestran mediante numerosos ejemplos, que la falta de consideración o de articulación de estas problemáticas en la enseñanza, las constituye en obstáculos para el aprendizaje.

Para la construcción de situaciones de enseñanza que permitan la superación de la problemática práctica, los autores incorporan y amplían el análisis de las representaciones del espacio introducidas por G. Gálvez y G. Brousseau, micro, meso y macro-espacios (Gálvez, 1985).

Desarrollan para tal fin varios procesos experimentales sobre la enseñanza de planos y maquetas, sobre la enseñanza de los ángulos y su medida, sobre la introducción del razonamiento en las figuras elementales así como un análisis comparativo de las diversas situaciones de introducción a la demostración en la Secundaria Obligatoria.

Una de las conclusiones de este trabajo, que se reitera posteriormente en Berthelot & Salin (1999-2000) es que, más allá del micro-espacio que es el espacio de trabajo habitual de la geometría escolar, hay que conseguir que los alumnos de la Escuela Primaria adquieran conocimientos espaciales útiles, en particular en el macro-espacio y en el dominio de las representaciones materiales de los objetos.

El razonamiento natural

En la tesis doctoral de Pilar Orús (1992) se analiza una problemática semejante a las dos anteriores que, en este caso, gira en torno al razonamiento natural. “Saber razonar” es una de las competencias que espera el profesor del alumno. El profesor no dispone de medios para ayudar al alumno que tiene dificultades relacionadas con este conocimiento y la falta de estos conocimientos es considerada como una falta de capacidad intelectual del alumno. La enseñanza del saber sabio correspondiente, o sea, de la lógica, se ha llevado a cabo, en los años 70, en la escolaridad obligatoria; pero ello no produjo los efectos esperados. En este trabajo la autora hace una propuesta que permita llevar a cabo dicha enseñanza.

La problemática es la siguiente: el profesor habitualmente solicita de sus alumnos (de modo implícito) que razonen en sus aprendizajes personales, utiliza el razonamiento “natural” cuando enseña y controla cuándo y cómo se utiliza dicho razonamiento en su clase, pero no puede aceptarlo como resultado de un conocimiento matemático. Por otro lado, el alumno lo utiliza en sus actividades escolares, tanto para producir sus respuestas personales como para comunicar y explicar sus conocimientos, pero no puede distinguir cuando es utilizado por él mismo o por el profesor.

Así, por un lado, el razonamiento natural es necesario, pero no suficiente para producir razonamientos matemáticos y, por otro, el profesor no puede enseñar directamente el razonamiento natural, ya que no forma parte del saber a enseñar, pues no aparece en el currículum de forma explícita.

Ante esta problemática, la autora propone una ingeniería didáctica que permita a los maestros de Educación Primaria poder llevar a cabo la transposición didáctica del razonamiento y evitar que dicho conocimiento, tan necesario, quede bajo la responsabilidad exclusiva del alumno al tiempo que es tomado en cuenta por el profesor. Propone un conjunto de situaciones didácticas y adidácticas que permiten construir un campo común para la lógica, que se emplea en matemáticas, y el razonamiento natural. Modeliza dicho campo común utilizando el análisis tipológico.

3.2.2 Otras aportaciones de la Teoría de Situaciones Didácticas

En Briand, Loubet & Salin (2004) se presentan un conjunto de documentos (escritos, artículos, fotografías, vídeos) que describen muchos de los trabajos realizados en el Centro para la Observación e Investigación en la Enseñanza de las Matemáticas (COREM) de la Escuela Jules Michelet de Talence sobre investigación en Didáctica de las Matemáticas, durante 20 años, en el nivel de Educación Infantil, bajo la dirección de Guy Brousseau. Son 23 situaciones de aprendizaje por adaptación al medio (situaciones a-didácticas)[37] en torno a las matemáticas de la Educación Infantil (situaciones de designación y marcado, de enumeración, de conteo y cardinación, de orden, de clasificación, de iniciación a las magnitudes).

Peres (1984) lleva a cabo una investigación sobre la construcción de un código común de designación de objetos por alumnos de la Escuela Infantil.

[37] Es una situación específica del conocimiento que se pretende y debe aparecer ante los alumnos como una interacción con un medio no didáctico, de modo que sus decisiones no se guíen por la lectura de las intenciones del profesor, sino por la propia lógica del problema. Además el alumno podrá modificar sus decisiones teniendo en cuenta las informaciones que el medio con el que interactúa le devuelva. También puede decirse que es una situación donde se plantea a los alumnos un problema, que estos no saben resolver de inmediato. Pero los alumnos deben disponer de una estrategia inicial que les permita poder entrar en el problema. Dicha estrategia inicial pronto se vuelve ineficaz para resolver dicho problema ya que no coincide con la estrategia óptima. La intención didáctica del profesor debe permanecer oculta ante los ojos de los alumnos. Además, la propia situación debe permitir a los alumnos saber si han resuelto bien o no el problema sin necesidad de tener que acudir al profesor. Para poder gestionar este proceso en el que el alumno construye la estrategia óptima en interacción con sus iguales, el profesor utiliza las variables didácticas, que son elementos de la situación que puede manejar el profesor con el objetivo de provocar en los alumnos un cambio de estrategia. Por ello, no sirve como situación adidáctica cualquier situación. La construcción de situaciones adidácticas resulta de un trabajo de investigación de ingeniería matemático-didáctica.

En el trabajo de El Bouazzaoui (1982) se analiza la actividad matemática escolar en torno al número y la numeración en la Educación Infantil y en los primeros cursos de Educación Primaria y se hace una propuesta de situaciones adidácticas para su enseñanza.

Foucaud & Brousseau (1992) presentan situaciones adidácticas o de aprendizaje por adaptación al medio con las que se pretende iniciar al alumno en el estudio de las operaciones con números de dos cifras en primer ciclo de Primaria. Dichas situaciones son fruto de las investigaciones realizadas en el COREM.

También hay algunos trabajos de investigación relacionados con las magnitudes y su medida, como los que figuran en Brousseau (2000, 2001) y Chamorro (1997).

Del mismo modo, se han llevado a cabo varias investigaciones sobre la enseñanza de la estadística y la probabilidad en la educación Primaria. En http://guy-brousseau.com/?s=probabilit%C3%A9 se pueden consultar las diferentes experimentaciones realizadas en el COREM sobre la primera enseñanza de la estadística y la probabilidad.

Digamos, para concluir esta apretadísima síntesis, que en Brousseau (2010) se analizan las dificultades de aprendizaje de los algoritmos clásicos de la multiplicación y de la división. Se comparan con otros algoritmos estudiando tanto la facilidad de aprendizaje como la facilidad de utilización y los comienzos de su enseñanza, y se relaciona el sentido de la operación con la construcción del algoritmo.

