

## UN REFINAMIENTO DEL MÉTODO DE CANNY USANDO MULTIRRESOLUCIÓN

DIANA MARCELA HERRERA (\*)  
MARLENY RINCÓN (\*\*)  
HUMBERTO SARRIA (\*\*\*)

---

RESUMEN. Presentamos un nuevo método que refina los resultados del conocido método de Canny [1] para la localización de bordes de una imagen. El método propuesto integra dos procedimientos; por un lado considera la variación del módulo del gradiente en cada pixel, no sólo en la dirección del gradiente como es tradicional en el método de Canny, sino también en la dirección ortogonal a éste. Por otro lado, haciendo uso de un refinamiento presentado en [16], mejoramos los resultados al aplicar el procedimiento a cada una de las distintas escalas generadas por un proceso de multirresolución de la imagen. El método se ha implementado mediante un novedoso algoritmo de tipo lifting que hace uso de procesos de interpolación a trozos mediante polinomios cúbicos, lo cual lo hace simple y eficiente.

PALABRAS CLAVES. Detección de bordes, multirresolución, levantamiento, interpolación de polinomio cúbico.

2000 MATHEMATICS SUBJECT CLASSIFICATION: 15-04, 15A99

---

(\*) Diana Marcela Herrera. E-mail: dmherreraq@unal.edu.co

(\*\*) Marleny Rincón L. E-mail: mrinconl@unal.edu.co

(\*\*\*) Humberto Sarria Z. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia. E-mail: hsarriaz@unal.edu.co

Este trabajo fue financiado por la División de Investigación, Sede Bogotá.

**ABSTRACT.** We present a new method for locating edges of an image, to refine the well known Canny method [1]. The proposed method integrates two procedures; on one hand it considers gradient module variation in each pixel, not only in the direction of the gradient as in Canny, but also in the orthogonal direction. On the other hand, we use a refinement presented in [16] to improve the edge detection results applying the procedure to each one of the different scales generated by multiresolution. The method has been implemented by a lifting algorithm that use piecewise cubic polynomial interpolation process to generate a simple and efficient algorithm.

**KEY WORDS AND PHRASES.** Edge detection, multiresolution, lifting, cubic polynomial interpolation

## 1. Introducción

La detección de bordes es una de las actividades más comunes y esenciales en el análisis de imágenes, dado que estos resumen y definen los objetos visuales [29][25]. En una imagen, un borde establece la frontera entre un objeto y el fondo, o entre objetos que se encuentran superpuestos; además, permite medir características como área, perímetro y textura [15] [20].

Formalmente, un borde corresponde al conjunto de puntos en una imagen en donde se presenta un cambio de intensidad entre pixeles vecinos (ver figura 1)[3][27]. Las aplicaciones de esta área de investigación pueden encontrarse: en

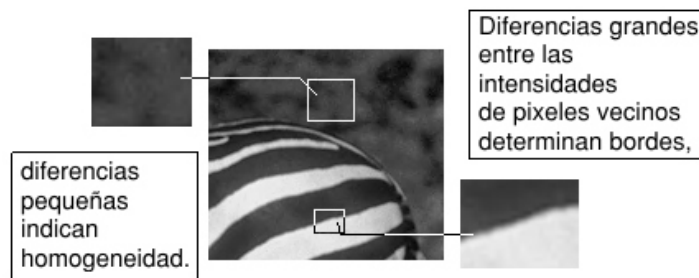


FIGURA 1. Visualización de los bordes de una imagen.

medicina para la detección de tumores, fracturas y textura de células; en visión robótica para la definición de objetos; en fotografía satelital para los estudios sobre deforestación y fenómenos atmosféricos; en investigaciones judiciales para determinar la morfología de rostros y huellas entre otros.

