

<i>Recibido</i>  <i>10/10/2009</i>  <i>Revisado</i>  <i>2/11/2009</i>  <i>Aceptado</i>  <i>11/11/2009</i>	<b>Las condiciones de Kuhn y Tucker en el cálculo de fronteras eficientes</b>  <b>Calvo, Clara.</b> Clara.Calvo@uv.es <b>Ivorra, Carlos.</b> Carlos.Ivorra@uv.es <b>Liern, Viente.</b> Vicente.Liern@uv.es  <i>Departamento de Matemáticas para la Economía y la Empresa</i> <i>Universitat de València</i>
---	--

## RESUMEN

Presentamos un algoritmo que combina el uso de las condiciones de Kuhn y Tucker con procedimientos heurísticos para calcular la frontera eficiente del problema de selección de cartera con variables semicontinuas y cualquier conjunto adicional de restricciones lineales. También permite incorporar otras clases de restricciones, como las de cardinalidad. Para instancias pequeñas se convierte en un algoritmo exacto. De este modo se pueden detectar muchas irregularidades de la frontera eficiente que pueden ser útiles al inversor para determinar su nivel de rentabilidad deseado.

**Palabras claves:** Cartera de valores, Frontera eficiente, Condiciones de Kuhn y Tucker

## ABSTRACT

We present an algorithm that combines the use of the Kuhn-Tucker conditions with heuristical procedures to calculate the efficient frontier of the semicontinuous variable constrained portfolio selection problem with any additional set of linear constraints. Other kinds of constraints can also be added, such as cardinality constraints. For small instances, it becomes an exact algorithm. In this way, many irregularities of the efficient frontier are detected that can be useful to the investor to select a desired return level.

**Keywords:** Portfolio Selection, Efficient Frontier, Kuhn-Tucker Conditions.

**Agradecimientos** Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el proyecto TIN2008-06872-C04-02 del Ministerio de Ciencia e Innovación.

## 1.- Introducción

El problema de selección de carteras eficientes, en la versión planteada por Markowitz, puede ser formulado como el siguiente problema de programación cuadrática:

$$\begin{aligned} \text{Min. } & R = \mathbf{x}^t \mathbf{V} \mathbf{x} \\ \text{s.t. } & \mathbf{e}^t \mathbf{x} \geq r, \\ & \mathbf{1}^t \mathbf{x} = 1, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{1}$$

donde, dado un conjunto de  $n$  activos, el vector  $\mathbf{x}$  contiene el peso de cada uno de ellos en la cartera,  $\mathbf{e}$  es el vector de rentabilidades esperadas, calculadas como las medias de las rentabilidades históricas,  $\mathbf{V}$  es la matriz de varianzas-covarianzas de dichos datos, de modo que la función objetivo es una medida del riesgo de la inversión y  $r$  es la rentabilidad mínima que desea alcanzar el inversor.

A partir de este modelo se han considerado muchas variantes (Sharpe, 1970). La más simple consiste en eliminar las condiciones de no negatividad:

$$\begin{aligned} \text{Min. } & R = \mathbf{x}^t \mathbf{V} \mathbf{x} \\ \text{s.t. } & \mathbf{e}^t \mathbf{x} \geq r, \\ & \mathbf{1}^t \mathbf{x} = 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Admitir valores negativos para los pesos  $x_i$  se interpreta como admitir las llamadas ventas al descubierto. Aunque este modelo puede tacharse de poco realista (Steuer et al. 2007) es muy utilizado principalmente porque las condiciones de Kuhn y Tucker proporcionan fórmulas cerradas para la solución en términos del parámetro  $r$ , así como para cualquier otra información relacionada con el problema (Chifu, 1988; Grinold y Kahn, 1999). Por ejemplo, es bien conocido que en este caso la frontera eficiente se reduce a una rama de parábola cuya ecuación puede ser explícitamente calculada.

Recordemos que, en general, la frontera eficiente de un problema de selección de carteras (sujeto a cualquier conjunto de restricciones) es el conjunto de pares no dominados riesgo-rentabilidad  $(R, r)$ , es decir, pares tales que  $R$  es el mínimo riesgo que puede obtenerse para un nivel de rentabilidad  $r$  dado y, recíprocamente,  $r$  es la máxima rentabilidad que puede obtenerse sin superar un nivel de riesgo dado  $R$ .