Son muchos los trabajos de investigación en Didáctica de las Matemáticas llevados a cabo, a lo largo de últimos cuarenta años en el marco de la TSD, en los niveles de Educación Infantil y Primaria. Para tener una visión más completa se puede acceder a las siguientes páginas web:

http://guy-brousseau.com/,

http://www.ardm.eu/contenu/guy-brousseau-espanol,

http://gismo.fi.ncsu.edu/version1/files/articles/15df9093ccc761d57c1cd9768c3173dc.pdf,

http://math.unipa.it/~grim/homebrousseau.htm

3.3 Investigaciones didácticas sobre las matemáticas de Educación Infantil y Primaria dentro del Enfoque Ontosemiótico

El EOS fue iniciado por el grupo de investigación “Teoría de la Educación Matemática” de la Universidad de Granada a principios de los años 90. El Enfoque Ontosemiótico (EOS) es un marco teórico cuyo objetivo tiene un carácter holístico de integración de los diferentes modelos teóricos usados en la investigación en Educación Matemática, como los enfoques de la fenomenología didáctica, la etnomatemática, la teoría antropológica, la teoría de situaciones, los campos conceptuales, los registros de representación semiótica, la socioepistemología, etc., para el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Los fundamentos de este enfoque pueden analizarse con detalle en: http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm

Algunos de sus trabajos de investigación han sido llevados a cabo sobre contenidos de Educación Infantil y Primaria.

Así, por ejemplo, en Godino, Font & Wilhelmi (2006) se utilizan las herramientas que propone el EOS para valorar la idoneidad global de una lección sobre la suma y la resta de un manual de 5º de Educación Primaria. Dicha idoneidad global supone tener en cuenta criterios de idoneidad epistémica, cognitiva, semiótica, mediacional y emocional.

En Castro (2007) se plantea un modo de evaluar algunos de los métodos utilizados para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Infantil, utilizando lo que dentro del EOS se llama criterios de idoneidad didáctica.

En Godino, Font, Wilhelmi & Arrieche (2009) se aborda el estudio de las relaciones entre las nociones conjuntistas y los números naturales. El análisis realizado se basa en la noción de significado personal e institucional de los objetos matemáticos.

Y en Godino, Font, Wilhelmi & Lurduy (2011) se muestra de qué forma las nociones de *sistemas de prácticas y configuración de objetos y procesos,* junto con la noción de *función semiótica,* desarrollan y hacen operativa la noción de *sistema semiótico*. Para ello, analizan algunos sistemas semióticos utilizados en el estudio de los números naturales, aplicando dichas nociones al análisis de las respuestas de un alumno a una tarea de recuento y de escritura de números mayores que diez, donde aparecen las dificultades de aprendizaje de la decena.

3.4 Investigaciones didácticas sobre las matemáticas de Educación Infantil y Primaria dentro la Teoría Antropológica de lo Didáctico

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) considera que la actividad matemática, o sea, la actividad del estudio de las matemáticas, es, como cualquier actividad humana, una actividad institucionalizada. Se postula que toda actividad humana regularmente realizada puede describirse con un modelo único, que se resume aquí con la palabra de *praxeología* (unión de los términos griegos *praxis* y *logos*). Se asume así que, toda práctica o “saber hacer” (*praxis*), que se compone de un *tipo de tareas y* de una *técnica* (manera de hacer sistemática y compartida en una institución), aparece siempre acompañada de un discurso o “saber” (*logos*), que contiene una *tecnología* (discurso sobre la técnica en cuestión) *y una teoría* que aporta elementos descriptivos, justificativos y generativos de los demás componentes de la praxeología.

La ventaja de la noción de praxeología es que unifica el saber-hacer (*praxis*) y el saber (*logos*) en una misma noción, y además de mostrar, en su propia expresión, su significado, valora del mismo modo cada uno de sus componentes.

Asimismo dentro de la TAD se propone un modelo de *praxeología didáctica* que debe venir generada por una cuestión generatriz (Gascón, 2010) cuya respuesta consistirá en la elaboración de la *praxeología matemática* que es objeto de estudio. Dicho modelo estará basado en la dialéctica entre cuestiones y la búsqueda de elementos de respuesta a dichas cuestiones, y en él deberán aparecer diferentes dimensiones o momentos didácticos como el *momento del primer encuentro, el momento exploratorio, el momento tecnológico-teórico, el momento del trabajo de la técnica, el momento de la institucionalización y el momento de la evaluación*.

Para poder tener una visión más detallada de este enfoque pueden consultarse:

http://yves.chevallard.free.fr

http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD/Comunicaciones.htm

http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD_II/listado_comunicaciones.htm

http://www.crm.cat/Conferences/0910/cdidactic/cdidactic.pdf

La mayor parte de los trabajos realizados en el marco de la TAD tratan problemáticas de los niveles de Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Universidad. Aunque no hay muchos trabajos que estudian problemáticas relacionadas con la Educación Infantil y Primaria, sí existen algunos como, por ejemplo, Sierra (2006) donde se realiza una reconstrucción de los *sistemas de numeración* y de la *medida de magnitudes continuas* que servirá, posteriormente, de referencia para el análisis de manuales y de procesos de estudio de dichas praxeologías matemáticas y para el diseño de varios procesos de estudio en diferentes instituciones, entre ellos, uno en torno al número y la numeración en el primer ciclo de Educación Primaria.

En Sierra, Bosch & Gascón (en prensa) se propone un recorrido de formación de maestros de Educación Infantil que pretende responder a la cuestión:*¿Cómo enseñar a contar a alumnos de Educación Infantil?* Para ello, se analiza primero *¿cuál es la razón de ser de la actividad de contar?*, o sea, *¿cuáles son las cuestiones a las que responde la necesidad de utilizar los primeros números?* Y, en consecuencia, *¿cuáles son las tareas problemáticas que dan sentido a los primeros números y cuáles las posibles técnicas que permiten resolverlas?* Para ello se utilizan y reinterpretan algunos resultados de investigaciones realizadas dentro de la TSD.

En Ruiz-Higueras & García (2011) se describe y se analiza un proceso de modelización diseñado e implementado en la etapa de Educación Infantil (3 a 6 años) sobre un sistema dinámico de variación en términos de praxeologías matemático-didácticas. Dicho proceso es generado por una cuestión generatriz que va a conducir a la construcción por los alumnos de cuatro praxeologías matemáticas en torno a los primeros conocimientos numéricos. Además se analiza, describe y justifica la acción didáctica de la maestra en la gestión de las praxeologías didácticas.