Los bordes de una imagen y el ruido adherido a ella, tienen algunas características comunes que hacen difícil su diferenciación; por ejemplo, ambos se presentan como una variación local de la intensidad de la luz; sin embargo, pueden diferenciarse parcialmente por el hecho de que mientras el ruido tiene un comportamiento aleatorio, los puntos que conforman un borde se presentan con un cierto orden[22].

Actualmente existe una enorme cantidad de estudios alrededor del tema[30]. La mayoría de métodos que permiten la localización de bordes, están basados en el cálculo de convoluciones con una máscara de derivadas direccionales; las más comunes son las de Roberts, Sobel, Prewitt, Kirsch, Frei-Chen y el operador laplaciano[20]; aunque los últimos desarrollos introducen análisis de multirresolución vía funciones wavelets[4], optimización, algoritmos adaptativos, geometría diferencial [10][11][29] [25] y clasificación de puntos de superficie mediante los valores propios del hessiano [8].

Un detector de bordes puede clasificarse según tres criterios de eficiencia:

- Minimización de la detección de falsos bordes y de la pérdida de los bordes reales.
- Minimización de la distancia entre un borde detectado y el borde real.
- Unicidad en la detección de bordes.

Canny[1] desarrolló en 1986, uno de los procedimientos más robustos y sensibles para el cálculo de bordes. El método diseñado aplica los siguientes pasos:

1. Filtrado de ruido usando un filtro de suavización de tipo gaussiano.
2. Localización de los bordes más sobresalientes de la imagen suavizada, haciendo uso de la magnitud del gradiente.
3. Refinamiento de los bordes detectados en el paso anterior usando umbrales superiores e inferiores que permitan acotar las magnitudes de las intensidades de los bordes, de tal manera que todo pixel con intensidad mayor que el umbral superior sea clasificado como borde y todo pixel localizado por debajo del umbral inferior no sea considerado como borde. En cuanto a la clasificación de un pixel localizado entre ambos umbrales, se considera que es parte de una borde si, y sólo si, es vecino de un pixel que hace parte de un borde.

Matemáticamente una imagen en tonalidades grises se discretiza como una matriz  $I = (I_{i,j})$  de tamaño  $m \times n$  en donde  $I_{i,j}$  es la intensidad de luz en el punto con coordenadas  $(i, j)$  [26].

Inicialmente el método suaviza la imagen mediante una convolución con un filtro gaussiano  $G$ , generando una nueva imagen  $\hat{I} = I * G$ . Para hacer el proceso de realce de bordes, Canny efectúa la convolución con dos operadores en

derivadas finitas  $S_x$  y  $S_y$  sobre  $\hat{I}$ :  $\Gamma_x = \hat{I} * S_x$  y  $\Gamma_y = \hat{I} * S_y$ ; el módulo del gradiente  $\Gamma = (\Gamma_x, \Gamma_y)$  determina la magnitud de la intensidad y su dirección  $\theta$  en cada punto de  $\hat{I}$ . La magnitud del operador gradiente puede calcularse vía la norma euclidiana  $\|\Gamma\|_2 = \sqrt{\Gamma_x^2 + \Gamma_y^2}$ , o la 1-norma  $\|\Gamma\|_1 = |\Gamma_x| + |\Gamma_y|$  [23].

En cada posición  $(i, j)$  de la imagen  $\hat{I}$ , se compara la magnitud de  $\Gamma(i, j)$  con la de sus vecinos  $\Gamma_L(i, j)$  y  $\Gamma_R(i, j)$  ambos tomados sobre la dirección del gradiente; así, si  $\|\Gamma(i, j)\| \not\geq \|\Gamma_L(i, j)\|$  o  $\|\Gamma(i, j)\| \not\geq \|\Gamma_R(i, j)\|$ , el punto  $(i, j)$  no es un punto de borde. De esta manera se genera una nueva matriz  $\tilde{I}$  en donde:

$$\tilde{I}(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|\Gamma(i, j)\| \not\geq \|\Gamma_L(i, j)\| \text{ o } \|\Gamma(i, j)\| \not\geq \|\Gamma_R(i, j)\| \\ \hat{I}(i, j) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El proceso anteriormente descrito se denomina cálculo de no máximos, pues efectivamente permite la eliminación de puntos en donde la intensidad no tiene un máximo local.

