

Desarrollo del modelo cinemático de un RMR a partir de las ecuaciones odométricas



J. A. Tello-Cristiany, R. Silva-Ortigoza y M. Marciano-Melchor
*CIDETEC-IPN. Departamento de Posgrado. Área de Mecatrónica,
Av. Juan de Dios Bátiz s/n. Esq. Miguel Othón de Mendizábal.
Unidad Profesional Adolfo López Mateos, CP 07700, México D. F., México.*

E-mail: jtello0300@ipn.mx

(Recibido el 7 de Diciembre de 2010; aceptado el 17 de Marzo de 2011)

Resumen

El objetivo de este trabajo es la obtención del modelo cinemático de un RMR de tipo diferencial en base a la geometría asociada a la disposición de sus ruedas, conocido como enfoque odométrico. Estas ecuaciones permiten conocer la posición y orientación del RMR a partir del desplazamiento lineal de las ruedas. Se muestra como a partir del enfoque odométrico se obtiene el mismo modelo que cuando se emplea el enfoque de modelado de sistemas dinámicos basados en el formalismo de Euler-Lagrange [1].

Palabras clave: Odometría, robots móviles, localización.

Abstract

The aim of this work is to obtain the kinematic model of a differential drive WMR considering the geometric disposition of their wheels; this is known as the odometric calculus. These equations will give us the position and orientation of the WMR from the lineal displacement of the wheels. It is shown that we can obtain the same kinematic model using these odometric equations as when using dynamics systems modeling of Euler-Lagrange [1].

Keywords: Odometry, mobile robots, localization.

PACS: 07.07.Tw, 07.07.Df, 07.05.Dz.

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

Los robots móviles de ruedas (RMR) tienen amplio uso en muchas aplicaciones prácticas, como exploración planetaria, minera y marítima, reconocimiento de terreno, inspección y vigilancia, misiones de búsqueda y rescate de personas, limpieza de desechos peligrosos y en ambientes diversos, asistencia médica, ocio y entretenimiento, investigación y desarrollo, etc.

El dotar de autonomía a los RMR, implica enfrentarse básicamente a cinco problemas: la regulación o estabilización a un punto de equilibrio, la planificación y seguimiento de trayectorias, la estimación de su posición y la evasión de obstáculos.

La localización en tiempo real de un RMR consiste en obtener su posición y orientación con respecto a un sistema de referencia fijo, para tal propósito se han desarrollado diversos métodos relacionados con el uso de encoders y cámaras principalmente. El método más utilizado para la estimación de la localización en RMR, es el conocido como odometría, que consiste en medir por medio de encoders ópticos el desplazamiento lineal de las llantas acopladas a los actuadores de un RMR, siempre y cuando no se deslicen o se atasquen las mismas con el piso. Con el conocimiento del desplazamiento y estableciendo un punto de partida del

RMR, se calcula la posición relativa a este punto en todo momento. Las ecuaciones necesarias para este cálculo se obtienen a partir de la disposición geométrica de las llantas dentro del RMR [2]. Cabe decir que la odometría es un método de fácil implementación en tiempo real, además de que no es costoso, ya que el único tipo de sensor que usa son los encoders. La desventaja de este método consiste en la acumulación de los errores cuando el recorrido es muy largo, mismos que también causan incertidumbre en la orientación del móvil. En la referencia [3] se encuentra que estos errores se pueden dividir en dos tipos, de acuerdo a la fuente del error: sistemáticos y no sistemáticos, donde los primeros, dependen de la estructura del robot por lo que son internos del propio móvil, mientras que los no sistemáticos son causados por fenómenos aleatorios externos al RMR, como podría ser deslizamiento de las ruedas o como el choque con objetos no previstos. En la literatura concerniente al tema, abundan los trabajos donde se trata de corregir los errores sistemáticos, mediante técnicas de calibración y el modelado del error [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11].

De esta manera, a partir de las ecuaciones odométricas de un RMR de tipo diferencial, en este trabajo se muestra como se obtiene el mismo modelo cinemático, que se obtendría mediante el formalismo de Euler-Lagrange [1].

Este trabajo está dividido en seis secciones. En la sección II se da un panorama del desarrollo e importancia de la odometría. En la sección III se presentan las generalidades asociadas a los RMR tipo diferencial. Mientras que en la sección IV se desarrollan las ecuaciones del cálculo odométrico diferencial, junto con la derivación del modelo cinemático del robot en la sección V. Finalmente, en la sección VI se presentan las conclusiones del trabajo.

