# Ecuaciones dinámicas no estándar a partir de lagrangianos convexos en la posición

**J. D. Bulnes**
*Observatório Nacional, Rua Gal. José Cristino, 77, São Cristóvão, CEP.20921-400, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.*

**E-mail:** bulnes@on.br

(Recibido el 4 de Enero de 2010; aceptado el 23 de Enero de 2010)

**Resumen**
En este artículo, aprovechando la posibilidad de definir lagrangianos convexos en la variable de posición, establecemos una nueva función dinámica y nuevas ecuaciones dinámicas en el caso unidimensional. Para verificar la consistencia física de esta construcción matemática consideramos los casos de una partícula libre y un oscilador armónico simple.

**Palabras clave:** Lagrangiano, Función dinámica, Ecuación dinámica.

**Abstract**
In this article, taking advantage of the possibility of defining convex lagrangians in the position variable, we establish a new dynamic function and new dynamic equations in the one-dimensional case. To verify the physical consistency of this mathematical construction, we studied the cases of the free particle and the simple harmonic oscillator.

**Keywords:** Lagrangian, Dynamic function, Dynamic equation.

**PACS:** 01.50.-i, 02.30.Zz, 45.20.Jj **ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUCCIÓN

Cuando se considera un cierto sistema físico clásico interactuando con otros sistemas o con campos, también clásicos, debe identificarse un conjunto adecuado de coordenadas generalizadas y hacerse uso de alguna ecuación dinámica para poder describir el comportamiento dinámico de ese sistema: la coordenada de centro de masa cambiará de acuerdo con una cierta ley de movimiento y el centro de masa mismo recorrerá una cierta trayectoria física. En este artículo, a partir de la posibilidad matemática de que un lagrangiano convexo en la variable de posición puede ser definido y asociado a un sistema clásico unidimensional (1-D), la que queda justificada porque familias de lagrangianos equivalentes al lagrangiano usual pueden ser construídas, como fue mostrado, por ejemplo, en [1, 2, 3], obtenemos formalmente una función dinámica (no se trata del hamiltoniano) y funciones dinámicas (no se trata de las canónicas) a través de la aplicación de la transformada de Legendre con relación a dicha variable, lo que contituye una variante con relación al procedimiento usual, donde se aplica dicha transformación con relación a la variable de velocidad del lagrangiano estándar (lagrangianos convexos en la variable de posición dan sustento matemático a esta variante).

Construimos dicha función dinámica en dos casos: (*i*) una partícula libre 1-D, y (*ii*) un oscilador armónico simple, y verificamos, en ambos casos, que las (nuevas) ecuaciones dinámicas llevan a las ecuaciones de movimiento correctas. Los correspondientes cálculos y la estrucutura general de este artículo son ofrecidos en el siguiente orden: En la subsección A obtenemos una expresión general para los lagrangianos equivalentes (al estándar) de un sistema clásico 1-D; en la sección II, procediendo formalmente, construimos una función dinámica y las ecuaciones dinámicas, que denominanos "no estándar"; en las secciones III y IV consideramos los casos del oscilador armónico simple y de la partícula libre, respectivamente, y verificamos la consistencia física tanto de la (nueva) función dinámica como de las (nuevas) ecuaciones dinámicas; finalmente, en la sección V, presentamos nuestras conclusiones.

### A. Lagrangianos equivalentes

Aquí seguimos las ideas principales implementadas en [1, 2] para obtener una expresión que define una familia de lagrangianos equivalentes, la que, a pesar de no ser tan general como la obtenida en esas referencias, es suficientemente amplia como para incluir lagrangianos convexos en la variable de posición.

De la ecuación de Euler-Lagrange, escrita en forma desarrollada, podemos obtener una ecuación diferencial para los lagrangianos si es que suponemos que la función $L$ es desconocida,

$$wL_{vv} + vL_{vx} + L_{vt} - L_x = 0, \tag{1}$$

donde $w$, no es una variable de $L$. El artifício clave consiste en suponer que w se obtiene de la ecuación de movimiento conocida, es decir, que $w = v'$. Así, la ecuación anterior no es la de Euler-Lagrange a pesar de que formalmente se escriba de la misma manera. Derivando (1) con respecto a la variable *v*, tenemos,