Sin embargo, las técnicas actuales de computación permiten tratar instancias del problema de la cartera que incluyan diversas restricciones encaminadas a plasmar más fielmente las preferencias del inversor o las condiciones del mercado (véase Hallerbach et al. 2004 y Steuer et al. 2006). En este contexto, la frontera eficiente se vuelve más complicada. Por ejemplo, si añadimos un conjunto de restricciones lineales, pasa a ser parabólica a trozos, y con restricciones más sofisticadas, puede incluso presentar discontinuidades y otras anomalías.

Paralelamente, las condiciones de Kuhn y Tucker dejan de ser útiles para resolver el problema, principalmente a causa de las condiciones de holgura complementaria. En efecto, al tratarse de un problema cuadrático, las restantes condiciones de Kuhn y Tucker forman un sistema de ecuaciones e inecuaciones lineales, fácil de tratar, pero cada restricción lineal de la forma  $g(\mathbf{x}) \leq b$  o  $g(\mathbf{x}) \geq b$  tiene asociada la condición de holgura

$$\lambda(b - g(\mathbf{x})) = 0,$$

donde  $\lambda$  es el multiplicador de Kuhn y Tucker asociado a la restricción. Cada una de estas condiciones de holgura se desdobra en dos ecuaciones lineales

$$g(\mathbf{x}) = b \quad \text{o} \quad \lambda = 0. \tag{3}$$

Por lo tanto, si tenemos  $m$  restricciones de desigualdad, las condiciones de Kuhn y Tucker se desdoblan en  $2^m$  sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales, de los cuales muchos pueden ser infactibles y algunos de ellos serán factibles para valores de  $r$  dentro de un cierto intervalo, sobre el cual la frontera eficiente será un arco de parábola.

Por ello, la técnica más habitual para calcular fronteras eficientes consiste en resolver el problema para diversos valores de  $r$  y obtener así una muestra de puntos de la frontera a partir de los cuales se puede obtener una aproximación mediante interpolación (Steuer 2007). Sin embargo, esta técnica presenta algunos inconvenientes. Desde el punto de vista computacional, no podemos saber a priori cuántos puntos debe contener la muestra para llegar a una representación suficientemente fiel de la frontera y, por otra parte, con este método no podemos conocer los niveles de rentabilidad o riesgo en los que la frontera pasa de estar descrita por una ecuación

a estar descrita por otra, ni los niveles exactos en los que cambia la composición de la cartera eficiente, etc. Según la técnica con la que resolvamos los problemas de la muestra, podemos perder incluso toda la información relacionada con los multiplicadores de Kuhn y Tucker o, en cualquier caso, la perderemos, o la conoceremos de forma aproximada por interpolación, para los puntos que no estén en la muestra.

En este trabajo vamos a ver que todos estos inconvenientes desaparecen combinando adecuadamente el uso de las condiciones de Kuhn y Tucker con el cálculo de algunas carteras eficientes con cualquier otro método alternativo, aunque sea aproximado, con un coste computacional razonable. Concretamente, nuestro método presenta las ventajas siguientes:

1. Proporciona una descripción analítica de la frontera eficiente, en el sentido de que calcula sus ecuaciones y los intervalos en los que es válida cada una de ellas.
2. Determina el mínimo número de puntos necesario para realizar dicho cálculo exacto, que suele ser mucho menor que el necesario para aproximar la frontera por interpolación a partir de la muestra.
3. Proporciona las carteras eficientes y los multiplicadores de Kuhn y Tucker exactos para todo punto, incluso aunque los datos de la muestra sean aproximados y desconozcamos los multiplicadores asociados.
4. Para problemas pequeños proporciona un algoritmo exacto de enumeración que no requiere de ningún método auxiliar para calcular una muestra de la frontera.
5. Cada aplicación de nuestro método no tiene más coste computacional que el necesario para calcular una matriz inversa. El resto de operaciones se reduce a sumas, productos y cocientes sin ningún proceso iterativo. Este coste computacional se compensa con creces por la reducción de puntos necesarios mencionada en el punto 2.
6. Una única aplicación de nuestro método a una cartera eficiente dada proporciona una parametrización de un entorno de la frontera eficiente que puede

bastar para hacer un análisis de sensibilidad de la solución dada.

7. El método que proponemos se aplica a instancias del problema de la cartera con restricciones lineales, si bien también es útil para obtener la máxima información posible a partir de una muestra de la frontera eficiente (aunque sin garantías de obtener la frontera exacta) bajo restricciones más complejas como variables semicontinuas o restricciones de cardinalidad.