II. ANTECEDENTES HISTÓRICOS DE LA ESTIMACIÓN DE LA POSICIÓN ODOMÉTRICA

La palabra odometría proviene de las raíces griegas *hodos* y *metron* que significan “camino” o “viaje”, y “medición”, respectivamente. Se atribuye a Herón de Alejandría [12] la creación de un aparato para determinar la distancia viajada durante un trayecto basado en el conteo de las revoluciones de un carruaje, denominado odómetro, predecesor de los actuales velocímetros analógicos de los automóviles. Mediante este aparato era posible conocer la distancia viajada por los carruajes militares en millas durante el Antiguo Imperio Romano [13]. Si se consulta la referencia [14] se hallará una descripción del funcionamiento de este aparato que también fue utilizado en embarcaciones. En la Fig. 1 se muestra una reconstrucción de este odómetro. Beckmann [15] refiere otros usos hechos para este aparato a lo largo de los siglos XVI al XVIII, tales como la medición de terrenos o distancias muy grandes. Actualmente, la odometría o cálculo muerto odométrico (del inglés *odometric dead reckoning*), se ha convertido en un estándar en la robótica móvil de ruedas, ya que con el uso de encoders acoplados a los motores, la distancia viajada se obtiene de manera natural, empleándose en conjunto con otros sensores y métodos como son: GPS, acelerómetros, láseres, cámaras de visión, etc.

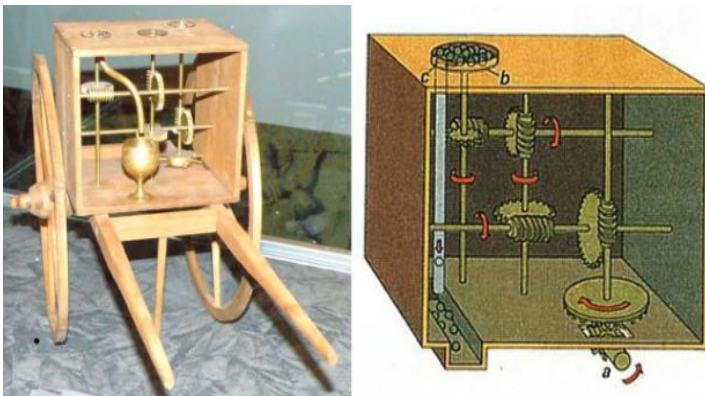


FIGURA 1. A la izquierda se observa una reconstrucción del odómetro diseñado por Herón, cuyo funcionamiento fue descrito por Vitruvius y que se puede apreciar del lado derecho.

III. DESCRIPCIÓN DE LAS VARIABLES CINEMÁTICAS DEL RMR TIPO DIFERENCIAL

Para obtener las ecuaciones del cálculo muerto odométrico, en la Fig. 2 se ilustra un RMR de tipo diferencial. En este tipo de robots se tienen 2 ruedas convencionales paralelas entre sí, controladas individualmente, una a cada lado de un eje fijo en la base, llamadas de tracción. Además, se añaden ruedas de tipo castor o de bolas en la parte frontal y/o trasera para dar estabilidad. Referente a la Fig. 2 se considera el punto P sobre el RMR en el plano cartesiano bidimensional XY , cuyas coordenadas (x, y) proporcionan la posición del móvil. Asimismo, en esa figura se puede observar que este punto corresponde al punto medio de la línea que representa al eje de las ruedas de tracción del RMR y cuya longitud es $2l$. Mientras que la orientación del RMR se determina por el ángulo φ , el cual se genera entre el eje X y una línea perpendicular al eje de las ruedas que pasa por el centro de simetría del robot. Además, en la figura se advierten otras variables del RMR, como son ω_d y ω_i que representan las velocidades angulares de las llantas izquierda y derecha respectivamente, r que es su radio, v que representa la velocidad lineal a la que se desplaza el móvil y ω que describe la velocidad angular del mismo, y un punto llamado el Centro de Rotación Instantáneo del robot (*CRI*). El punto CRI se define como la intersección de líneas imaginarias trazadas desde los ejes de las ruedas, en la práctica representa el punto de pivote para el caso en el cual el robot da vueltas, mientras que cuando el RMR avanza en línea recta el CRI está localizado en el infinito.