$$-L_{xv} + vL_{vvx} + L_{vx} + wL_{vvv} + L_{vvt} = 0. \tag{2}$$

Suponiendo que sea válido escribir,

$$L_{xv} = L_{vx}, \tag{3}$$

llegamos al siguiente resultado,

$$vL_{vvx} + wL_{vvv} + L_{vvt} = 0. \tag{4}$$

Si ahora hacemos $H(t,x,v) = L_{vv}(t,x,v)$ obtenemos,

$$vH_x + wH_v + H_t = 0. \tag{5}$$

Sea $a(t,x,v)$ una solución de (5), entonces escribimos,

$$L_{vv}(t,x,v) = a(t,x,v), \tag{6}$$

de donde, luego de integrar dos veces, resulta,

$$L(t,x,v) = \int^{v}\int^{\sigma} a(t,x,v)dzd\sigma + v\beta(t,x) + \alpha(t,x), \tag{7}$$

donde las funciones $\beta$ y $\alpha$ son, hasta aquí, arbitrarias. Como (7) tiene que ser solución de (4), luego de hacer las sustituciones respectivas, vemos que tenemos que imponer la condición,

$$\frac{\partial\beta}{\partial t} = \frac{\partial\alpha}{\partial x}, \tag{8}$$

de manera que ahora solamente una de estas funciones se mantiene arbitraria. Finalmente podemos escribir,

$$L(t,x,v) = \int^{v}\int^{\sigma} a(t,x,z)dzd\sigma + \int^{x}\beta_t(t,z)dz + v\beta(t,x) + \phi(t), \tag{9}$$

donde $\beta$ es una función derivable arbitraria y $\phi$ es una función arbitraria. La función $L$ en (9) aún no es una solución de (4), pues la función $a(t,x,v)$ no está definida; para definirla debemos resolver (5) considerando un sistema físico concreto.

## II. FUNCIÓN Y ECUACIONES DINÁMICAS

Consideremos un sistema físico unidimensional y un lagrangiano $L$ asociado al mismo, no necesariamente el estándar. Supongamos que ese lagrangiano, de variables independientes $t, v, x$, sea convexo en la variable de posición $x$; en ese caso, la transformada de Legendre $T$ de la función $L$ con respecto a la variable $x$ está bien definida, [4]. Aplicando tal transformación se pasa de la función $L$ a la función $T\{L\} = B$, y de las variables: $t,v,x$ a las variables: $t,v,s$.

$$L_1(t,v,x) \quad \Rightarrow \quad B(t,v,s). \tag{10}$$

donde $B(t,v,s)$ queda definida a partir del valor de la función auxiliar $V$, el que a su vez está definido por la siguiente expresión,

$$V(t,v,s,x) = sx - L(t,v,x), \tag{11}$$

donde,

$$s = \partial L / \partial x. \tag{12}$$

variable a la cual vamos a denominar, por analogía con la situación usual, la conjugada de la variable $x$. A partir de la expresión (12) se debe despejar (suponiendo que sea posible) la variable $x$, de manera que podamos escribir,

$$x = X(t,v,s), \tag{13}$$

Donde $t,v,s$ son variables independientes. Con esto, la transformada de Legendre del lagrangiano *L* resulta ser,

$$B(t,v,s) = V(t,v,s,X(t,v,s)). \tag{14}$$

es decir,

$$B(t,v,s) = sX(t,v,s) - L_1(t,v,X(t,v,s)). \tag{15}$$

La función $B$ sería, formalmente, una función dinámica; verificaremos esto en las siguientes secciones al considerar dos sistemas físicos 1-D simples.

A continuación, y siguiendo el procedimiento usualmente presentado en los libros de mecánica teórica para la construcción de las ecuaciones canonicas, como en Arnold [4], encontramos,

$$X = \frac{\partial B}{\partial s}, \qquad \frac{\partial B}{\partial v} = -\frac{\partial L_1}{\partial v}, \qquad \frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial L_1}{\partial t}. \tag{16}$$

Como $B$ es una función dependiente de las variables $t,v,s$, vamos a reescribir las ecuaciones anteriores en términos de dichas variables. Por ejemplo, para la ecuación del centro, tenemos,

$$s=\frac{\partial L}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad s=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v} \quad \Rightarrow \quad s=-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial B}{\partial v}\right), \qquad (17)$$

donde, en el primer paso, hemos hecho uso de la ecuación de Euler-Lagrange. Reescribimos también la ecuación de la izquierda en (16) usando $v=dx/dt$. De esta manera llegamos al siguiente conjunto de ecuaciones,

$$v=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial B}{\partial s}\right), \quad s=-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial B}{\partial v}\right), \quad \frac{\partial B}{\partial t}=-\frac{\partial L_1}{\partial t}, \qquad (18)$$

las que, formalmente, serían ecuaciones dinámicas (no estándar). Los resultados (15) y (18) constituyen el resultado principal de este trabajo.