4. PROPUESTA DE UN CRITERIO PARA INTERPRETAR Y RELACIONAR ENTRE SÍ LAS INVESTIGACIONES DIDÁCTICAS Y LOS ENFOQUES TEÓRICOS QUE LAS SUSTENTAN

En este apartado propondremos, como criterio para interpretar y clasificar las investigaciones didácticas y, más ampliamente, los enfoques teóricos que las sustentan, un criterio inspirado en la teoría de la *trasposición didáctica* (Chevallard, 1985/1991) y, más concretamente, en la progresiva ampliación de la base empírica que propugna la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) cuando propone como *unidad de análisis de los procesos didácticos* una secuencia del proceso didáctico que incluya todas las etapas de la transposición didáctica[38], esto es, el proceso de reconstrucción escolar de

[38] Para que un conocimiento pueda llegar a ser enseñado en la escuela ha sido necesario que éste sufra un conjunto de transformaciones que hagan posible que algo que no fue creado para la escuela pueda ser reconstruido dentro de ella**.** A este conjunto de transformaciones es a lo que se llama *proceso de transposición didáctica*. Dicho proceso comienza cuando un conjunto de representantes de diferentes instituciones debe elegir el cuerpo de conocimientos, que se considera que los individuos de una institución deben estudiar y aprender, dentro del conjuntos de conocimientos científicos existentes en Matemáticas, es

una Organización Matemática local relativamente completa (Bosch, Fonseca & Gascón 2004; Bosch & Gascón 2005).

Matemática "sabia" Institución productora	→	**Matemática "a enseñar"** Noosfera	→	**Matemática "efectivamente enseñada"** Institución escolar	→	**Matemática "aprendida"** Comunidad de estudio

Postulamos que todo enfoque teórico en didáctica de las matemáticas, toma, de manera más o menos explícita, una *unidad de análisis* que es, a la vez, el constructo teórico básico y el ámbito elemental en el que se analizarán todos los datos empíricos. La unidad de análisis elegida ocupará, por lo tanto, un lugar central y privilegiado en la relación entre la teoría y los datos empíricos y constituirá así uno de los rasgos esenciales para caracterizar el enfoque teórico en cuestión.

Es evidente que cuando se elige una unidad de análisis particular se están tomando decisiones sobre:

- El tipo de *datos empíricos* que se van a tener en cuenta y, por tanto, sobre los datos que se van a ignorar.
- Las formas posibles de *interpretar* dichos datos.
- El tipo de *relaciones* que se van a priorizar en el análisis y que serán, en última instancia, relaciones entre elementos constitutivos de la unidad elegida.
- El tipo de *problemas didácticos* que el enfoque teórico va a considerar.

En el esquema de las etapas de la transposición didáctica, I_1 es la institución *productora* del saber matemático, I_2, la *noosfera*, I_3, la institución *escolar* e I_4, la *comunidad de estudio* protagonista del proceso didáctico. El "saber aprendido" está compuesto por aquellos elementos praxeológicos que, al final del proceso didáctico, integrarán el *medio matemático del grupo* y que, por lo tanto, podrán ser utilizados (por la comunidad de estudio) de manera relativamente no problemática para la realización de nuevos tipos de tareas y para el estudio de nuevas cuestiones.

A continuación propondremos un nuevo criterio cuya aplicación sistemática postulamos que permitirá:

1. Dar una primera interpretación de los trabajos en investigación didáctica.

---

decir, lo que se llama *el saber matemático* o *matemática sabia*. A continuación, un grupo de expertos deberá realizar un proceso de reconstrucción de dichos conocimientos con la finalidad de transformarlos en objetos enseñables, esto es lo que se llama *el saber a enseñar*. Dicho grupo de representantes y expertos (que llamamos, la *noosfera*) estará formado por profesores que diseñan los planes de estudio, matemáticos productores del saber sabio o científico, por miembros del sistema de enseñanza (profesores, inspectores, representantes de la sociedades de profesores, etc.). Más tarde los profesores de la institución de enseñanza deben llevar a cabo las preparaciones de las lecciones que han de impartir a sus estudiantes sobre dicho cuerpo de conocimientos, es lo que se llama *el saber enseñado*. Este proceso termina cuando los estudiantes consiguen aprender dicho cuerpo de conocimientos dándoles sentido, esto es lo que se llama *el saber aprendido*. Este proceso, necesario para que la enseñanza sea posible, es fuente de muchas restricciones sobre el tipo de enseñanza que se imparte y sobre el tipo de actividad matemática que es posible realizar en la institución escolar. A veces, puede suceder que la actividad matemática, que el alumno realiza en el aula, esté muy alejada del *saber matemático* que se propuso como *saber a enseñar*, de ahí la necesidad de vigilar este proceso de transposición a lo largo de las diferentes etapas por las que pasa y a través de las cuales se va transformando y reconstruyendo.

2. Ayudar a proponer formas de desarrollar o completar relativamente dichos trabajos,

3. Relacionar las investigaciones a las que se aplique y hasta colaborar en el desarrollo del "diálogo" entre teorías o enfoques teóricos en didáctica de las matemáticas.

El criterio consiste en mostrar en cada caso la naturaleza y la amplitud de la base empírica, la actividad matemática que se ha tomado en consideración y, en la medida de lo posible, la relación entre ambas. De esta forma se podrán comparar los alcances respectivos de las diferentes investigaciones y se podrán proponer desarrollos posibles de estas que, en algunos casos, podrán facilitar el diálogo entre enfoques diferentes. Su aplicación efectiva requeriría responder para cada trabajo de investigación concreto y, sobre todo, para cada enfoque teórico que sustenta un conjunto de trabajos, a dos tipos de cuestiones:

(1) ¿Cuál es la amplitud, el *alcance del ámbito institucional* (en referencia a las instituciones que intervienen en la transposición didáctica de los saberes matemáticos) que se toma en consideración en el *problema didáctico* concreto que se plantea? Esto es, ¿en qué institución o instituciones se toman prioritariamente los datos empíricos? ¿En cuál o cuáles de las etapas de la transposición didáctica se cuestiona el conocimiento matemático? Esto es, ¿se cuestiona la matemática "aprendida", la matemática "efectivamente enseñada", la matemática "a enseñar" y la matemática "sabia"? A fin de explicitar y hacer operativo dicho cuestionamiento, ¿se elabora explícitamente un modelo epistemológico alternativo de, por ejemplo, la matemática "a enseñar"?

(2) ¿Cuál es la *amplitud de la actividad matemática* que se toma en consideración en el *problema didáctico* que se plantea? Teniendo en cuenta la relatividad institucional del conocimiento matemático, esto es, la forma específica en que se consideran los objetos matemáticos en las diferentes instituciones (en nuestro caso, la Educación Infantil y Primaria), ¿la actividad matemática considerada en dicho problema didáctico, se reduce a una tarea *puntual* acompañada por una técnica matemática relativamente aislada o, por el contrario, contiene un conjunto de tareas y técnicas, una práctica matemática, que engloba lo que en Educación Infantil y Primaria se considera como un "tema" (actividad matemática *local*)? ¿La actividad matemática tomada en consideración llega a englobar toda un área de la matemática escolar como, por ejemplo, la geometría (actividad matemática *regional*)? ¿Cuál es la "razón de ser" de la actividad matemática considerada? Esto es, ¿cuáles son las cuestiones a las cuáles dicha actividad matemática responde?