Nuestro algoritmo está implementado en *Mathematica* y lo hemos usado conjuntamente con GAMS. En la sección siguiente describimos las ideas fundamentales de nuestro algoritmo, en la sección 3 presentamos un ejemplo, en la sección 4 explicamos cómo se adapta al caso de problemas con variables semicontinuas y en la sección 5 presentamos pruebas computacionales con datos del IBEX35.

## 2.- Descripción del algoritmo

Por simplicidad, vamos a considerar restricciones de cotas, es decir:

$$\begin{aligned} \text{Min. } & R = \mathbf{x}^t \mathbf{V} \mathbf{x} \\ \text{s.t. } & \mathbf{e}^t \mathbf{x} \geq r, \\ & \mathbf{1}^t \mathbf{x} = 1, \\ & \boldsymbol{\ell} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}. \end{aligned} \tag{4}$$

Se trata de condiciones de diversificación que resultan especialmente adecuadas en nuestro contexto porque el algoritmo particularizado a este caso se generaliza fácilmente a cualquier conjunto de restricciones lineales.

El núcleo del algoritmo que utilizamos parte de una cartera eficiente  $\mathbf{x}$  (calculada con cualquier procedimiento estándar) y de ella extrae los conjuntos de índices  $L$ ,  $U$  y  $N$  correspondientes a las variables  $x_i$  que saturan la cota inferior, la cota superior o ninguna de ellas, respectivamente. Notemos que, de este modo, estamos usando únicamente información cualitativa sobre la cartera dada, de modo que si no fuera exacta, nuestro algoritmo nos llevaría a la solución exacta en la medida en que sea suficientemente precisa como para que los tres conjuntos anteriores sean correctos.

Los conjuntos  $L$ ,  $U$  y  $N$  determinan cuál de las dos ecuaciones lineales (3) satisface la cartera dada. De este modo, las condiciones de Kuhn y Tucker se re-

ducen a un sistema de ecuaciones y desigualdades lineales que puede ser resuelto paramétricamente para cualquier valor de  $r$ . Como resultado obtenemos:

- Un intervalo  $I = [r_{\min}, r_{\max}]$ .
- Dos vectores  $\mathbf{g}$  y  $\mathbf{h}$  tales que, para todo  $r \in I$ , la cartera eficiente correspondiente a una rentabilidad  $r$  viene dada por  $\mathbf{x} = \mathbf{g} + r\mathbf{h}$ .
- La ecuación  $R = ar^2 + br + c$  de la frontera eficiente sobre el intervalo  $I$ .
- Expresiones lineales análogas a la dada para  $\mathbf{x}$  para los multiplicadores de Kuhn y Tucker en el intervalo  $I$ .

Para una exposición detallada del algoritmo que acabamos de describir véase Calvo et al. (2009). Este procedimiento puede utilizarse como sigue para calcular la frontera eficiente del problema:

1. Calculamos el intervalo  $J = [m, M]$  sobre el que está definida la frontera eficiente. Concretamente,  $m$  es la rentabilidad de la cartera eficiente que se obtiene al resolver (4) con  $r = 0$ , y  $M$  es la máxima rentabilidad que puede alcanzarse sobre el conjunto de oportunidades de (4) sin la primera restricción.
2. Construimos una sucesión de intervalos  $I_1, \dots, I_j$  contenidos en  $J$  recurrentemente: el intervalo  $I_{j+1}$  se construye eligiendo un valor  $r \in J$  que no esté en ninguno de los intervalos calculados, resolviendo (4) para dicho valor de  $r$  y aplicando a la cartera cartera eficiente obtenida el proceso explicado al principio de esta sección. Para calcular  $I_1$  se parte de un  $r \in J$  arbitrario.
3. El proceso termina cuando los intervalos calculados cubren todo el intervalo  $J$ . Se demuestra (véase Calvo et al., 2009) que esto sucede necesariamente tras un número finito de pasos y que los intervalos obtenidos, debidamente ordenados, se encadenan, en el sentido de que el extremo superior de cada uno es el extremo inferior del siguiente.

