SOBRE LOS CONJUNTOS DE LAS SERIES DE TAYLOR PROLONGABLES Y NO PROLONGABLES

por

Sixto Ríos
(Madrid)

1. - El problema de comprobación de los conjuntos de series de Taylor prolongables y no prolongables ha sido estudiado por varios matemáticos Vigil [1], Borel [2], Pringsheim [3], Pólya [4], Fréchet [5], Steinhaus [6], etc., sin que se haya llegado a dar una demostración completa del enunciado de Borel: «Casi todas las series de Taylor son no prolongables». Pólya ha tenido el primero la idea de dar una estructura topológica al conjunto de las series de potencias de radio 1, logrando dar algunas características de ambos conjuntos, mientras Steinhaus ha llegado a una prueba rigurosa, aunque restringida de un caso particular del enunciado de Borel.

En la presente nota construímos un espacio métrico con las series de potencias de radio no nulo, obteniendo una caracterización análoga a la de Pólya, de los conjuntos de series prolongables y no prolongables, aunque hay una cierta discrepancia de resultados, lo cual no tiene nada de extraño, ya que las propiedades de dichos conjuntos *deben* depender de la definición de entorno que se dé. Creemos, sin embargo, que debe señalarse el interés de esta discrepancia, porque tanto los entornos de Pólya como los nuestros entran, sin duda, en la categoría de los que Fréchet llama «entornos no artificiales conviniendo a la naturaleza del problema».

2. - Consideremos el conjunto de todas las series de potencias

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

tales que

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} < \infty$$

y definamos la distancia entre la función $f(z)$ y la

(2) $$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

como la recíproca del radio de convergencia de la serie diferencia $f(z) - \varphi(z)$; a saber:

(3) $$D(f, \varphi) = \overline{\lim_{n \to \infty}} |a_n - b_n|^{1/n}.$$

Si convenimos en considerar como iguales dos funciones cuya diferencia sea una función entera, se verifica $D(f, \varphi) > 0$, si $f \neq \varphi$ y recíprocamente.

La propiedad de simetría de la distancia se verifica evidentemente:

$$D(f, \varphi) = D(\varphi, f).$$

Para establecer la propiedad triangular

(4) $$D(f, \varphi) \leqq D(f, \psi) + D(\varphi, \psi)$$

observemos que, como consecuencia de la definición de distancia, resulta:

(5) $$D(f, \varphi) = D(f - \varphi, 0)$$

y la relación (4) equivale a la siguiente:

(6) $$D(f - \varphi, 0) \leqq D(f - \psi, 0) + D(\varphi - \psi, 0)$$

o bien, poniendo:

$$f - \psi = F, \quad \varphi - \psi = \Phi$$

(7) $$D(F - \Phi, 0) = D(F, \Phi) \leqq D(F, 0) + D(\Phi, 0).$$

Esta última equivale a probar que

$$\overline{\text{lím}}\,|a_n - b_n|^{1/n} \leqq \overline{\text{lím}}\,|a_n|^{1/n} + \overline{\text{lím}}\,|b_n|^{1/n}$$

la cual es una consecuencia inmediata de la siguiente relación

$$|a_n - b_n|^{1/n} \leqq |a_n|^{1/n} + |b_n|^{1/n}$$

la cual es cierta, porque elevando a n resulta:

$$|a_n - b_n| \leqq |a_n| + |b_n| + \ldots$$

que es evidente.

3.-Vamos a probar que el espacio métrico que hemos construído no es completo, compacto ni separable.

A) *El espacio no es completo*

Basta considerar el siguiente ejemplo. Sea la sucesión $f_n(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n$, que verifica la condición de Cauchy por ser

$$D(f_n, f_m) = \frac{1}{R(z^{n+1} + z^{n+2} + \ldots + z^m)} = 0.$$

Como consecuencia de la condición de Cauchy resulta que, si existe $\text{lím}\, f_n(z)$ este límite es necesariamente $1 + z + z^2 + z^3 \pm \ldots =$ $= 1/1 - z$. Ahora bien, esto es imposible, pues $D(f_n, 1/1 - z) = 1$; luego el espacio no es completo.

B) *El espacio no es compacto*

Basta probar que existen sucesiones infinitas de funciones sin punto límite. Consideremos el conjunto de todas las funciones de la forma:

$$f_n(z) = \frac{1}{z - (1 + \frac{1}{n})} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

El radio de convergencia de $f_n(z)$ es $R_n = 1 + \frac{1}{n}$.