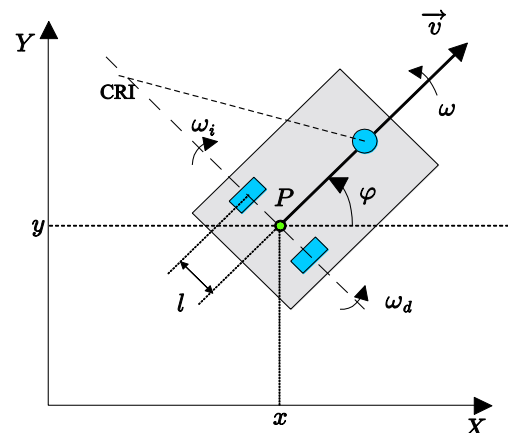


FIGURA 2. En esta figura se observan las variables de velocidades, posición y parámetros asociados al RMR de tipo diferencial.

Una vez que se han descrito todas las variables cinemáticas asociados a un RMR de tipo diferencial, en la siguiente sección se desarrollan de las ecuaciones odométricas para el cálculo de su posición y orientación. Y partir de estas, finalmente se obtiene el modelo cinemático del mismo.

IV. DESARROLLO DE LAS ECUACIONES PARA EL CÁLCULO ODOMÉTRICO DIFERENCIAL

El desarrollo de las ecuaciones, se basa en la Fig. 3 que se retomó y corrigió de [16], en esta figura se puede apreciar a detalle la geometría de un desplazamiento del eje de las ruedas del robot de un punto inicial (x_0, y_0) con un ángulo φ_0 , a un punto final (x, y) con ángulo φ , donde Q , será el pivote de giro o CRI y θ representará el cambio en la orientación del ángulo de pose del RMR, siendo el problema general encontrar estas últimas coordenadas dados el punto inicial, la medida del eje de las ruedas de tracción y el desplazamiento lineal de cada rueda.

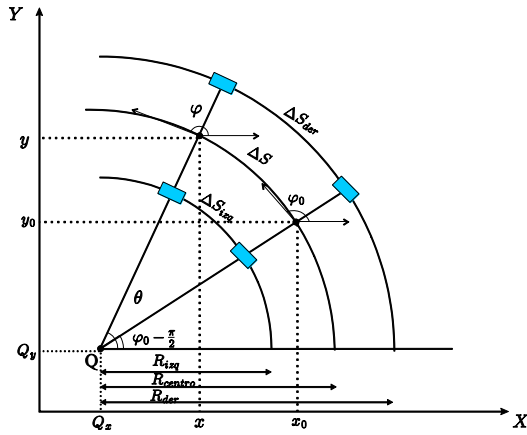


FIGURA 3. Se observa un desplazamiento de las ruedas de tracción del RMR, de un punto y ángulo iniciales $(x_0, y_0), \varphi_0$ a un punto (x, y) y ángulo de pose φ , que se desean encontrar.

Si se asume que en un período de tiempo corto Δt la rueda derecha y la rueda izquierda se han movido una distancia denominada como ΔS_{der} y ΔS_{izq} para cada rueda respectivamente, la trayectoria de este movimiento se puede considerar como la de un arco. El punto en el centro del eje de las ruedas P también describe un arco por lo que el incremento en la distancia ΔS de este punto quedaría definido como:

$$\Delta S = \frac{\Delta S_{der} + \Delta S_{izq}}{2} \quad (1)$$

Recordando que $2l$ representa la magnitud del eje que une la rueda derecha y la rueda izquierda, se tiene que:

$$R_{izq} + 2l = R_{der}, \quad (2)$$

y la longitud de los arcos descritos por la traslación de cada rueda vienen dados por:

$$\Delta S_{izq} = \theta R_{izq}, \quad (3)$$

y

$$\Delta S_{der} = \theta R_{der}, \quad (4)$$

para la obtención del ángulo θ se resta (4) de (3), para así

obtener

$$\begin{aligned} \theta R_{der} - \theta R_{izq} &= \Delta S_{der} - \Delta S_{izq}, \\ \theta (R_{der} - R_{izq}) &= \Delta S_{der} - \Delta S_{izq}, \end{aligned} \quad (5)$$

pero $2l = \Delta S_{der} - \Delta S_{izq}$, y así solucionando para θ

$$\theta = \frac{\Delta S_{der} - \Delta S_{izq}}{2l} \quad (6)$$

Para la obtención de los puntos x y y , se calculan primero las coordenadas (Q_x, Q_y) de Q , observando que el ángulo que forman la base de las ruedas del robot y el eje X , al comienzo del desplazamiento, es $\varphi_0 - \frac{\pi}{2}$, con este dato es posible encontrar dichas coordenadas como:

$$\begin{aligned} Q_x &= x_0 - R_{centro} \cos\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right), \\ &= x_0 - R_{centro} \sin(\varphi_0), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} Q_y &= y_0 - R_{centro} \sin\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right), \\ &= y_0 + R_{centro} \cos(\varphi_0), \end{aligned} \quad (8)$$

entonces es posible calcular x y y a partir del punto de pivote hallado (Q_x, Q_y) , antes de hacerlo, se redefinen las Ecs. (7) y (8) en términos del nuevo ángulo φ , para así obtener las ecuaciones deseadas de posición en términos del punto y la pose finales, de la Fig. 3, se obtiene:

$$Q_x = x_0 - R_{centro} \sin(\varphi - \theta), \quad (9)$$

$$Q_y = y_0 - R_{centro} \cos(\varphi - \theta). \quad (10)$$

Y así:

$$\begin{aligned} x &= Q_x + R_{centro} \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right), \\ &= [x_0 - R_{centro} \sin(\varphi - \theta)] + R_{centro} \sin(\varphi), \\ &= x_0 - R_{centro} (\sin \varphi \cos \theta - \cos \varphi \sin \theta) + \\ &\quad + R_{centro} \sin \varphi, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} y &= Q_y + R_{centro} \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= [y_0 - R_{centro} \cos(\varphi - \theta)] - R_{centro} \cos(\varphi) \\ &= y_0 - R_{centro} (\cos \varphi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta) + \\ &\quad + R_{centro} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (12)$$

En las ecuaciones anteriores si θ es pequeño como lo es en el caso de pequeños desplazamientos, se pueden aproximar, $\sin \theta = \theta$ y $\cos \theta = 1$, así:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + R_{centro} (-\sin \varphi + \theta \cos \varphi + \sin \varphi), \\ &= x_0 + R_{centro} \theta \cos \varphi, \\ &= x_0 + \Delta S \cos \varphi, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} y &= y_0 + R_{centro} (\cos \varphi + \theta \sin \varphi - \cos \varphi), \\ &= y_0 + R_{centro} \theta \sin \varphi, \\ &= y_0 + \Delta S \sin \varphi. \end{aligned} \quad (14)$$

Finalmente las ecuaciones para la obtención del punto $(x; y)$ y el ángulo φ quedan:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + \theta, \\ x &= x_0 + \Delta S \cos(\varphi), \\ y &= y_0 + \Delta S \sin(\varphi), \end{aligned} \quad (15)$$

donde:

$$\theta = \frac{\Delta S_{der} - \Delta S_{izq}}{2l} \text{ y } \Delta S = \frac{\Delta S_{der} + \Delta S_{izq}}{2}.$$

V. OBTENCIÓN DEL MODELO CINEMÁTICO DEL RMR A PARTIR DE LAS ECUACIONES DEL CÁLCULO ODOMÉTRICO

Suponiendo que el movimiento se lleva a cabo sobre el plano XY y que las llantas ruedan sin deslizarse, se encuentra que las ecuaciones que describen la cinemática del móvil están dadas por [17].

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{(\omega_d + \omega_i)r}{2} \cos \varphi, \\ \dot{y} &= \frac{(\omega_d + \omega_i)r}{2} \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= \frac{(\omega_d - \omega_i)r}{2l}, \end{aligned} \quad (16)$$

donde, recordando la Fig. 2, (x, y) denota la posición del punto medio del eje que une las dos llantas traseras, φ es el ángulo que forma el eje de simetría del móvil respecto al eje X positivo, ω_i y ω_d son las velocidades angulares de las llantas izquierda y derecha respectivamente, mientras que r es el radio de las llantas y $2l$ es la separación entre ellas, en estas ecuaciones y en lo que resta del trabajo, la derivada con respecto al tiempo, t , se denota por un punto.

