

Convergencia de las soluciones (modelos básicos de la electrostática) de la fuerza entre conductores esféricos a potencial constante



Adrián Corona Cruz

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Apartado Postal 1152, C. P. 72001 Puebla, México.

E-mail: acorona@fcfm.buap.mx

(Recibido el 27 de Abril de 2009; aceptado el 16 de Mayo de 2009)

Resumen

A preguntas sobre el experimento de Coulomb; ¿cómo Coulomb se aseguró que durante las mediciones las cargas en las esferas se mantenían constantes?; ¿cómo él pudo variar y cuantificar con precisión la cantidad de carga en las esferas?; ¿cómo se tomó en cuenta el efecto inductivo que afecta la distribución de la carga en los conductores?; efectos que producen desviaciones respecto al modelo de distribuciones esféricamente simétricas de carga de la ley de Coulomb, se han resuelto gracias a la actual tecnología (fuentes poder de alto-voltaje, balanzas de alta sensibilidad), y el uso de herramientas matemáticas. En éste trabajo mostramos la convergencia de la fuerza entre conductores, de los principales modelos teóricos reportados, a la ecuación colombiana; Teorema de unicidad y principio de superposición (Purcell); Energía electrostática (Landau); Método de imágenes (Jakson); Método de imágenes de Maxwell; Evaluación de fuerzas eléctricas entre esferas conductoras por medio de funciones armónicas bisféricas (Corona-Ley).

Palabras clave: Coulomb, fuerza electrostática, potencial, Maxwell.

Abstract

About some questions of Coulomb experiments; how did Coulomb ensure that during the measurements the charges in the spheres were held constant? How could he vary and accurately quantify the amount of charge in the sphere? How was the inductive effect affecting the charge distribution in the conductors considered?, effects producing deviations on the charge spherically symmetric distribution model of Coulomb law, have been resolved thanks to the current technology (High voltage power sources, high sensitivity scales), and the use of mathematical tools. In this paper we show the force convergence between conductors, on the main reported theoretical models, to the Coulombian equation; Uniqueness theorem and energy superposition principle (Purcell); Electrostatic energy (Landau); Method of image charges (Jackson); Maxwell method of images; Electrical power between conducting spheres evaluation by means of bispherical harmonic functions (Crown-Law).

Key words: Coulomb, electrostatic force, potential, Maxwell.

PACS: 01.40.-d, 01.55+b

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

La famosa ecuación fundamental de la electrostática, publicada en 1785 por el francés Charles Augustin Coulomb fue la primera ley cuantitativa en la historia del electromagnetismo que jugó un papel fundamental en las grandes contribuciones al desarrollo de la electricidad y magnetismo. Coulomb realizó lo que se considera el “experimento crucial para comprender los fenómenos electrostáticos”; construyó una la balanza (de torsión) con la que midió la repulsión y atracción entre dos esferas eléctricamente cargadas, demostrando que la fuerza varía en proporción inversa al cuadrado de la distancia entre los centros de dos esferas. Resultado, que no obstante lo básico

Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol. 3, No. 2, May 2009

de los datos (informó sólo de tres mediciones para sustentar sus resultados), en lo general fue aceptado. Durante los últimos siglos continuamente se ha probado directa o indirectamente la validez de la Ley (esquema clásico inventado por Henry Cavendish [1, 2]). En 1769 Robinson, usando por primera vez una balanza tipo Cavendish, determino el exponente de la distancia como 2.06, sin embargo atribuyo tal resultado a errores experimentales, fue hasta el siglo 20, que se interpretó considerando la masa del fotón. Tales resultados han confirmado que la *ley de Coulomb* forma parte de las leyes fundamentales de la física.

El historiador de ciencias Heering (1992) [3] con el fin de repetir el experimento, reconstruyo detalladamente la balanza de Coulomb. Encontró que, debido a la poca precisión del instrumento y por más cuidado que se pusiera,

fue imposible obtener los resultados que Coulomb reportó. Esto ha hecho que diversos investigadores hagan suposiciones que van desde técnicas e ideas teóricas no reportadas por Coulomb, el uso del formalismo de la ley de la gravitación de Newton, hasta la idea del cuchareo. De lo que no hay duda es que Coulomb, sabía lo que buscaba, y que con sólo unos cuantos datos, logró lo que en la actualidad se está perdiendo, “la habilidad para, tener una intuición profunda acerca de la naturaleza”, Trumpler [4].