De este modo, tenemos parametrizada la frontera eficiente exacta habiendo resuelto  $k$  instancias concretas de (4), donde  $k$  es el número de intervalos obtenidos

(ya que los dos problemas calculados en el primer paso sirven para calcular el primer y el último intervalo de la sucesión). En los resultados computacionales que presentamos, hemos usado el programa GAMS para resolver las instancias particulares de los problemas y *Mathematica* para aplicar nuestro algoritmo. No obstante, para problemas pequeños es posible convertir nuestro procedimiento en un algoritmo de enumeración independiente de cualquier software de optimización. Basta enumerar las  $3^n$  posibilidades para los conjuntos  $L$ ,  $U$  y  $N$ .

### 3.- Ejemplo

Como primer ejemplo consideramos los datos históricos introducidos por Markowitz (1952, 1959). La tabla 1 muestra las rentabilidades de American Tobacco, AT&T, United States Steel, General Motors y Atcheson, Topeka & Santa Fe.

Tabla 1: Rentabilidades de cinco activos

Year	AmT	ATT	USS	GM	ATS
1937	-0.305	-0.173	-0.318	-0.477	-0.457
1938	0.513	0.098	0.285	0.714	0.107
1940	0.055	0.2	-0.047	0.165	-0.424
1941	-0.126	0.03	0.104	-0.043	-0.189
1942	-0.003	0.067	-0.039	0.476	0.865
1943	0.428	0.3	0.149	0.225	0.313
1944	0.192	0.103	0.26	0.29	0.637
1945	0.446	0.216	0.419	0.216	0.373
1946	-0.088	-0.046	-0.078	-0.272	-0.037

A partir de estos datos calculamos la matriz de varianzas-covarianzas  $\mathbf{V}$  y el vector de rentabilidades  $\mathbf{e}$ . Además, hemos fijado las cotas  $0.1 \leq x_i \leq 0.3$ . Nuestro algoritmo permite calcular su frontera eficiente de forma exacta a partir de una muestra de 6 de sus puntos. La figura 1 muestra la frontera eficiente exacta y la aproximación que resulta de interpolarla a partir de 6 puntos equiespaciados. Vemos que hay diferencias destacables. Para obtener una aproximación razonable mediante una muestra de puntos equiespaciados hacen falta entre 20 y 25 puntos.



Tabla 2: Descripción cuantitativa de la frontera eficiente

$L$	$U$	$[r_{\min}, r_{\max}]$	$[R_{\min}, R_{\max}]$	ecuación de la frontera
{4, 5}	{2}	[0.103289, 0.107478]	[0.0400728, 0.0426276]	$11.6675r^2 - 1.84921r + 0.1066$
{5}	{1, 2}	[0.107478, 0.113689]	[0.0426276, 0.047546]	$17.0478r^2 - 2.97854r + 0.165827$
{3, 5}	{2}	[0.113689, 0.115711]	[0.047546, 0.0505051]	$122.894r^2 - 26.7285r + 1.49786$
{3, 5}	{4}	[0.115711, 0.119233]	[0.0505051, 0.057026]	$27.5594r^2 - 4.62357 + 0.216509$
{3}	{1, 4}	[0.119233, 0.1236]	[0.057026, 0.067734]	$84.3641r^2 - 18.0342 + 1.00793$
{2, 3}	{3}	[0.1236, 0.124444]	[0.067734, 0.0743335]	$2171.02r^2 - 530.695 + 32.495$

En la figura 2 vemos una muestra de la frontera con 25 puntos. En ella se aprecia ciertamente la forma de la frontera, pero no nos permite determinar las ecuaciones de las parábolas, ni los puntos de cambio de una a otra, ni si hay puntos en los que no es diferenciable, etc. Por el contrario, nuestro algoritmo nos proporciona, a partir de sólo seis puntos, toda la información dada en la tabla 2, además de los vectores que nos permiten calcular de forma exacta las carteras eficientes y los multiplicadores de Kuhn y Tucker del problema. Por ejemplo, el multiplicador asociado a la restricción de capital no es sino la derivada de la frontera eficiente y está representada en la figura 3, en la que vemos que la frontera no es derivable en ninguno de los puntos de cambio de ecuación.