## III. EL CASO DEL OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE

Las ecuaciones definidas en (18) pueden ser aplicadas directamente al caso de un oscilador armónico simple (O.A.S.), de masa $m$ y frecuencia $w$, pues su lagrangiano estándar es una función convexa de $x$,

$$L_2(t,v,x)=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mw^2x^2, \qquad (19)$$

usando (12) conseguimos,

$$s=-mw^2x \quad \Rightarrow \quad x=X(t,v,s)=-\frac{s}{mw^2}, \qquad (20)$$

al sustituir (19) y (20) en (15) queda definida una función,

$$B(t,v,s)=-\frac{s^2}{2mw^2}-\frac{1}{2}mv^2, \qquad (21)$$

A continuación vamos a verificar que la función $B$ “tiene dinámica”, con ello queremos decir que ella nos conducirá a la ecuación de movimiento correcta; para ello usamos (21) y las ecuaciones (18). Entonces,

$$v=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial B}{\partial s}\right) \quad \Rightarrow \quad v+\frac{s'}{mw^2}=0, \qquad (22)$$

y también,

$$s=-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial B}{\partial v}\right) \quad \Rightarrow \quad s=mv', \qquad (23)$$

combinando (22) y (23) resulta,

$$s''=-mw^2v'=-w^2s \quad \Rightarrow \quad x''+w^2x=0, \qquad (24)$$

donde hemos usado la expresión del lado izquierdo en (20), con lo cual se ha verificado que (21) es una función dinámica para el oscilador armónico simple (de frecuencia $w$) y que (18) es un conjunto de ecuaciones dinámicas .

## IV. EL CASO DE LA PARTICULA LIBRE CON LAGRANGIANO CONVEXO EN X

El lagrangiano (estándar) de la partícula libre no es convexo en $x$, por ello usaremos la expresión general (9) para definir un (nuevo) lagrangiano que sí posea esta característica.

La ecuación de movimiento para la partícula libre es $mv'=0$, y recordando el artificio mencionado en la subsección A, tenemos que la ecuación (5) queda reducida a la siguiente,

$$vH_x+H_t=0, \qquad (25)$$

que es una ecuación diferencial parcial de primer orden. En este caso, la correspondiente ecuación de las características, [5], se escribe de la siguiente manera,

$$\frac{dx}{v}=dt, \quad e \quad dv=0, \qquad (26)$$

de donde obtemos: $v = c_1$ y $x = c_1t + c_2$. En (26) no tenemos otra relación independiente que podamos extraer entre las variables. Luego, la solución general de (25) tiene la siguiente forma,

$$a(t,x,v)=G(v,x-vt), \qquad (27)$$

siendo $G$ una función arbitraria. Con ello el lagrangiano más general, usando (9), y en el caso de una particula libre 1-D, tiene la siguiente forma,

$$L(t,x,v)=\int^{x}\beta_t(t,z)dz+\int^{v}\int^{\sigma}G(\eta,x-\eta t)d\eta d\sigma+\phi(t)+v\beta(t,x) \qquad (28)$$

la función anterior está bien definida. Para alcanzar nuestro propósito será conveniente definir las siguientes funciones,

$$\beta(t,z)=zt, \quad G(\eta,x-\eta t)=m, \quad \phi(t)=0, \qquad (29)$$

siendo $m$ una constante. Después de hacer las debidas sustituciones e integraciones obtenemos la función,

$$L_1(t,v,x)=\frac{1}{2}mv^2+xvt+\frac{1}{2}x^2, \qquad (30)$$

pero antes de continuar conviene hacer algunas verificaciones sobre la consistencia física de esta función. Si la función (30) corresponde a un lagrangiano de la partícula libre, entonces al emplearla en la ecuación de Euler-Lagrange nos debe llevar a la ecuación de movimiento correcta. Veamos,

$$L_{1,x} = x + vt, \qquad L_{1,v} = xt + mv, \tag{31}$$

y usando la ecuación de Euler-Lagrange,

$$-L_{1,x} + \frac{d}{dt}L_{1,v} = 0 \quad \Rightarrow \quad mx'' = 0\,, \tag{32}$$