Para responder a estas cuestiones es imprescindible que el trabajo de investigación que pretendemos interrogar proponga explícita y claramente un *problema didáctico* (con la ayuda de las herramientas proporcionadas por el enfoque teórico que lo sustenta). Así podremos empezar a caracterizar el tipo de problemas que plantean las investigaciones que se sustentan en cada uno de los enfoques teóricos y, en consecuencia, el *objeto de estudio de la didáctica de las matemáticas* tal como es construido por los enfoques teóricos en cuestión.

Una vez respondidas estas cuestiones para un trabajo de investigación determinado, se plantearán posibles ampliaciones del problema didáctico inicial mediante la inclusión, si fuera necesario, de datos empíricos provenientes de instituciones no tomadas en consideración en primera instancia, mediante la potencial ampliación de la actividad matemática considerada en el mismo, haciendo explícita la "razón de ser" de dicha actividad matemática. Obtendremos así, hipotéticamente, una más profunda comprensión de la problemática involucrada y, en algunos casos, una solución más sencilla de la misma.

En general, postulamos que la aplicación sistemática de este criterio – que, aceptamos a priori, requerirá un enorme esfuerzo – permitirá, más allá de cuestiones puramente formales, relacionar de forma más detallada el "contenido" de los problemas didácticos planteados y abordados por los diferentes trabajos de investigación por lo que puede favorecer el necesario diálogo entre las diferentes teorías didácticas.

Iniciamos la puesta en marcha de esta propuesta aplicándola a dos ejemplos que utilizan marcos teóricos distintos.

Ejemplo (1): Guillén, G. (2004). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática, *Educación Matemática*, 16/3, 103-125.

En lo referente al alcance del ámbito institucional que se toma en consideración en este trabajo hay que decir que los datos empíricos a los que se alude se toman esencialmente de una *comunidad de estudio* virtual. No se analizan ni se cuestionan ni la matemática "efectivamente enseñada", ni la matemática "a enseñar" ni, mucho menos, la matemática "sabia". De hecho, en coherencia con el modelo de Van Hiele, se asume de manera explícita un modelo epistemológico general de la actividad matemática bastante próximo al euclideanismo (Gascón, 2001) que es el modelo dominante en la *institución productora* del conocimiento matemático. Este modelo es compatible con una interpretación de la actividad matemática a través de las etapas de *describir/analizar*, *clasificar*, *definir* y *demostrar*.

En cuanto a la *amplitud de la actividad matemática* que se toma en consideración podría decirse que, en primera instancia, engloba un *sector* de la matemática escolar (la geometría de los sólidos) dentro del *área* de la geometría. Es importante subrayar, sin embargo, que la naturaleza de la actividad matemática que interviene efectivamente en este trabajo está completamente determinada –como no podría ser de otra forma– por el modelo epistemológico de las matemáticas que se asume. Además, en este caso, el trabajo se centra en la primera de las etapas de dicha actividad, esto es, principalmente en la *descripción y análisis de objetos geométricos* (sólidos).

Ejemplo (2): Berthelot, R & Salin, M. H (1996). L'enseignement des angles aux élèves de 10 à 13 ans : identification d'un obstacle didactique, *Revue des sciences de l'éducation*, 22/2, 417-442.

Los datos empíricos a los que se alude en este trabajo se toman explícitamente tanto de la *comunidad de estudio,* como de la *institución escolar* y de la *noosfera.* En coherencia con los presupuestos básicos de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) se analiza y cuestiona no sólo la matemática "aprendida" sino también la matemática "efectivamente enseñada" y la matemática "a enseñar". Además, cuando los autores construyen un *modelo epistemológico específico* de la actividad matemática escolar en torno al concepto de ángulo, no asumen acríticamente el modelo dominante en ninguna de dichas instituciones ni, tampoco, el modelo dominante en la institución productora.

Por todo ello podemos afirmar que el ámbito institucional que se toma en consideración en este trabajo contiene todas las etapas de la transposición.

La actividad matemática que se toma en consideración en este trabajo gira en torno a la noción de ángulo, por lo que podemos decir que abarca lo que en Educación Primaria se considera como un "tema" (actividad matemática *local*). De nuevo hay que interpretar la naturaleza y la amplitud de la actividad matemática que se pone en juego a la luz del *modelo epistemológico general* de las matemáticas en el que se sustenta la TSD y que permite dar sentido a investigaciones centradas en ámbitos relativamente reducidos de la actividad matemática.

5. CONCLUSIONES

Hemos realizado una revisión de algunas de las más relevantes investigaciones en Didáctica de las Matemáticas sobre las Matemáticas de la Educación Infantil y Primaria. Las relativas a la Educación Elemental son escasas y, especialmente escasas las de Infantil tanto dentro de la SEIEM, como dentro del EOS y la TAD. Sin embargo, son numerosos los trabajos con esta temática en el ámbito del PME entre los años 1976 y 1986 y, asimismo encontramos una amplia investigación didáctica sobre las matemáticas de Infantil y Primaria en el marco de la TSD. Estos últimos son, probablemente, los que más han influido en el desarrollo del sistema educativo. En efecto, los resultados de los trabajos realizados dentro de la TSD se han visto reflejados en el currículum francés, aportando nociones que estaban ausentes anteriormente como los conocimientos espaciales y la simbolización (ver http://dpernoux.chez-alice.fr/Docs/vers_les_math.pdf).

Así, por ejemplo, a partir de la publicación de un trabajo de Guy Brousseau en los años 70 sobre las ventajas de la técnica de la multiplicación "Per Gelosía" (Brousseau, 1973) para ser utilizada por los alumnos de Educación Primaria, con respecto a la técnica clásica o de Fibonacci, algunos textos escolares y materiales para maestros de Francia (Ermel, 1978, 1981) proponían la técnica "Per Gelosía" como técnica que debían aprender los alumnos de Primaria.

Esta influencia se ha dejado sentir en otros países como, por ejemplo, en Chile, dentro del proyecto "Estrategia LEM" (Lectura-Escritura-Matemáticas) del Ministerio de Educación. En este macro-proyecto se ha llevado a cabo en los últimos años una propuesta de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas en Infantil y Primaria basada fundamentalmente en los resultados de investigaciones realizadas en el marco de la TSD. Este proyecto, dirigido por la profesora Lorena Espinoza (Espinoza y Barbé, 2006), también utiliza, en su fundamentación y desarrollo, algunos elementos del modelo de praxeologías matemáticas y didácticas que propone la TAD. Los resultados obtenidos en la experimentación del equipo chileno, que se inició en el 2003 con un plan piloto en la región Metropolitana de Santiago de Chile, trabajando con 20 escuelas, 4500 alumnos y 160 profesores, permitirá, en un futuro próximo, avanzar en el diseño e implementación de procesos de estudio análogos en otros países. Para una revisión más detallada consultar la página del Centro Felix Klein: http://www.centrofelixklein.cl/?page_id=38.