Con propósitos como el hacer objetivos los cursos básicos de electromagnetismo, se han implementado un conjunto de sistemas mecánicos para obtener la función de la fuerza con la distancia; la balanza de popote del profesor Rogers, (PSSC) [5], balanzas de torsión [6] y sistemas formados por un par de esferas cargadas suspendidas [7]; con la intención de identificar las ideas o consideraciones hechas por Coulomb, se ha reproducido la balanza de torsión (Carl von Ossietzky), [3, 8]; y métodos basados en las dos esferas metálicas (Cavendish) concéntricas para validar la misma ley [1, 2]. Ahora, manteniendo las esferas a potenciales constantes por medio de una balanza de torsión o electrónica se mide la fuerza [9, 10].

A preguntas; ¿cómo Coulomb se aseguró que durante las mediciones las cargas en las esferas se mantenían constantes?; ¿cómo él pudo variar y cuantificar con precisión la cantidad de carga en las esferas?; ¿cómo se tomó en cuenta el efecto inductivo que afecta la distribución de la carga en los conductores?; variaciones que producen desviaciones respecto al modelo de cargas monopolares de la ley de Coulomb [9]. Actualmente se han resuelto gracias a la tecnología (fuentes poder de alto-voltaje, balanzas de alta sensibilidad), y el uso de la solución numérica (matemáticas) [3, 7, 8, 11, 12].

II. CONVERGENCIA DE LA FUERZA ELECTROSTÁTICA ENTRE CONDUCTORES MANTENIDOS A UNA DIFERENCIA DE POTENCIAL

La fuerza electrostática entre objetos cargados se ha tratado formalmente, desde “*Treatise on Electricity and Magnetism*” de Maxwell (1873) [13] a la fecha, “*Evaluation and Measurement of forces between two conducting spheres*” de Corona-Ley (2002) [9]. En éste trabajo mostramos la convergencia de la fuerza entre dos conductores, de los principales modelos teóricos reportados, a la ecuación colombiana: a) teorema de unicidad y principio de superposición (Purcell); c) energía electrostática (Landau); método de imágenes (Jakson); método de imágenes de Maxwell; d) evaluación de fuerzas eléctricas entre esferas conductoras por medio de funciones armónicas bisféricas (Corona-Ley).

A. Teorema de unicidad y principio de superposición (Purcell)

Considerando un par de conductores rodeados por una capa conductora, a potencial ϕ_0 como se ve en la figura 1, con

respecto a ésta referencia los potenciales de los dos conductores, son ϕ_1 y ϕ_2 . El teorema de unicidad garantiza que dados ϕ_1 y ϕ_2 el campo eléctrico queda determinado en todo el espacio. Se deduce que las cargas Q_1 y Q_2 en los conductores también están unívocamente determinadas. Por conservación de la carga en la superficie de la capa que rodea a los conductores, siempre es $-(Q_1 + Q_2)$ [14].

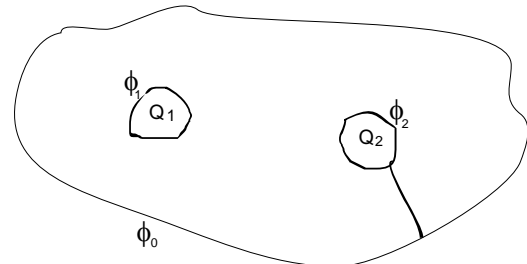


FIGURA 1. Sistema de conductores, en el que por medio de una fuente no mostrada, se realizó trabajo para colocar la carga Q_1 en uno de los cuerpos, quedando a un potencial ϕ_1 , e induce una carga Q_2 en el conductor conectado (a tierra) y potencial ϕ_2 al igual que el conductor que los contiene, la suma total de la carga en los conductores deberá ser cero.