lo cual está correcto. Para mayor claridad, también es conveniente verificar tal validez a través del cálculo del correspondiente hamiltoniano y del uso de las ecuaciones canónicas. Veamos,

$$H(t,v,p) = pW(t,v,p) - L_1(t,v,W(t,v,p)). \tag{33}$$

donde,

$$p = \frac{\partial L}{\partial v} \quad \Rightarrow \quad v = W(t,v,p) = \frac{1}{m}(p - xt), \tag{34}$$

notar que en este contexto, donde los lagrangianos son más generales, ya no es más válida la expresión $p = mv.$ Con esto el hamiltoniano queda definido por la expresión,

$$H(t,v,p) = \frac{1}{2m}\left(p^2 + (t^2 - m)x^2 - 2txp\right), \tag{35}$$

Ahora usaremos las ecuaciones canónicas,

$$x' = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \Rightarrow \quad mx' = p - xt, \tag{36}$$

y

$$-p' = \frac{\partial H}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad -mp' = (xt - p)t - mx, \tag{37}$$

después de despejar $p$ en (36) y de sustituirlo en (37) obtenemos $x'' = 0$, lo que está correcto; ahora estamos seguros de que la función (30) es un (nuevo) lagrangiano de la partícula libre 1-D.

A continuación determinamos la función $B$ a partir del lagrangiano (30). Usando tal lagrangiano determinamos la conjugada de $x$ a través de (12) y, de ésta, conseguimos,

$$x = X(t,v,s) = s - vt, \tag{38}$$

de manera que, usando (15), obtenemos,

$$B(t,v,s) = \frac{1}{2}(s - vt)^2 - \frac{1}{2}mv^2\,, \tag{39}$$

Ahora vamos a resolver las ecuaciones (18), usando la función (39), para determinar si ellas nos conducen a la ecuación de movimiento correcta. Veamos,

$$v = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial B}{\partial s}\right) \quad \Rightarrow \quad s' - v't - 2v = 0, \tag{40}$$

y también,

$$s = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial B}{\partial v}\right) \quad \Rightarrow \quad s't + mv' - v't^2 - 2vt = 0, \tag{41}$$

de donde de manera directa se encuentra $mv' = 0$, o equivalentemente $mx'' = 0$, lo que está correcto, lo que demuestra que la función (39) y las ecuaciones (18) son, como se esperaba, dinámicas.

## V. CONCLUSIONES

En este artículo hemos seguido el procedimiento formal de construcción del hamiltoniano a través del lagrangiano y de la transformación de Legendre y al hacerlo hemos considerado una variante: la transformada de Legendre fue aplicada con relación a la variable de posición (del lagrangiano). Como los lagrangianos usuales, en general, no son convexos en dicha variable construimos una expresión -de cierta generalidad- que genera un conjunto de lagrangianos no trivialmente equivalentes al estándar, el que suponemos pueda incluir al menos uno que asegure que la transformación mencionada esté bien definida, para así dar sustento matemático a dicha variante física; el lagrangiano (30) es uno de ese tipo. La función dinámica (15) y las ecuaciones dinámicas (18), que hemos denominado "no estándar", corresponden al caso unidimensional. Obtenemos (y verificamos la validez física de) las mismas en dos casos concretos: una partícula libre y un oscilador armónico simple. La aplicabilidad de las ecuaciones dinámicas (18), en el caso de un sistema físico particular, dependerá de la real posibilidad de definir un lagrangiano equivalente al estándar que sea convexo en la variable de posición.

## AGRADECIMIENTOS

El autor agradece al Prof. Holger Valqui (UNI, Lima) por los comentarios realizados y al Conselho Nacional de Desenvolvimento Cientifico e Tecnológico, CNPq, Brasil, por el apoyo financiero.

## REFERENCIAS

[1] Hojman S. and Shepley L., *Lagrangianos Equivalentes*, Rev. Mex. Fís. **28**, 149 (1982).

[2] Yan, C., *Construction of Lagrangians and Hamiltonians from the equation of motion*, Am. J. Phys. **46**, 671 (1978).

[3] Currie, D. and Saletan, E., *q-Equivalent Particle Hamiltonians.I. The Classical One-Simensional Case,* J. Math. Phys **7**, 967 (1966).

[4] Arnold, V., *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (Springer, 2nd Edition, New York, 1989).

[5] Sneddon, I., *Elements of Partial Differential Equations* (McGraw-Hill, 1st. Edition, Koga, 1957).