No hay ninguna función $f(z)$ holomorfa tal que en todo entorno suyo haya elementos del conjunto, pues si $f(z)$ es de radio $1 + \frac{1}{n}$ hay a lo sumo una función $f_n(z)$ del conjunto en todo entorno suyo, y si es de radio $\neq 1 + \frac{1}{n}$, tomando ε suficientemente pequeño no hay ninguna serie en el entorno.

C) *El espacio no es separable*

Basta ver que existen conjuntos infinitos de funciones para los cuales no es posible construir una sucesión numerable de funciones densas en aquel conjunto.

Consideremos el conjunto de la potencia del continuo de las funciones:

$$\frac{1}{z-\alpha} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha}\left(\frac{z}{\alpha}\right)^n$$

en que α representa los números reales del intervalo $1 < \alpha < 2$.

Si existiera una sucesión numerable de funciones $f_n(z)$ tales que, fijado ε, a cada función $\frac{1}{z-\alpha}$ se le pueda asociar una función $f_n(z)$ tal que

$$D\left(\frac{1}{z-\alpha}, f_n\right) < \varepsilon,$$

debería ser

$$f_n(z) = \frac{1}{z-\alpha} + \varphi_n(z)$$

en que $\varphi_n(z)$ es de radio de convergencia $> \frac{1}{\varepsilon}$.

Resulta que tomando ε suficientemente pequeño, dos funciones f_n, f_m, correspondientes a dos funciones $\frac{1}{z-\alpha} \neq \frac{1}{z-\beta}$ deben ser distintas ya que sus radios de convergencia son diferentes; luego el conjunto de las funciones f_n debe tener la potencia del continuo y, por tanto, el espacio no es separable.

Demostrado C) podíamos haber obtenido la propiedad B) sin demostración directa, ya que, según se sabe, todo espacio métrico compacto es separable.

Se puede ver fácilmente que en este espacio los segmentos están formados por solo dos puntos.

En efecto; dadas dos funciones $f(z)$, $\varphi(z)$ no existe ninguna otra $\psi(z)$ que verifique la condición

$$D(f, \psi) + D(\psi, \varphi) = D(f, \varphi)$$

pues, poniendo $f - \psi = F$, $\varphi - \psi = \phi$ la relación equivale a la siguiente:

$$D(F, 0) + D(\phi, 0) = D(F, \phi)$$

y como, o bien: $D(F, 0) = D(F, \phi)$ o bien $D(\phi, 0) = D(F, \phi)$, resulta $\phi = 0$ o $F = 0$ como se quería demostrar.

También es inmediato ver que todos los triángulos son isósceles. Basta observar que dadas dos funciones F, ϕ siempre hay dos distancias entre las

$$D(F, 0), \quad D(\phi, 0), \quad D(F, \phi)$$

que son iguales, lo cual resulta inmediatamente de la significación geométrica de la distancia como recíproca del radio de la serie diferencia.

4.-Vamos a obtener ahora propiedades de los conjuntos de las series prolongables y de las que tienen la circunferencia de convergencia como cortadura esencial.

Las series que tienen la circunferencia de convergencia como cortadura esencial forman un conjunto de puntos interiores en que el único punto frontera es el elemento nulo.

Dada una serie

$$f(z) = \Sigma\, a_n z^n$$

cuya circunferencia de convergencia sea cortadura esencial, fijado en número $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeño para que $R(f) > \frac{1}{\varepsilon}$ todas las funciones φ tales que $D(f, \varphi) < \varepsilon$, que forman el entorno de f tienen que ser de la forma $\varphi = f + \psi$, siendo ψ una serie de radio menor que $\frac{1}{\varepsilon} > R(f)$, luego todos ellos tienen la circunferencia de convergencia como cortadura esencial; es inmediato ver que en todo contorno del elemento nulo hay series prolongables.

Con razonamiento análogo al precedente se prueba que *el conjunto de las integrales prolongables está formado por puntos interiores, siendo el único punto frontera el elemento nulo.*

Resulta que el espacio considerado tiene una estructura análoga al conjunto formado por dos superficies esféricas tangentes en un punto.

Los contornos que aquí consideramos son adecuados a la naturaleza del problema en el sentido que indica Fréchet [5] ya que todas las funciones de un entorno suficientemente pequeño de una función prefijada tienen los mismos puntos singulares sobre la circunferencia de convergencia. Por ésto justamente nos parece interesante comparar este espacio con el de Pólya (4) que también tiene entornos adecuados a la naturaleza del problema, pero en él se llega a resultados algo diferentes de los nuestros; por ejemplo: Pólya demuestra que el conjunto de las series no prolongables es denso en toda dirección y no contiene más que puntos interiores y el de las series prolongables no es denso ni perfecto.