Es posible percatarse que las Ecs. (16) presentan una gran similitud con las Ecs. (15) del cálculo odométrico. En esta sección se deriva el modelo cinemático (16) a partir de las Ecs. (15). Para esto es posible observar que se puede escribir cada una de las Ecs. (15), de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \frac{\Delta S_{der} + \Delta S_{izq}}{2} \cos(\varphi), \\ y - y_0 &= \frac{\Delta S_{der} + \Delta S_{izq}}{2} \sin(\varphi), \\ \varphi - \varphi_0 &= \frac{\Delta S_{der} - \Delta S_{izq}}{2}, \end{aligned} \quad (17)$$

donde, $x - x_0$ y $y - y_0$, representan los desplazamientos Δx y Δy , a lo largo de los ejes X y Y , y $\varphi - \varphi_0$, representa la variación del ángulo de orientación, $\Delta\varphi$, se pueden expresar estas ecuaciones en función del tiempo, reescribiendo estos desplazamientos en el incremento de tiempo Δt en el que fueron realizados como:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x}{\Delta t} &= \frac{\frac{\Delta S_{der}}{\Delta t} + \frac{\Delta S_{izq}}{\Delta t}}{2} \cos(\varphi), \\ \frac{\Delta y}{\Delta t} &= \frac{\frac{\Delta S_{der}}{\Delta t} + \frac{\Delta S_{izq}}{\Delta t}}{2} \sin(\varphi), \\ \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} &= \frac{\frac{\Delta S_{der}}{\Delta t} - \frac{\Delta S_{izq}}{\Delta t}}{2l}, \end{aligned} \quad (18)$$

y al hacer estos incrementos lo más pequeños posibles, las Ecs. (18) mediante el cambio de notación, se transforman en,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\frac{dS_{der}}{dt} + \frac{dS_{izq}}{dt}}{2} \cos(\varphi), \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\frac{dS_{der}}{dt} + \frac{dS_{izq}}{dt}}{2} \sin(\varphi), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\frac{dS_{der}}{dt} - \frac{dS_{izq}}{dt}}{2l}. \end{aligned} \quad (19)$$

De esta manera en las Ecs. (19), el cambio de posición ha quedado expresado en términos de las componentes de la velocidad a lo largo de cada eje y la velocidad angular, las cuales simplemente se pueden reescribir como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\dot{S}_{der} + \dot{S}_{izq}}{2} \cos(\varphi), \\ \dot{y} &= \frac{\dot{S}_{der} + \dot{S}_{izq}}{2} \sin(\varphi), \\ \dot{\varphi} &= \frac{\dot{S}_{der} - \dot{S}_{izq}}{2l}, \end{aligned} \quad (20)$$

donde \dot{S}_{der} y \dot{S}_{izq} , son las velocidades lineales de la rueda derecha e izquierda respectivamente, que pueden a su vez escribirse como $\dot{S}_{der} = v_{der} = r_{der}\omega_d$ y $\dot{S}_{izq} = v_{izq} = r_{izq}\omega_i$. Haciendo el radio de las ruedas derecha e izquierda r_{der} y r_{izq} igual r , se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente, el cual representa el modelo cinemático del RMR tipo diferencial (16).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{(\omega_d + \omega_i)r}{2} \cos \varphi, \\ \dot{y} &= \frac{(\omega_d + \omega_i)r}{2} \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= \frac{(\omega_d - \omega_i)r}{2l}. \end{aligned} \quad (21)$$

Con este modelo cinemático, entonces es posible hallar la localización del RMR a partir de la posición (x, y) y el ángulo de orientación φ con condiciones iniciales (x_0, y_0, φ_0) , tras realizar la integración correspondiente, es decir,

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \int_0^t \frac{r[\omega_d(\tau) + \omega_i(\tau)]}{2} \cos \varphi d\tau, \\ y(t) &= y(0) + \int_0^t \frac{r[\omega_d(\tau) + \omega_i(\tau)]}{2} \sin \varphi d\tau, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \varphi(0) + \int_0^t \omega(\tau) d\tau \\ &= \varphi(0) + \int_0^t \frac{r[\omega_d(\tau) - \omega_i(\tau)]}{2l} d\tau.\end{aligned}$$

Así, con las Ecs. (22) se puede encontrar la localización del móvil en cualquier instante de tiempo (a partir de un tiempo inicial $t = 0$).

VI. CONCLUSIONES

En este trabajo primero se hallaron las ecuaciones odométricas asociadas a un RMR de tipo diferencial, el cual permite conocer la localización del mismo. Posteriormente, a partir del enfoque odométrico se mostró que se puede obtener el mismo modelo cinemático sin necesidad de emplear el enfoque de modelado de sistemas dinámicos basado en el formalismo de Euler-Lagrange.