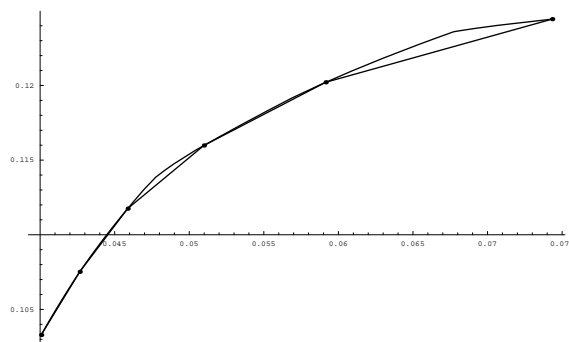


Figura 1: Frontera eficiente exacta y aproximada a partir de 6 puntos.

## 4.- Variables semicontinuas

Una clase de restricciones que complica sustancialmente la estructura de la frontera eficiente es la de las variables semicontinuas. La idea es que sería absurdo imponer restricciones de cota inferior sobre todos los activos, pues ello obligaría a que todos aparecieran en la cartera óptima, mientras que es razonable que un inversor desee que aquellos activos que de hecho aparezcan en la cartera, lo hagan con un peso mínimo. Esto significa exigir que cada variable  $x_i$  valga 0 o varíe en un intervalo  $l_i \leq x_i \leq u_i$ . Para incorporar este tipo de restricciones, necesitamos introducir variables binarias auxiliares  $y_i$  que valgan 1 si el activo  $i$ -ésimo aparece en la cartera y 0 en caso contrario. Con ello llegamos al siguiente modelo de programación entera mixta:

$$\begin{aligned}
 \text{Min. } & R = \mathbf{x}^t \mathbf{V} \mathbf{x} \\
 \text{s.t. } & \mathbf{e}^t \mathbf{x} \geq r, \\
 & \mathbf{1}^t \mathbf{x} = 1, \\
 & l_i y_i \leq x_i \leq u_i y_i, \quad 1 \leq i \leq n, \\
 & y_i \in \{0, 1\},
 \end{aligned} \tag{5}$$

Desde un punto de vista teórico, la solución óptima de este problema entero puede calcularse como la mejor de las soluciones de los subproblemas cuadráticos que resultan de fijar valores para las variables  $y_i$ . En particular, la frontera eficiente de (5) es el mínimo punto a punto de las fronteras eficientes de los subproblemas.

La figura 4 muestra las fronteras eficientes de los subproblemas de la instancia

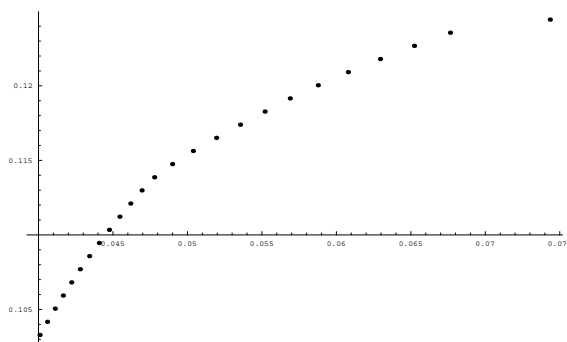


Figura 2: Muestra de la frontera eficiente con 25 puntos

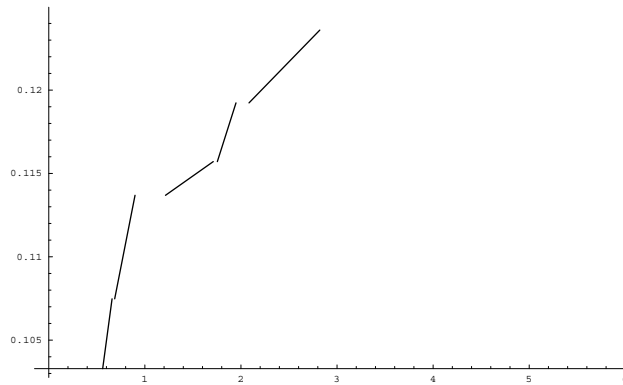


Figura 3: Derivada de la frontera eficiente

de (5) que resulta de tomar los datos de la tabla 1 y cotas inferiores de 0.1 para todas las variables (semicontinuas).