En la última parte de nuestro trabajo hemos presentado una propuesta para interpretar y relacionar entre sí las diferentes investigaciones didácticas y los enfoques teóricos que las sustentan. Se trata de una propuesta diseñada desde el enfoque que proporciona la Teoría Antropológica de lo Didáctico y ha sido presentada con el objetivo explícito de ser discutida en el ámbito de esta comunidad. Postulamos que no es posible proponer *criterios "neutros" de clasificación e interpretación* de trabajos de investigación didáctica, a menos que se trate de criterios puramente *formales* como los que hemos indicado al principio de este trabajo, esto es, criterios relativos al contenido matemático que aparece en el trabajo, al enfoque teórico que lo sustenta o al tipo de metodología de investigación utilizada. Pero si pretendemos tomar en consideración el contenido de los trabajos y, en especial, el tipo y la naturaleza de los *problemas didácticos* que éstos formulan y abordan, entonces deberemos situarnos necesariamente en un enfoque didáctico concreto y elaborar criterios con ayuda de las herramientas teóricas y metodológicas que dicho enfoque nos proporciona. Creemos que sólo así será posible valorar y comparar adecuadamente el alcance y las limitaciones de los diferentes trabajos de investigación y potenciar el necesario diálogo y desarrollo mutuo, que no necesariamente integración, de los enfoques teóricos en didáctica de las matemáticas que sustentan los trabajos en cuestión.

Referencias

1. Trabajos presentados en los Simposios de la SEIEM sobre Educación Infantil y Primaria

Alfonso, D.; Rigo, M.; Gómez, B. (2008). *El papel del profesor en los procesos de auto-regulación del aprendizaje de las matemáticas en el salón de clases de la escuela elemental*. En Luengo, R.; Gómez, B.; Camacho, M; Blanco, L. (Eds.), Investigación en educación matemática XII (pp. 415-424). Badajoz: SEIEM.

Ayllón, M. F.; Castro, E.; Molina, M. (2010). *Conocimiento aritmético informal puesto de manifiesto por una pareja de alumnos (6-7 años) sobre la invención y resolución de problemas.* En Moreno, M.; Estrada, A.; Carrillo, J.; Sierra, T. A. (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIV (pp. 223-233). Lleida: Edicions de la Universitat de Lleida y SEIEM.

Bosch,M.; Gascón, J.; Sierra T. (2009). *Análisis de los manuales españoles para la formación de maestros: el caso de los sistemas de numeración*. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIII (pp. 139-150). Santander: SEIEM

Carrillo, J.; Climent, N. (2002). *El caso del desarrollo profesional de una maestra*. En Murillo, J.; Arnal, P. M.; Escolano, R.; Gairín, J.M. (Eds.), Actas del VI Simposio de la SEIEM (pp. 29-46). Logroño: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Castro, E.; Castro, Encarnación; Rico, L.; Gutiérrez, J.; Tortosa, A.; Segovia, I.; González, E.; Morcillo, N.; Fernández, F. (1997). *Problemas aritméticos compuestos de dos relaciones.* En Sierra, M.; Rico, L. (Eds.), Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (pp. 64-77). Zamora: Universidad de Granada.

Climent, N.; Carrillo, J. (2005). *Proyecto "METE" (Mathematics Education Traditions of Europe): polígonos en primaria.* En Maz, A.; Gómez, B.; Torralbo, M. (Eds.), Noveno Simposio de la SEIEM (pp. 139-144). Córdoba: SEIEM.

Edo, M.; Deulofeu, J. (2005). *Juegos, interacción y construcción de conocimientos matemáticos: investigación sobre una práctica educativa*. En Maz, A.; Gómez, B.; Torralbo, M.(Eds.), Noveno Simposio de la SEIEM (pp. 187-196). Córdoba.

Escolano, R. (2001). Enseñanza del número racional positivo en educación primaria: un estudio desde el modelo cociente. En Moreno, M. F.; Gil, F.; Socas, M.; Godino, J. D. (Eds.), *Investigación en educación matemática: Quinto Simposio de la SEIEM* (pp. 149-158). Almería: Servicio de Publicaciones.

Fernández, C. (2002). Entrevistas clínicas individuales a escolares de 3 a 6 años: una modelización de las competencias ordinales en Educación Infantil. En Murillo, Jesús; Arnal, Petra María; Escolano, Rafael; Gairín, José María (Eds.), *Actas del VI Simposio de la SEIEM* (pp. 95-136). Logroño: SEIEM.

Figueras, O.; Guillén, G. (2004). Estudio exploratorio sobre la enseñanza de la geometría en primaria: elaboración de una encuesta. En Castro, E.; de la Torre, E. (Eds.), *Investigación en educación matemática: Octavo Simposio de la SEIEM* (pp. 219-228). A Coruña: Servicio de Publicaciones.

Fiol, M. L. (1999). La investigación del aprendizaje de la geometría en la educación primaria. En Ortega, T. (Ed.), *Actas del III SEIEM* (pp. 17-24). Valladolid: SEIEM.

González, J.L. (1997). Clasificación de problemas aditivos por sus estructuras numérica y semántica global. En Sierra, M.; Rico, L. (Eds.), *Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 78-106). Zamora: Universidad de Granada.

Guillén, G.; Sáiz, M.; Figueras, O.; Corberán, R.M. (2003). Transferencia de resultados de investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría al aula. En Castro, E. (Ed.), Investigación *en Educación Matemática: séptimo Simposio de la SEIEM* (pp. 247-256). Granada: Universidad de Granada.

Guillén, G.; Figueras, O. (2005). Estudio exploratorio sobre la enseñanza de la geometría en primaria: curso-taller como técnica para la obtención de datos. En Maz, A.; Gómez, B-; Torralbo, M. (Eds.), *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM* (pp. 227-234). Córdoba

Giménez, J.; Ruesga, M. P.; Orozco, M. (2003). Sobre la equilibración y la introducción de tareas de transformación mediante flechas en educación infantil. En Castro, E. (Ed.), *Investigación en educación matemática: séptimo Simposio de la SEIEM* (pp. 323-338). Granada: Universidad de Granada.

Lacasta, E.; Wilhelmi, M. R. (2008). Juanito tiene cero naranjas. En Luengo, R.; Gómez, B.; Camacho, M.; Blanco, L. (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 403-414). Badajoz: SEIEM.

Lacasta E., Malaspina U., Pascual J. R., Wilhelmi M. R. (2009). Análisis a priori de una situación de optimización en segundo de Educación Primaria. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educción Matemática XIII.* (pp.247–258). Santander: SEIEM.

Lopes, M. H.; Salinas, M. J. (2006). O trabalho cooperativo nas aulas de Matemática: numa turna do 5º ano: una experiência curricular. En Bolea, M. P.; Moreno, M.; González, M. J. (Eds.), *Investigación en educación matemática: actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 256-267). Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses.

Lopes, M. H.; Salinas, M. J.; Palhares, P. (2008). O trabalho cooperativo na resolução de problemas de áreas. En Luengo, R.; Gómez, B.; Camacho, M.; Blanco, L. (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 647-658). Badajoz: SEIEM.