De igual manera, se consideró de importancia el mostrar como los conceptos básicos de Física, en cuanto a cinemática de una partícula, se usan en tecnologías tan “complejas” como lo son las relacionadas con la robótica móvil.

AGRADECIMIENTOS

J. A. Tello-Cristiany agradece el apoyo económico a la SIP-IPN mediante el otorgamiento de la Beca PIFI e Institucional. R. Silva-Ortigoza agradece el soporte económico recibido del SNI-México, a la SIP-IPN, así como a los programas EDI y COFAA del IPN. M. Marciano-Melchor agradece el apoyo recibido por la SIP-IPN y del programa EDI, así como del SNI-México. Finalmente, los autores agradecen los comentarios de los revisores, pues han sido de gran utilidad en la redacción de esta versión mejorada.

REFERENCIAS

[1] Ramos-Silvestre, E. R., Morales-Guerrero, R. y Silva-Ortigoza, R., *Modelado, simulación y construcción de un robot móvil de ruedas tipo diferencial*, Latin American Journal of Physics Education **4**, 812-821 (2010).
 [2] Byrne, R. H., Klarer, P. R. and Pletta, J. B., *Techniques for autonomous navigation*, Sandia Report **SAND92-0457**, Sandia National Laboratories, Albuquerque, NM (1992).
 [3] Borenstein, J. and Feng, L., *Correction of systematic odometry errors in mobile robots*, Proc. IEEE Int. Conf. Intelligent Robots and Systems **3**, 569-574 (1995).

[4] Borenstein, J. and Feng, L., *UMBmark-A method for measuring, comparing, and correcting dead-reckoning errors in mobile robots*, Technical Report **UM-MEAM-94-22**, University of Michigan (1994).
 [5] Martinelli, A. and Siegwart, R., *Estimating the odometry error of a mobile robot during navigation*, In European Conference on Mobile Robots (2003).
 [6] Doh, N. L., Choset, H. and Chung, W. K., *Relative localization using path odometry information*, Autonomous Robots **21**, 143-154 (2006).
 [7] Papadopoulos, E. and Misailidis, M., *On differential drive robot odometry with application to path planning*, Proc. European Control Conf., 5492-5499 (2007).
 [8] Censi, A., Marchioni, L. and Oriolo, G., *Simultaneous maximum-likelihood calibration of odometry and sensor parameters*, IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, 2098-2103 (2008).
 [9] Korodi, A. and Dragomir, T. L., *Correcting odometry errors for mobile robots using image processing*, Lecture Notes in Engineering and Computer Science **2181**, 1040-1045 (2010).
 [10] Borenstein, J., *Internal correction of dead-reckoning errors with the smart encoder trailer*, Proc. IEEE/RSJ/GI Int. Conf. Intelligent Robots and Systems **1**, 127-134 (1994).
 [11] Chong, K. S. and Kleeman, L., *Accurate odometry and error modelling for a mobile robot*, Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation **4**, 2783-2788 (1997).
 [12] Valavanis, K. P., Vachtsevanos, G. J. and Antsaklis, P. J., *Technology and autonomous mechanisms in the mediterranean: From ancient Greece to Byzantium*, Proc. European Control Conf., 263-270 (2007).
 [13] Russo, F., Rossi, C. and Ceccarelli, M., *Devices for distance and time measurement at the time of roman empire*, International Symposium on History of Machines and Mechanisms, Proc. of HMM, (Springer, Taiwan, 2008).
 [14] Vitruvius, *The ten books on architecture*, Book X, Chapter IX, <<http://www.gutenberg.org/files/20239/20239-h/29239-h.htm>>, consultado el 25 de octubre de 2010.
 [15] Beckmann, J., *A history of inventions, discoveries and origins*, (George Bell & Sons, London, 1880). <<http://www.archive.org/stream/historyofinveni00beckiala#page/n17/mode/2up>>, consultado el 23 de marzo de 2011.
 [16] Olson, E., *A primer on odometry and motor control*, <<http://stuff.mit.edu/afs/athena/course/6/6.186/2006/doc/odomtutoria/odomtutoria.pdf>>, consultado el 23 de marzo de 2011.
 [17] Silva-Ortigoza, R., Silva-Ortigoza, G., Hernández-Guzmán, V. M., Barrientos-Sotelo, V. R., Albarrán-Jiménez, J. M., y Silva-García, V. M., *Trajectory Tracking in a Mobile Robot without Using Velocity Measurements for Control of Wheels*. IEEE Latin America Transactions **6**, 598-607 (2008).