Uno de los estados posibles del sistema es que el conductor que los rodea este a potencial cero, haciendo que $\phi_2 = 0$, entonces las cargas Q_1 y Q_2 deberán ser proporcionales a ϕ_1

$$Q_1 = C_{11}\phi_1, \quad Q_2 = C_{21}\phi_1.$$

El signo de la carga Q_2 debe ser opuesta a la del potencial induciendo, y por consiguiente ($C_{21} < 0$). Si el potencial (ϕ_1) del conductor no conectado a tierra es positivo. Entonces el potencial es positivo en todo el espacio, su menor valor (cero) es el del conductor conectado a tierra. Las constantes de proporcionalidad (coeficientes de capacidad) sólo dependen de la forma y disposición de los conductores.

Para determinar la magnitud de la carga Q_2 en el conductor aterrizado situado en las vecindades del conductor a potencial ϕ_1 , con una carga Q_1 . Se considera el siguiente arreglo electrostático: un conductor cargado (Q_1) y otro conductor en sus vecindades aterrizado en el que se induce una carga Q_2 . Si el conductor cargado no existiera, y el potencial del conductor aterrizado es ϕ'_2 , el potencial en el punto donde estaría el primer conductor sería ϕ'_1 , entonces de [15]

$$\sum_i \phi_i Q'_i = \sum_i \phi'_i Q_i,$$

se tiene $Q_1 \phi_1 + Q_2 \phi_2 = 0$, de donde $Q_2 = -Q_1 \phi_1 / \phi_2$. En el caso de por ejemplo, una carga Q_1 a una distancia d del centro de una esfera aterrizada de radio R ($d \gg R$), entonces $\phi_2 = \phi_1 R/d$, y la carga inducida en la esfera es:

$$Q_2 = -Q_1 R/d. \quad (1)$$

Relación que muestra la dependencia de la magnitud de la

carga inducida, como función de la distancia y forma de los conductores. La fuerza entre los conductores se calcula en el siguiente inciso.

B. Energía del campo electrostático

La energía electrostática de un conjunto de conductores cargados en términos de sus potenciales es:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,j} C_{i,j} \phi_i \phi_j,$$

para el caso de dos conductores, uno a un potencial V ($\phi_1 = V$) y otro conectado a tierra ($\phi_2 = 0$), la energía se reduce a:

$$W = \frac{V^2}{2} C_{11},$$

donde C_{11} se le conoce como coeficiente de capacidad y depende de la forma y posición relativa de los conductores.

Para el caso de dos esferas (de radio R) de capacitancias $C_1 = C_2 = R$, colocadas a una distancia $d \gg R$, se tiene como coeficiente de capacidad C_{11} y el coeficiente de inducción electrostática C_{21} [15]:

$$C_{11} = C_1 \left(1 + \frac{C_1 C_2}{d^2} \right) = R \left(1 + \left(\frac{R}{d} \right)^2 \right),$$

$$C_{21} = -\frac{C_1 C_2}{d} = -\frac{R^2}{d}.$$

La fuerza la obtenemos de la derivada de la energía:

$$F = -\frac{dW}{d} = V^2 \left(\frac{R}{d} \right)^3,$$

ecuación que en término de las cargas, se reencuentra la expresión colombiana.

En relación de las cargas:

$$Q_i = \sum_j C_{i,j} \phi_j,$$

$$Q_1 = C_{11} \phi_1 + C_{12} \phi_2 = C_{11} V = VR \left(1 + \left(\frac{R}{d} \right)^2 \right),$$

$$Q_2 = C_{21} \phi_1 + C_{22} \phi_2 = C_{21} V = -V \left(\frac{R}{d} \right)^2,$$

expresiones que también corresponden a las obtenidas como desarrollo en series de las relaciones obtenidas en los casos anteriores.

$$Q_1 \approx VR, \quad Q_2 \approx -\frac{VR^2}{d}.$$

El no obtener una solución, en forma cerrada, del sistema formado por dos esferas conductoras, se debe a que el campo de dos cargas puntuales las superficies equipotenciales no es esférico.