Molina, M., Ambrose, R. (2010). El papel del lenguaje en la resolución de problemas verbales aritméticos. Un estudio con alumnos bilingües. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 423-434). Lleida: SEIEM.

Molina, M. (2007). *La* integración del pensamiento algebraico en educación primaria. En Camacho, M.; Flores, P.; Bolea, M. P. (Eds.), *Investigación en educación matemática* (pp. 53-70). San Cristóbal de la Laguna, Tenerife: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Muñoz-Catalán, Mª C.; Carrillo, J.; Climent, N. (2006). La reflexión de una maestra de Matemáticas en el "Prácticum" y en los inicios de su práctica docente. En Bolea, M. P.; Moreno, M.; González, M. J. (Eds.), *Investigación en educación matemática: actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 217-224). Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses.

Noda, A., Bruno, A. (2009). Conceptos, estrategias y errores en las operaciones de suma y resta en alumnos con síndrome de down. En González, M.J.; González, M.T. & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 333-344). Santander: SEIEM.

Núñez, C.; Castro, C.; del Pozo, A.; Mendoza, C.; Pastor, C. (2010). Inicio de una investigación de diseño sobre el desarrollo de competencias numéricas con niños de 4 años. En Moreno, M.; Carrillo, J.; Estrada, A., Sierra, T.A. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 463-474). Lleida: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Ortiz, A. (1998). Entrevistas semiestructuradas: una aplicación en educación primaria. En Pascual, J.R. (Ed.), *Segundo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 33-54). Pamplona: SEIEM.

Perera, P. B.; Valdemoros, M. E. (2007). Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado de educación primaria. En Camacho, M.; Flores, P.; Bolea, M. P. (Eds.), *Investigación en educación matemática* (pp. 53-70). San Cristóbal de la Laguna, Tenerife: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Puig, L.; Fernández, A. (2002). Una actividad matemática organizada en el marco de los modelos teóricos locales: razón y proporción en la escuela primaria. En Murillo, J.; Arnal, P. M.; Escolano, R.; Gairín, J.M. (Eds.), *Actas del VI Simposio de la SEIEM* (pp. 29-46). Logroño: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Ribeiro, C. M., Carrillo, J., Monteiro, R. (2009). ¿De qué nos informan los objetivos del profesor sobre su práctica?: análisis e influencia en la práctica de una maestra.

En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática, XIII* (pp. 415-423). Santander: SEIEM.

Salgado Somoza, M., Salinas Portugal, M.J. (2009). El número en los libros de texto de Educación Infantil. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 487-497). Santander: SEIEM.

Salinas, M. J. (2007). Errores sobre el sistema de numeración decimal de estudiantes de magisterio. En Camacho, M.; Flores, P.; Bolea, M. P. (Eds.), *Investigación en educación matemática* (pp. 53-70). San Cristóbal de la Laguna, Tenerife: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Socas, M.; Hernández, J.; Noda, A. (1997). Clasificación de PAEV aditivos de una etapa con cantidades discretas relativas. En Sierra, M.; Rico, L. (Eds.), *Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 46-62). Zamora: Universidad de Granada.

Wilhelmi, M. R.; Lacasta, E. (2007). Un modelo docente para la formación en geometría de maestros en educación infantil. En Camacho, M.; Flores, P.; Bolea, M. P. (Eds.), *Investigación en educación matemática* (pp. 315-324). San Cristóbal de la Laguna, Tenerife: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

2. Trabajos relacionados con diferentes enfoques teóricos

2.1 Trabajos relacionados con el PME

Anghileri, J. (2001). What are we trying to achieve in teaching standard calculating procedures? En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME International Conference, 2*, 41-48.

Askew, M. (2003). Mental calculation: Interpretations and implementation. En N. A. Pateman, B. J.Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th PME International Conference, 1*, 202.

Bills, C., & Gray, E. (2001). The 'particular', `generic' and 'general' in young children's mental calculations. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME International Conference, 2*, 153-160.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2002). Design principles for tasks that support algebraic thinking in elementary school classrooms. En A. D. Cockbum & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th PME International Conference, 2*, 105-112.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2004). Elementary students' capacity for functional thinking. En M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th PME International Conference, 2*, 135142.

Boaler, J. (2003). Studying and capturing the complexity of practice-the case of the dance of agency. En N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th PME International Conference, 1*, 3-16.

Boero, P. (1989). Mathematical literacy for all experiences and problems. En G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the 13th PME International Conference, 1*, 62-76.

Brown, M. (2002). Researching primary numeracy. En A. D. Cockbum & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th PME International Conference, 1*, 15-30.

Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1979). The development of addition and subtraction concepts in young children. En D. Tall (Ed.), *Proceedings of the 3rd PME International Conference, 1*, 40-46.

Clarke, B., McDonough, A., & Sullivan, P. (2002). Measuring and describing learning: The early numeracy research project. En A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th PME International Conference, 1*, 181-185.

Cobb, P. (1994). A summary of four case studies of mathematical learning and small group interaction. En J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 16thl PME International Conference, 2*, 210218.

Diezmann, C. M. (2000). The difficulties students experience in generating diagrams for novel problems. En T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th PME International Conference, 2*, 241-248.

Diezmann, C. M., Watters, J. J., & English, L. D. (2001). Difficulties confronting young children undertaking investigations. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME International Conference, 2*, 353-360.

English, L. D. (1996). Children's reasoning in solving novel problems of deduction. En L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME International Conference, 2*, 329-336.

English, L. D. (Ed.), (1997). *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images*. Mahwah, New Jersey, USA: Lawrence Erlbaum.

English, L. D. (2004). Promoting the development of young children's mathematical and analogical reasoning. En L. D. English (Ed.), *Mathematical and analogical reasoning of young learners* (pp. 210-215). Mahwah, NJ, USA: Lawrence Erlbaum.

English, L. D., & Watters, J. J. (2005). Mathematical modeling with 9-year-olds. En H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th PME International Conference, 2*, 297-304.

Fischbein, E. (1978). Intuition and mathematical education. En E. Cohors-Fresenborg & I. Wachsmuth (Eds.), *Proceedings of the 2nd PME International Conference*, 148-176.

Fischbein, E. (1983). Role of implicit models in solving elementary arithmetical problems. En R. Hershkowitz (Ed.), *Proceedings of the 7th PME International Conference*, 2-18.

Fox, G. (2005). Child-initiated mathematical patterning in the pre-compulsory years. En H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th PME International Conference, 2*, 313-320.

Fujii, T., & Stephens, M. (2001). Fostering an understanding of algebraic generalization through numerical expressions: The role of quasi-variables. En H. L. Chick, K. Stacey, & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI study conference: The future of teaching and learning algebra* (pp. 258-264). Melbourne, Australia: University of Melbourne.

Glasersfeld, E. von (1981). Things, pluralities, and counting. En C. Comiti & G. Vergnaud (eds.) *Proceedings of 5th International Conference on Psychology in Mathematics Education*, Vol. 1 (pp. 18-24). Grenoble, France: IMAG.