Partiendo de una muestra de puntos de la frontera eficiente, podemos aplicar igualmente el algoritmo propuesto en la sección 2 tomando ahora como datos los valores de las variables binarias además de los conjuntos  $L$ ,  $U$  y  $N$ . Con esto obtenemos una parametrización de un intervalo de la frontera eficiente del subproblema correspondiente. Sin embargo, ahora no podemos garantizar que toda ella forme parte de la frontera eficiente del problema completo, dado que, en cualquier punto, la frontera de otro subproblema podría mejorar a ésta. A pesar de ello, podemos calcular los mínimos punto a punto de las parametrizaciones obtenidas a partir de la muestra y ello nos proporciona la mejor interpolación posible que puede calcularse

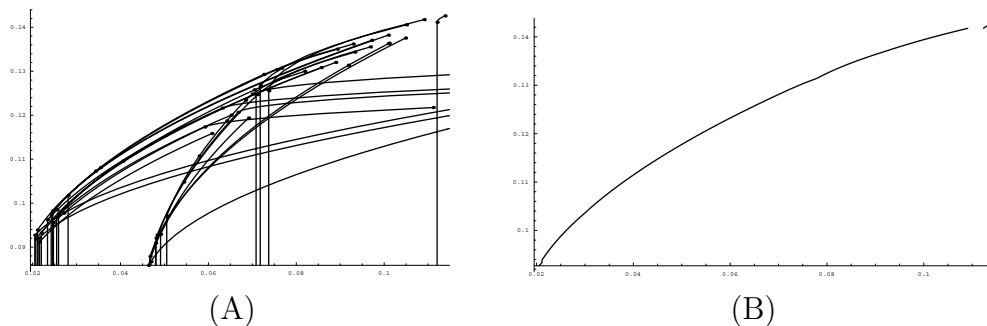


Figura 4: Fronteras eficientes de los subproblemas (A) y del problema completo (B).

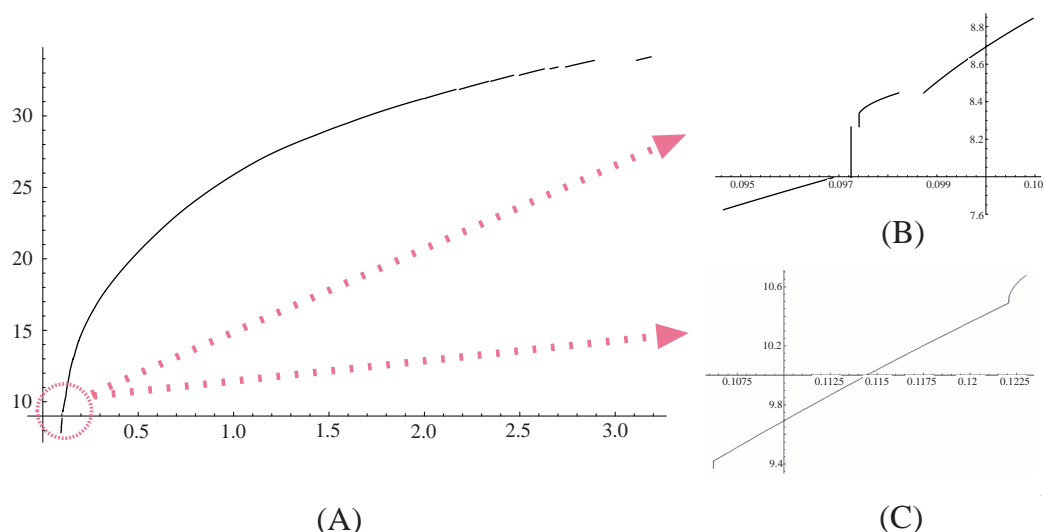


Figura 5: Irregularidades de la frontera eficiente

a partir de dichos puntos.

## 5.- Pruebas computacionales con el IBEX35

Presentamos a continuación un ejemplo de problema de selección de cartera a partir de datos de 32 activos del IBEX35.<sup>1</sup> Hemos tomado las observaciones de los precios de los miércoles como estimación de los precios semanales. Así, la rentabilidad del  $j$ -ésimo activo durante la  $k$ -ésima semana se define como  $r_{kj} = (p_{k+1j} - p_{kj})/p_{kj}$ , donde  $p_{kj}$  es el precio del  $j$ -ésimo activo el miércoles de la  $k$ -ésima semana. La base de datos empleada cubre el periodo desde enero de 1998 hasta marzo de 2003. Hemos considerado variables semicontinuas en el rango  $0.05 - 0.3$ , así como restricciones de cardinalidad para exigir que la cartera tenga entre 10 y 15 activos.