Consecuentemente, la fuerza para distancias grandes, en términos de las cargas, converge a la ley coulombiana:

$$F = V^2 \left(\frac{R}{d} \right)^3 = -\frac{Q_1 Q_2}{d^2}. \quad (2)$$

C. Método de imágenes

Este método se apoya en la hipótesis de que es posible colocar un conjunto de cargas "imagen" en un lado de una superficie conductora, para producir el mismo efecto que la carga real inducida sobre la superficie por un conjunto de cargas colocadas frente a ella [16].

Para obtener la fuerza de interacción entre dos esferas conductoras, la primera con su centro en el origen, eléctricamente aterrizada, y la segunda a una distancia d a una diferencia de potenciales V . La esfera de radio R , por estar a una diferencia de potencial V , se considera contener una carga $Q_1 = VR$, con otra esfera (inicialmente descargada), se carga por inducción (suponiendo una primera carga imagen) con una carga $Q_2 = -Q_1(R/d)$ localizada a una distancia $d' = R^2/d$ del origen. Ésta carga imagen induce en la primera esfera una carga $Q_1' = -Q_2 R/(d' - d)$, localizada a una distancia $d'' = R^2/d'$. Éste proceso se repite n veces.

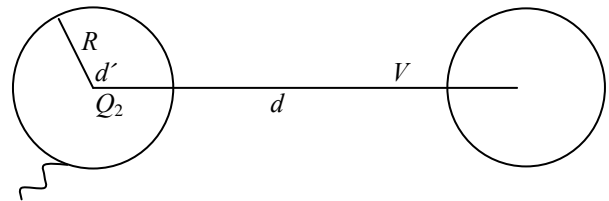


FIGURA 2. Sistema formado por dos esferas conductoras de radio R colocadas desde sus centros a una distancia d , la de la derecha a potencial V , y la izquierda conectada a tierra sin carga. Se muestra la carga imagen Q_2 que se induce en la esfera y que se considera localizada a una distancia d' del origen. Para $d < R$, será la carga total inducida.

La fuerza coulombiana (considerando las primeras imágenes) entre tales "cargas" en forma simplificada:

$$F \approx -\frac{V^2 R^3}{d^3 \left(1 - \frac{R^2}{d^2} \right)^2} - \frac{V^2 R^5}{d^5 \left(1 - \frac{R^2}{d^2} \right)^3},$$

para distancias grandes ($d \gg R$), en términos de la diferencia de potencial ecuación que se reduce a;

$$F = -V^2 \left(\left(\frac{R}{d} \right)^3 + \left(\frac{R}{d} \right)^5 - 2 \left(\frac{R}{d} \right)^6 \right),$$

ecuación que se interpreta como la suma de dos contribuciones, la primera como la fuerza debida a dos cargas monopolares colocadas a una distancia d , o ley de Coulomb;

$$F_a \approx -V^2 \left(\frac{R}{d}\right)^3 = -VR \frac{VR^2}{d} \frac{1}{d^2} = -\frac{Q_1 Q_2}{d^2},$$

y un termino conocido como el debido a una contribución cuadrupolar.

$$\vec{F}_b \approx -V^2 \left(\frac{R}{d}\right)^5 = -VR \frac{VR^2}{d} \frac{R^2}{d^4} \approx -\frac{Q_1 P}{d^4}, \quad (3)$$

donde $P = Q_2 R^2$ se conoce como el momento cuadrupolar.

Nuevamente, si la distancia es grande respecto al tamaño de las esferas obtenemos la ecuación coulombiana y la misma relación entre las cargas.

D. Método de imágenes de Maxwell

El “Método de Imágenes” consiste en suponer que un conjunto de cargas imagen en un lado de una superficie conductora produce el mismo efecto que la carga real inducida sobre la superficie por un conjunto de cargas colocadas frente a la superficie (teorema de unicidad) [17]. Los coeficientes de capacitancia e inducción de un par de esferas conductoras A y B , con radios respectivamente son R_1 y R_2 , y cuyos centros están a una separación d , la esfera B a un potencial V , y la esfera A conectada a tierra, o potencial cero, se obtienen localizando dos esferas de inversión, centradas en un punto común, y determinando la posición y magnitud de las cargas imagen en la esfera A, suponiendo que ésta inicialmente colocada en su centro.