Goldin, G. A.,; Passantino, C. B. (1996). A longitudinal study of children's fraction representations and problem-solving behavior. En L Puig & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME International Conference, 3,* 3-10.

Gray, E. M.; Pitta, D. (1996). Number processing: Qualitative differences in thinking and the role of imagery. En L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME International Conference, 3,*155-162.

Gray, E. M.; Pitta, D. (1999). Images and their frames of reference: A perspective on cognitive development in elementary arithmetic. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd PME International Conference*, *3*, 49-56.

Gray, E. M.; Tall, D.O. (1991). Duality, ambiguity and flexibility in successful mathematicalthinking. En F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th PME International Conference, 2*, 72-79.

Gray, E. M.; Tall, D.O. (2001). Relationships between embodied objects and symbolic procepts: An explanatory theory of success and failure in mathematics. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME International Conference, 3*, 65-72.

Groves, S. (2002). Calculators — The first day. En A. D. Cockbum & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th PME International Conference, 1*, 98-109.

Groves, S.; Doig, B. (2002). Developing conceptual understanding: The role of the task in communities of mathematical inquiry. En A. D. Cockbum & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th PME International Conference, 3*, 25-32.

Harrison, B., Bye, M.P.; Schroeder, T.L. (1985). Pupil cognitive ability levels compared with curricular demands when six-to-eight-year-olds are taught arithmetic operations. En L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the 9th PME International Conference, 1*, 210-215.

Hershkowitz, R. (1999). Where in shared knowledge is the individual knowledge hidden? En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd PME International Conference, 1*, 9-24.

Irwin, K. (1990). Children's understanding of compensation, addition and subtraction in part-whole relationships. En G. Booker, P. Cobb, & T. N. Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the 14th PME International Conference, 3*, 257-264.

Irwin, K.C.; Ginsburg, H.P. (2001). Early mathematical discourse. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME International Conference, 3*, 185-192.

Janvier, C.; Bednarz, N. (1989). Representation and contextualization. En G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the 13th PME International Conference, 2*, 139-146.

Jones, G.A., Langrall, C.W., Thomton, C.A.; Nisbet, S. (2002). Elementary students' access to powerful mathematical ideas. En L. D. English (Ed.), *Handbook of* *international research in mathematics education* (pp. 113-141). Mahwah, NJ, USA: Lawrence Erlbaum.

Kilpatrick, J. (1987). What constructivism might be in mathematics education. En J. C. Bergeron, N. Herscovics & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th PME International Conference, 1*, 3-27.

Lesh, R. (1985). Conceptual analyzes of mathematical ideas and problem-solving processes. En L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the 9th PME International Conference, 2*, 73-96.

Lowrie, T.; Diezmann, C. (2005). Fourth-grade students' performance on graphical languages in mathematics. En H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th PME International Conference, 3*, 265-272.

Maher, C. (2002). How students structure their own investigations and educate us: What we've learned from a 14-year study. En A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th PME International Conference, 1*, 31-46.

McClain, K.; Cobb, P. (2001). An analysis of development of sociocultural norms in one first grade classroom. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*, 236-266.

Mulligan, J.T., Mitchelmore, M.C., & Prescott, A. (2005). Case studies of children's development of structure in early mathematics: A two-year longitudinal study. En H. L. Chick & J. L Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th PME International Conference, 4*, 1-8.

Mulligan, J.T., Prescott, A.; Mitchelmore, M.C. (2004). Children's development of structure in early mathematics. En M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th PME International Conference, 3*, 393-401.

Nesher, P., & Greeno, J. G. (1981). Semantic categories of word problems reconsidered. En Equipe de Recherche Pédagogique (Eds.), *Proceedings of the 5th PME International Conference*, 63-68.

Nunes, T. (1989). Numeracy without schooling. En G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the 13th PME International Conference, 1*, 164-171.

Nunes, T. ; Schliemann, A. D. (1987). Manipulating equivalences in the market and in mathematics. En J. C. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th PME International Conference, 1*, 289-294.

Papic, M. (2005). The development of patterning in early childhood. En H. Chick, & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th PME International Conference, 1*, 269.

Perry, B.; Dockett, S. (2002). Young children's access to powerful mathematical ideas. En L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 81-111). Mahwah, NJ, USA: Lawrence Erlbaum.

Perry, B., Putt, I.J., Jones, G.A., Thornton, C.A., Langrall, C. W.; Mooney, E. S. (2000). Elementary school students' statistical thinking: An international perspective. En T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th PME International Conference, 4*, 65-72.

Pitta, D.; Gray, E.M. (1996). Nouns, Adjectives and Images in Elementary Mathematics. En L. Puig and G. Guitiérrez (Eds.), *Proceedings of XX International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 35-42). Valencia: Spain

Pitta-Pantazi, D., Christou, C.; Gray, E., (2002). Mental representations in elementary arithmetic. En A. D. Cockbum & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th PME International Conference, 4*, 65-72.

Richards, J. (1981). Pre-numerical counting. En Equipe de Recherche Pédagogique (Eds.), *Proceedings of the 5th PME International Conference, 1,* 25-30.

Sáenz-Ludlow, A. (2003). An interpreting game in a third grade classroom. En N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th PME International Conference, 4*, 79-87.

Schliemann, A., Carraher, D.W., Brizuela, B.M., Earnest, D., Goodrow, A., Lara-Roth, S., et al. (2003). Algebra in elementary school. En N. A. Pateman, B. J. Dougherty & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th PME International Conference, 4*, 127-134.

Selva, A.C.V., Da Rocha Falcáo, J.T.; Nunes, T. (2005). Solving additive problems at pre-elementary school level with the support of graphical representation. En H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th PME International Conference, 4*, 161-168.

Sinclair, H. (1987): Constructivism and the psychology of mathematics. En J. C. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th PME International Conference, 1*, 28-41.

Spinillo, A.G. (1997). Chance estimates by young children: Strategies used in an ordering chance task. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st International PME Conference, 4,* 182-189.

Steffe, L.P. (1981). Operational counting and position. En Equipe de Recherche Pédagogique (Eds.), *Proceedings of the 5th PME International Conference, 1*, 12-17.

Steffe, L.P. (1984). Children's prenumerical adding schemes. En B. Southwell, R. Eyland, M. Cooper, J. Conroy, & K. Collis (Eds.), *Proceedings of the 8th PME International Conference*, 313-327.

Tabach, M.; Hershkowitz, R. (2002). Construction of knowledge and its consolidation: A case study from the early-algebra classroom. En A. D. Cockbum & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th PME International Conference, 4*, 265-272.

Thomas, N., Mulligan, J.T.; Goldin, G.A. (2002). Children's representations and cognitive structural development of the counting sequence 1-100. *Journal of Mathematical Behavior, 21,* 117-133.

Vergnaud, G. (1978). The Acquisition of Arithmetical Concepts. En *Proceedings of the 2nd PME Conference*, vol. 1, pp. 344-355.