5.- Las consideraciones hechas aquí para series de Taylor se extienden fácilmente a series de Dirichlet de abscisa $< +\infty$ llamando distancia de las funciones

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}, \quad \varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda'_n s}$$

al número

$$D(f, \varphi) = e^{c(f-\varphi)}$$

en que $c(f-\varphi)$ es la abscisa de la convergencia de la serie diferencia $f - \varphi$.

Para establecer la propiedad triangular:

$$D(f, \varphi) \leqq D(f, \psi) + D(\varphi, \psi)$$

utilizamos fundamentalmente las siguientes relaciones inmediatas:

si es $\quad c(f) < c(\varphi) \quad$ es $\quad c(f - \varphi) = c(\varphi)$

y si es $\quad c(f) = c(\varphi) \quad$ es $\quad c(f - \varphi) = \leqq c(f)$.

Se pueden presentar los siguientes casos:

1°. $\qquad c(f) > c(\varphi) > c(\psi)$

2°. $\qquad c(f) > c(\varphi) = c(\psi)$

3°. $\qquad c(f) = c(\varphi) = c(\psi)$.

En el primer caso:

$$D(f, \varphi) = e^{c(f-\varphi)} = e^{c(f)}$$

$$D(f, \psi) = e^{c(f-\psi)} = e^{c(f)}$$

$$D(f, \psi) = e^{c(\varphi-\psi)} = e^{c(f)}$$

de donde resultan evidentemente las relaciones triangulares:

$$D(f, \varphi) \leqq D(f, \psi) + D(\varphi, \psi)$$

equivale a

$$e^{c(f)} \leqq e^{c(f)} + e^{c(\varphi)}$$

que es evidente;

$$D(f, \psi) \leqq D(f, \varphi) + D(\psi, \varphi)$$

equivale a

$$e^{c(f)} \leqq e^{c(f)} + e^{c(\varphi)}$$

que es evidente;

$$D(\varphi, \psi) \leqq D(\varphi, f) + D(\psi, \varphi)$$

equivale a

$$e^{c(\varphi)} \leqq e^{c(f)} + e^{c(f)}$$

que es evidente,

En el segundo caso se tiene

$$D(f, \varphi) = e^{c(f-\varphi)} = e^{c(f)}$$

$$D(f, \psi) = e^{c(f-\psi)} = e^{c(f)}$$

$$D(\varphi, \psi) = e^{c(\varphi-\psi)} \leqq e^{c(\varphi)} < e^{c(f)}$$

y es inmediato comprobar las relaciones triangulares de manera análoga al caso anterior.

Para el tercer caso observemos que siempre se verifica:

$$D(f, \varphi) = D$$

y la relación triangular puede expresarse en la forma:

$$D(f - \psi - [\varphi - \psi], 0) = D(f - \psi, 0) + D(\varphi - \psi, 0)$$

es decir, designando como antes $f - \psi = F, \varphi - \psi = \Phi$ resulta que la relación triangular general es equivalente a la siguiente:

$$D(F, \Phi) \leqq D(F, 0) + D(\Phi, 0).$$

Para demostrar esta consideramos dos casos:

1°. $\quad c(F) < c(\Phi)$

2°. $\quad c(F) = c(\Phi).$

El primer caso es un caso particular del 1°. o 2°. antes considerados, ya que $c(0) \leqq c(F)$.

El segundo caso es un caso particular del 2°. caso antes considerado, o bien se verifica $c(0) = c(F) = c(\Phi)$, en cuyo caso la relación triangular es evidente.

Se demuestran fácilmente teoremas análogos a los de los nos. 3 y 4.

BIBLIOGRAFIA

[1] Véase una exposición bibliográfica completa con algunas observaciones interesantes de L. VIGIL. *Sobre las series de Taylor prolongables y no prolongables* (Rev. Mat. Hisp. Americana, 1943).

]2[*Méthodes et problèmes de la théorie des fonctions*, Paris, 1922.

[3] *Zur Theorie der Taylorschen Reihen* (Sitz. der Münchener Academie, 1892).

[4] *Über die Potenzreihen deren Konvergenzkreis natürliche Grenze ist* (Acta Mathematica, t. 41).

[5] *Les fonctions prolongables* (C. R. t. 165, p. 669).

[6] *Über die Potenzreihen...* (Math. Zeits. t. 27).