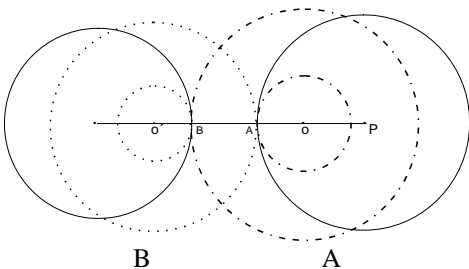


FIGURA 3. Sistema formado por dos esferas conductoras. Se muestra con líneas punteadas, las esferas de inversión. El punto P, representa la posición inicial de la carga en la esfera A.

Las expresiones para las cargas totales:

$$Q_A = Vq_{aa} = Va \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\sinh(i\pi - \alpha)},$$

$$Q_B = Vq_{ab} = -Va \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\sinh(i\pi)},$$

donde

$$a = \frac{\sqrt{(d + R_1 + R_2)(d + R_1 - R_2)(d - R_1 - R_2)(d - R_1 + R_2)}}{2d}$$

$$\sinh \alpha = -\frac{a}{R_1} \quad \sinh \beta = \frac{a}{R_2} \quad w = \beta - \alpha.$$

La fuerza de atracción entre las esferas es por lo tanto:

$$F = \frac{1}{2} V^2 \frac{dq_{aa}}{dd} = \frac{V^2}{2} \frac{d}{dd} \left(a \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\sinh(i\pi - \alpha)} \right).$$

En el caso de $d \gg R_1 = R_2 = R$, y el desarrollo en serie de R/d , se obtiene:

$$Q_A \approx V \left(R + \frac{R^3}{d^2} + 2 \frac{R^5}{d^4} + 4 \frac{R^7}{d^6} \right),$$

$$Q_B \approx -V \left(\frac{R^2}{d} + \frac{R^4}{d^3} + 2 \frac{R^6}{d^5} \right),$$

considerando los primeros términos, se reencuentran las expresiones para las cargas, ecuación 2.

$$F = V^2 \left(\left(\frac{R}{d}\right)^3 + \left(\frac{R}{d}\right)^5 + \frac{3}{4} \left(\frac{R}{d}\right)^7 \right), \quad (4)$$

el comportamiento de la ecuación en sus primeros términos es igual a los de la ecuación 1, y con su primer término coulombiano.

E. Carga puntual en presencia de una esfera conductora aterrizada mantenida a potencial V

Una carga puntual q colocada a una distancia d , de una esfera conductora de radio R , mantenida a una diferencia de potencial V , experimenta una fuerza debida a la carga inducida, Q' y a una carga $Q = VR$ sobre la superficie de la esfera, por ser conductora equivale a una carga Q colocada en el centro de la esfera [16].

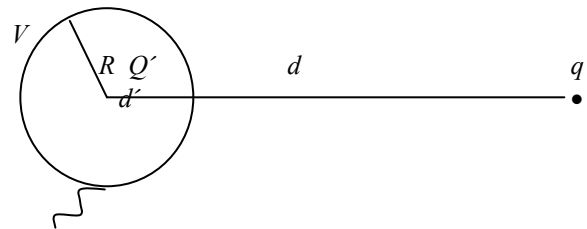


FIGURA 4. Sistema formado por una esfera conductora de radio R , a potencial V conectada a tierra y una carga puntual colocada a una distancia d . Se muestra la carga imagen Q' inducida a una distancia d' del centro de la esfera.

Relaciones para la magnitud de carga imagen y su posición:

$$Q' = -Rq/d, \quad d' = R^2/d.$$

La fuerza entre las cargas en la superficie de la esfera la inducida y la carga q es:

$$F = \frac{qVR}{d^2} + \frac{qQ'}{(d-d')^2} = \frac{qVR}{d^2} - \frac{q^2R}{d\left(d - \frac{R^2}{d}\right)^2},$$

para grandes distancias ($d \gg R$), la ecuación que se reduce a;

$$F = \frac{qVR}{d^2} - \frac{q^2R}{d^3},$$

en términos de las cargas:

$$Q \approx VR, \quad Q' \approx -\frac{qR}{d},$$

donde Q es la carga sobre la esfera conductora a potencial V , y Q' la carga inducida como función de la distancia y forma del conductor. La fuerza se puede expresar como la suma de dos fuerzas:

$$F_a \approx \frac{qVR}{d^2} = \frac{qQ}{d^2} \quad \text{y} \quad F_b \approx -\frac{q^2R}{d^3}.$$

Se observa que a medida que las esferas se alejan, F_b tiende a cero, quedando sólo el término Coulombiano.