Hemos obtenido una muestra de 200 puntos de la frontera eficiente con la ayuda del programa GAMS. Tras calcular los correspondientes  $(\{y_i\}, L, U, N)$  de cada car-

<sup>1</sup>Hemos considerado los activos Acesa (ACE), Arcelor (ACR), ACS, Altadis (ALT), BBVA, Bankinter (BKT), Dragados (DRC), Endesa (ELE), FCC, Iberdrola (IBE), Metrovacesa (MVC), NH Hoteles (NHH), Banco Popular (POP), Repsol (REP), SCH (SAN), Telefónica (TEF), Unión Fenosa (UNF), Vallermosto (VAL), Acerinox (ACX), Acciona (ANA).

tera, aparecen únicamente 45 casos distintos. La figura 5A muestra la interpolación de la frontera eficiente. Parece bastante regular, pero vista de cerca se pueden apreciar muchas irregularidades. Por ejemplo, la figura 5B muestra dos ampliaciones de la zona inferior izquierda. La figura superior es justo el principio de la frontera eficiente, y distinguimos en ella cuatro piezas correspondientes a otras tantas composiciones de la cartera óptima. Esto significa que pequeñas variaciones en la elección de la rentabilidad dan lugar a carteras eficientes de riesgos similares pero con composiciones distintas, sobre las que el decisor puede optar por criterios distintos al riesgo. Las cuatro piezas están separadas tanto por saltos verticales como horizontales. La segunda (después del primer salto) es un arco de parábola muy pequeño, concretamente definido sobre el intervalo de rentabilidades  $[8.26384, 8.26589]$ . La figura 5C muestra un cambio brusco de pendiente que es relevante a la hora de hacer un análisis de sensibilidad.

## 6.- Conclusiones

Las técnicas que hemos presentado muestran que la frontera eficiente de un problema de selección de cartera puede ser muy compleja y presentar patologías que pueden ser relevantes a la hora de seleccionar un nivel de rentabilidad. Las técnicas usuales de representación de fronteras eficientes no reflejan estas características, mientras que, según hemos visto, las condiciones de Kuhn y Tucker, aunque no son aptas para calcular por sí mismas la frontera eficiente en instancias de tamaño medio, sí resultan ser eficientes para interpolar muestras con gran precisión y bajo coste computacional, reflejando todas aquellas peculiaridades que pueden ser útiles para el inversor y conocer la sensibilidad de la cartera eficiente respecto de su elección.

Para problemas pequeños, nuestro método se convierte en un algoritmo exacto y en algunos problemas de mayor tamaño, permite seleccionar la muestra mínima necesaria para calcular con exactitud la frontera eficiente.

## 7.- Bibliografía

- CALVO, C.; IVORRA, C. y LIERN, V. (2009). “Computation of the Exact Efficient Frontier of the Portfolio Selection Problem”. *European Journal of Operational Research* (pendiente de aceptación).
- CHIFU, H.; LITZENBERG, R.H. (1988). *Foundations for financial economics*. North Holland: Amsterdam.
- GRINOLD, R.C. y KAHN, R.N. (1999). *Active Portfolio Management. A Quantitative Approach for Providing Superior Returns and Controlling Risks*, New York: McGraw-Hill.
- HALLERBACH, W.; NING, H.; SOPPE, A. y SPRONK, J.A. (2004). “Framework for Managing a Portfolio of Socially Responsible Investments”. *European Journal of Operational Research* 153; 517–529.
- HIRSCHBERGER, M.; QI, Y. y STEUER, R.E. (2006). “Quadratic Parametric Programming for Portfolio Selection with Random Problem Generation and Computational Experience”. Working paper. Athens: Department of Banking and Finance-University of Georgia.
- MARKOWITZ, H.M. (1952). “Portfolio selection”. *Journal of Finance* 7; 79–91.
- MARKOWITZ, H.M. (1959). *Portfolio selection: Efficient Diversification of Investments*. New York: John Wiley.
- SHARPE, W.F. (1970). *Portfolio Theory and Capital Market*, New York: McGraw-Hill.
- STEUER, R.E., QI, Y, y HIRSCHBERGER, M. (2006). “Portfolio Optimization: New Capabilities and Future Methods”. *Zeitschrift für Betriebswirtschaft* 76; 199–219.
- STEUER, R.E., QI, Y, y HIRSCHBERGER, M. (2007). “Suitable-portfolio investors, nondominated frontier sensitivity, and the effect of multiple objectives on standard portfolio selection”, *Annals of Operations Research*, 152, 297–317.