Vergnaud, G. (1981): Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. En *Proceedings of the 5th PME Conference,* vol. 2, pp. 7-17

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. En Carpenter, T., Moser, J. & Romberg, T. (1982), *Addition and subtraction. A cognitive perspective* (pp. 39-59). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En Lesh, R. and Landau, M. (Eds.) *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 127-174). New York: Academic Press Inc.

Vergnaud, G. (1987). About constructivism. En *Proceedings of the twelvth Conférence for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 42-54). Montréal.

Vergnaud. G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Récherches en Didactique des Mathématiques,* 10 (23), 133-170.

Warren, E. (2005). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. En Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 305-312. Melbourne: PME.

2.2 Trabajos relacionados con la TSD

Artigue, M. (2004). Problemas y desafíos en Educación Matemática. ¿Qué nos ofrece hoy la Didáctica de la Matemática para afrontarlos? *Educación Matemática*, 16 (003), 5–28.

Berthelot, R. ; Salin M.H. (1992), *L'enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire,* Thèse de doctorat, Bordeaux.

Berthelot, R.; Salin M.H. (1999-2000). *L'enseignement de l'espace à l'école primaire. Grand N*, 65, 37-59.

Briand, J. (1993). *L'enumération dans le mesurage des collections : un dysfonctionnement dans la transposition didactique*. Tesis doctoral. Ladist. Université Bordeaux I.

Briand, J.; Loubet, M.; Salin, M.H. (2004). *Apprentissages mathématiques en maternelle* [Cédérom]. Paris : Hatier. 1 cédérom + 1 notice (15 p.). Hatier pédagogie.

Brousseau, G. (1973), Peut-on améliorer le calcul des produits des nombres naturels ? *Actes du 3e congrès des sciences de l'éducation « Apports des disciplines fondamentales aux sciences de l'éducation* (Vol. 1, pp. 361-378). Paris: EPI

Brousseau, G. (2000). Les différents univers de la mesure et leurs situations fondamentales. Un exemple d'utilisation de la théorie des situations pour l'ingénierie. *Quaderni di Ricerca in Didattica,* 9. Disponible en: http://dipmat.math.unipa.it/~grim/quaderno9.htm.

Brousseau, G. (2001), Les grandeurs dans la scolarité obligatoire, *Actes de la 11eEcole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, (Corps) version courte 331-348, version longue, CDrom (43p) La pensée sauvage.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Editorial Zorzal. Traducción de Fregona, D.

Brousseau, G. (2010) Le calcul humain des multiplications et des divisions de nombres naturels. *Grand N,* 85, pp. 13 - 41

Brousseau, G. ; Foucaud, R. (1992). Situations didactiques pour l'apprentissage des nombres naturels. IREM de Bordeaux. (http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/51/51/11/PDF/Situations_didactiques_pour_l_apprentissage_des_nombres_naturels.pdf) (Recuperado el 8 de junio de 2011)

Chamorro, C. (1997), *Estudio de las situaciones de enseñanza de la medida en la escuela elemental*. Tesis doctoral. Universidad Nacional de Educación a Distancia.

El Bouzaoui, H. (1982) *Etude de situations scolaires des premiers enseignements du nombre et de la numération*. Thèse d'Université, Bordeaux 1.

Ermel (1978). *Apprentissages mathématiques à l'école élementaire*. Cycle Élémentaire . tome 2. Sermap O.C.D.L., París.

Ermel (1981). *Apprentissages mathématiques a l'école élementaire*. Cycle Moyenne. tome 1. Sermap Hatier, París.

Espinoza, L.; Barbé, J. (2006). El problema de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Básica Chilena: la "Estrategia de Asesoría a la escuela en la implementación curricular LEM-Matemática" como una vía de abordaje. *Actas del I Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico*. Baeza (España).

Peres J. (1984), *Utilisation d'une théorie des situations en vue de l'identification des phénomènes didactiques au cours d'une activité d'apprentissage scolaire : Construction d'un code de désignation d'objets à l'école maternelle* ; Thèse de 3ième cycle Université Bordeaux II, publié par IREM de Bordeaux

Gálvez, G. (1985). *El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano. Una proposición para la enseñanza de la geometría en la escuela primaria*. Tesis de doctorado, DIECINVESTAV-IPN, México.

Orús, P. (1992). *Le raisonnement des élèves dans la relation didactique; effects d'une initiation à l'analyse classificatoire dans la scolarité obligatoire*. Tesis Doctoral. Université de Bordeaux.

Salin, M.H. (2004). La enseñanza del espacio y la geometría en la escuela elemental. En *Números, formas y volúmenes en el entrono del niño* (pp. 37-80). Madrid: Instituto Superior de Formación del Profesorado, Ministerio de Educación y Ciencia.

2.3 Trabajos relacionados con el EOS

Castro, C. (2007).La evaluación de métodos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Infantil. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación matemática*, 11, 59-77.

Godino, J.D., Font, V.; Wilhelmi, M. R. (2006) Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *RELIME*, 9 (Especial), 133-156.

Godino, J.D., Font, V., Wilhelmi, M. R.; Arrieche, M. (2009). ¿Alguien sabe qué es un número? *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 19, 34-46.

Godino, J.D., Font, V., Wilhelmi, M.R. y Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*, 77 (2), 247-265. DOI 10.1007/s10649-010-9278-x (Versión preliminar en español en http://www.ugr.es/~batanero/)

2.4 Trabajos relacionados con la TAD

Bosch, M., Fonseca, C. & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las Organizaciones Matemáticas Locales en las instituciones escolares, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24 (2), 205-250.

Bosch, M. & Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. En Mercier, A., Margolinas, C. (eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 107-122). La Pensée Sauvage : Grenoble.

Chevallard, Y. (1985/1991). *La Transposition Didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* La Pensée Sauvage, Grenoble (2ª edición 1991).

Gascón, J. (2001) Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *RELIME*, 4 (2), pp.129-159.

Gascón, J. (2010) Del Problem Solving a los Recorridos de Estudio e Investigación. Crónica del viaje colectivo de una comunidad científica. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* 22, 9-35 (Recuperable en http://www.fisem.org/web/union/revistas/22/Union_022_005.pdf)

Ruiz-Higueras, L. & García. F.J. (2011), Análisis de praxeologías didácticas en la gestión de procesos de modelización matemática en la escuela infantil. *Relime*, 14 (1), 41-70.

Sierra, T. A. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas. Los sistemas de numeración y la medida de magnitudes*. Tesis Doctoral. UCM. Madrid. Recuperable en http://www.ucm.es/BUCM/tesis/edu/ucm-t%2029075.pdf (Última consulta realizada el 12/06/2011)

Sierra, T.A., Bosch, M. & Gascón, J. (en prensa). La formación matemático-didáctica del maestro de educación infantil: El caso de "enseñar a contar". *Revista de Educación. MEC*. http://www.revistaeducacion.mec.es/doi/357_059.pdf (Última consulta realizada el 12/06/2011)