F. Método de coordenadas bie esféricas

Con la función de Green de Dirichlet para dos esferas conductoras en funciones armónicas bie esféricas, se obtiene la solución de la ecuación de Poisson con valores de potencial dado en la superficie de los electrodos, que en éste caso, $\phi_1 = V$ y $\phi_2 = 0$ (la fuerza electrostática entre dos objetos conductores mantenidos a una diferencia de potencial v , respecto a tierra, experimentalmente se obtiene conectando el borne negativo de la fuente a tierra), con la que se obtiene la intensidad eléctrica, densidad superficial de carga y cargas totales de dos esferas conductoras a diferencia de potencial fijo. Integrando estas ecuaciones sobre la superficie de cada esfera, se obtiene la carga total en la superficie de cada esfera [9];

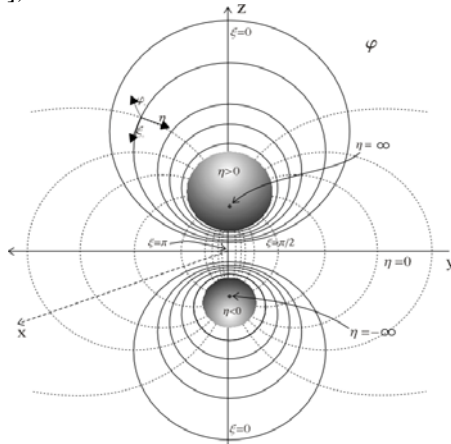
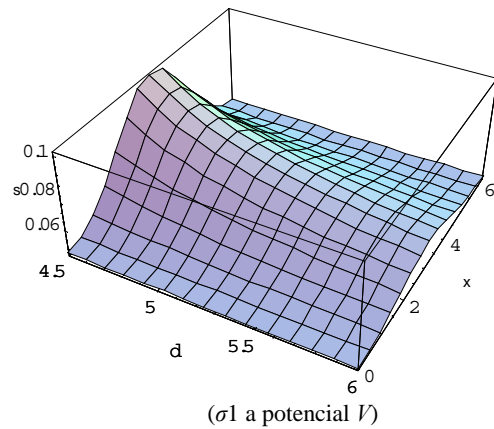


FIGURA 5. Sistema formado por dos esferas conductoras en un sistema coordenado bie esférico. Se muestran mediante líneas continuas, la forma de las superficies equipotenciales y con líneas punteadas el campo electrostático.

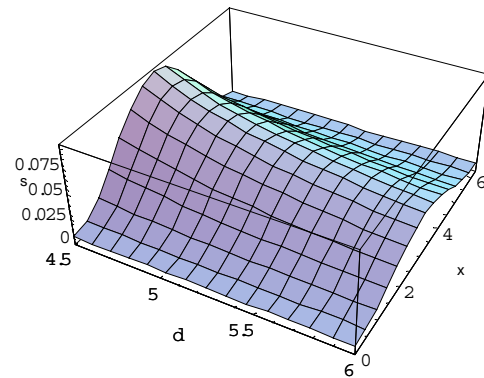
$$Q_1 = \frac{Va}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_l(\cosh \eta_1)}{\sinh\left[\left(l + \frac{1}{2}\right)(\eta_1 - \eta_2)\right]} \times \left(\left(l + \frac{1}{2}\right) \cosh\left[\left(l + \frac{1}{2}\right)(\eta_1 - \eta_2)\right] C_l(\cosh \eta_1) - \sinh\left[\left(l + \frac{1}{2}\right)(\eta_1 - \eta_2)\right] \frac{d}{d\eta_1} C_l(\cosh \eta_1) \right)$$

$$Q_2 = -\frac{Va}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(l + \frac{1}{2}\right) C_l(\cosh \eta_1) C_l(\cosh \eta_2)}{\sinh\left[\left(l + \frac{1}{2}\right)(\eta_1 - \eta_2)\right]}$$

en la figura 6, se muestran las densidades superficiales de carga en cada una de las esferas. Una manifestación más, sobre la forma en que se redistribuye la carga, interaccionar con las cargas del otro conductor. Es relevante ver que el uso de coordenadas propias del sistema, permite describir con precisión analítica confrontable con valores experimentales.



(σ_1 a potencial V)



(σ_2 esfera a potencial cero)

FIGURA 6. Las gráficas en coordenadas bie esféricas muestran la distribución de la carga en cada esfera, como se observa la carga en la esfera a potencial V esta más densa en la dirección de la esfera conectada a tierra a la que se le induce la carga.

La fuerza esferas conductoras se calculó por medio del tensor de esfuerzos de Maxwell.

$$\vec{F}_2 = -\hat{k} \frac{V^2}{4} \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \cosh \eta_2 \left[\frac{2(l+1)}{(2l+1)(2l+3)} B_l B_{l+1} + \frac{2l}{4l^2-1} B_l B_{l-1} \right] - \frac{2}{2l+1} B_l^2 \right\},$$

donde se ha usado la definición,

$$B_l = \frac{\left(l + \frac{1}{2}\right) C_l(\cosh \eta_1) N_l}{\sinh\left[\left(l + \frac{1}{2}\right)(\eta_1 - \eta_2)\right]}$$

Las dependencias entre los parámetros de distancia entre las esferas y sus radios se obtienen de las relaciones de transformación de coordenadas:

Las ecuaciones para las cargas totales en cada esfera desarrolladas en series (R/d), para el caso de esferas iguales, se reduce en términos de la distancia d y el radio de las esferas a:

$$Q_1 \approx \frac{VR}{2} + \frac{VR^3}{d^2} + 2\frac{VR^5}{d^4} + \frac{9VR^7}{2d^6},$$

$$Q_2 \approx -\frac{VR^2}{d} - \frac{VR^4}{d^3} - 3\frac{VR^6}{d^5} - \frac{VR^8}{d^7},$$

para el primer término las cargas se puede relacionar como:

$$Q_2 \approx -Q_1 \frac{2R}{d},$$

considerando sólo el primer término:

$$Q_1 \approx VR, \quad Q_2 \approx -\frac{VR^2}{d}.$$

Para esferas pequeñas y grandes distancias, la serie para la fuerza, se reduce a:

$$\vec{F}_2 = -\hat{k} \frac{V^2}{2} \left\{ \frac{1}{3} B_0 B_1 \cosh \eta_2 - B_0^2 \right\} \approx -\hat{k} V^2 \left[\left(\frac{R}{d} \right)^3 + 4 \left(\frac{R}{d} \right)^5 + 15 \left(\frac{R}{d} \right)^7 \right],$$

en términos de las cargas, el primer término:

$$\vec{F}_{2a} \approx -\hat{k} V^2 \left(\frac{R}{d} \right)^3 = -\hat{k} VR \frac{VR^2}{d} \frac{1}{d^2} = -\hat{k} \frac{Q_1 Q_2}{d^2}$$

y el segundo se reduce a:

$$\vec{F}_{2b} \approx -4\hat{k} V^2 \left(\frac{R}{d} \right)^5 = -4\hat{k} VR \frac{VR^2}{d} \frac{R^2}{d^4} \approx -\hat{k} \frac{Q_1 P}{d^4},$$

donde $P \approx Q_2 R^2$ se conoce como el momento cuadrupolar, así:

$$\vec{F}_2 \approx \hat{k} \left(\frac{Q_1 Q_2}{d^2} - \frac{Q_1 P}{d^4} \right).$$

Para el caso de distancias cortas, donde los efectos de redistribución de la carga en las esferas son grandes, solución en coordenadas biesféricas, la fuerza electrostática mostró una rápida convergencia comparada con la fuerza calculada de la expresión obtenida por el método de imágenes de Maxwell.

III. CONCLUSIONES

La confrontación entre los modelos físicos y los resultados experimentales, es un tema común en las diferentes áreas de la ciencia. En nuestro caso, es importante observar que los modelos describen con suficiencia el comportamiento del sistema formado por esferas conductoras, cuando éstas se encuentran a "grandes distancias". La desviación de la ley de Coulomb no es teórica, en lo general, las limitaciones son experimentales. Situaciones que gracias a la tecnología y método experimentales implementados ha sido posible obtener valores de la fuerza electrostática entre esferas conductoras, mostrando la consistencia que hay entre los modelos en todas situaciones.

Las expresiones funcionales de la fuerza entre electrodos conductores, eléctricamente cargados, describen la redistribución de carga debida a la inducción, como función de la separación entre los electrodos y las dimensiones de los electrodos, el efecto de redistribución en la superficie de los conductores se da a todas las distancias.

En todos los casos aquí discutidos la fuerza electrostática mostraron, como era de esperarse, para $d \gg R$, el límite coulombiano. La fuerza entre dos esferas conductoras construidas por diferentes situaciones, converge con diferente rapidez hacia la ley colombiana. Manteniendo la inherente simplicidad geométrica, los estudiantes pueden analizar fácilmente los datos si el asesor asegura que $d \gg R$

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Dr. E. Ley Koo sus valiosas aclaraciones sobre la interpretación de fuerza entre los conductores y su apoyo para resolver el problema usando coordenadas biesféricas.

REFERENCIAS

- [1] Liang-Cheng Tu and Jun Luo, *Experimental tests of Coulomb's Law and the photon rest mass*, Institute of Physics Publishing, Metrologia **41**, s136-s146, Sep (2004).
- [2] Jackson, J. D., *Classical Electrodynamics*, 3rd Edition, (John Wiley & Sons, Inc, New York, 1998) Chap. 1. pp 5-9.
- [3] Heering, P., *On Coulomb's inverse square law*, Am. J. Phys. **60**, 988 (1992).
- [4] Cuando la Ciencia nos Alcance, Cap III, El Arte Perdido de Cuchear (La Jornada, 27 de de diciembre de 1993) http://www.jcce.org/cu/libros/Libros_3/ciencia3/160/htm/se_c_6.htm Consultado el 30 de Nov. 2008
- [5] Rogers, E., *Coulomb's Law and Coulomb's Force Constant*, Am. J. Phys. **31**, 736 (1963).
- [6] Coulomb Balance, http://physicslabs.cwru.edu/EM/Manual/pdf_version/COUL.pdf (2006) Consultado el 31 de Enero de 2009
- [7] Wiley, P. H. and Stutzman, W. L., *Simple experiment to demonstrate Coulomb law*, Am. J. Phys. **46**, 1131-1133 (1978).
- [8] Soules, J. A., *Precise calculation of the electrostatic force between charged spheres including induction effects*, Am. J. Phys. **58**, 1195 (1990).

- [9] Corona, A. y Ley-Koo, E., *Evaluation and Measurement of forces between two conducting spheres*, Revista Mexicana de Física. **48**, 579-585 (2002)
- [10] Cortel, A., *Demonstrations of Coulomb's law with an electronic balance*, Phys. Teach. **37**, 447-448 (1999).
- [11] Larson, C. O. and Goss, E. W., *A Coulomb's Law Balance Suitable for Physics Majors and Nonscience Students*, Am. J. Phys. **38**, 1349 (1970).
- [12] Slisko, J. and Brito-Orta, R. A., *On approximate formulas for the electrostatic force between two conducting spheres*, Am. J. Phys. **66**, 352-355 (1998)
- [13] Maxwell, J. C., *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Vol. 1 (Dover, New York, 1954), pp. 43-47.
- [14] Purcell, E. M., *Electricidad y magnetismo*, 2ª Ed. Vol 2, (Editorial Reverté, S.A., México, 2005) p 104.
- [15] Landau, L. D. and Lifshitz, E. M., *Electrodynamics of Continuous Media*, Vol. 8, (Addison Wesley Publishing Company, Inc., New York, 1960) p 8-12.
- [16] Jackson, J. D., *Classical Electrodynamics*, 3rd Edition, (John Wiley & Sons, Inc, New York, 1998) Chap. 1. pp 57-60.
- [17] Maxwell, J. C., *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Vol. 1, (Dover, New York, 1954) pp. 266 – 273.