Con el fin de eliminar variaciones pequeñas de la intensidad, se efectúa sobre la imagen un filtrado vía umbrales, el cual permite discriminar puntos de borde de puntos de ruido, para tal fin denotemos mediante  $C_l$  y  $C_h$  las cotas superiores e inferiores, así

- Si  $\|\hat{\Gamma}(i, j)\| < C_l$  entonces  $\hat{\Gamma}(i, j) = 0$
- Si  $\|\hat{\Gamma}(i, j)\| > C_h$  entonces  $\hat{\Gamma}(i, j) = 1$
- Si  $C_l < \|\hat{\Gamma}(i, j)\| < C_h$  y si alguno de sus vecinos es punto de borde  $\hat{\Gamma}(i, j) = 1$ , de lo contrario  $\hat{\Gamma}(i, j) = 0$ .

## 2. El método propuesto

En esta sección hacemos una descripción del método propuesto. Los pasos a seguir los mostramos en el siguiente diagrama.

**2.1. Filtro gaussiano.** Los filtros gaussianos tienen como fin atenuar los sobresaltos esporádicos de las intensidades de la imagen que resultan de fenómenos físicos aleatorios; se espera que puntos que pertenezcan a una pequeña vecindad no varíen en sus intensidades. El filtro gaussiano calcula promedios ponderados de píxeles vecinos, disminuyendo el peso de la ponderación en la medida en que se aleja del píxel central sobre el cual se aplica el filtro. Así, si  $I(x, y)$  representa la intensidad de la imagen en el punto  $X = (x, y)$ , entonces el valor generado

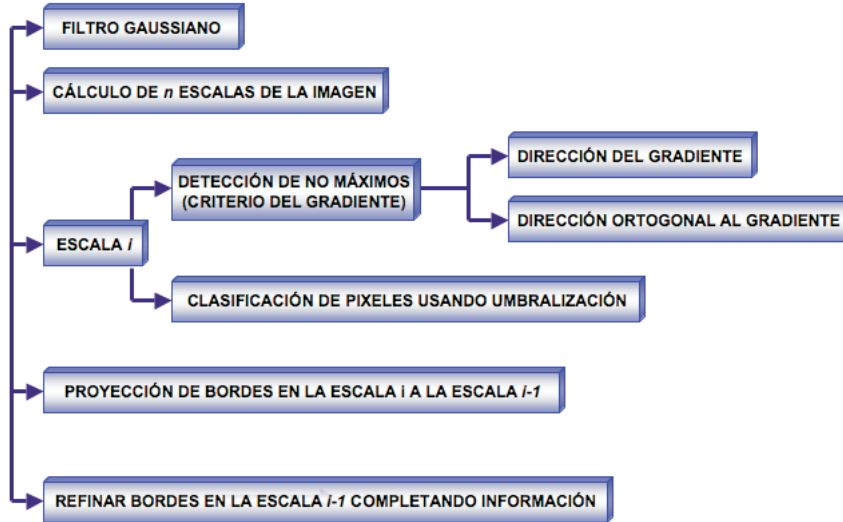


FIGURA 2. Método propuesto.

por la atenuación de la gaussiana en dicho punto puede calcularse como

$$(1) \quad \hat{I}(X) = \int_{\mathbb{R}^2} I(X)G(X - \xi)d\xi$$

donde

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

siendo  $\sigma$  el valor de la desviación estándar escogido por el usuario. Una discretización de (1), puede obtenerse mediante

$$\hat{I}(X) \approx \sum_{\xi \in N(X)} I(X)G(X - \xi),$$

donde  $N(X)$  representa una malla finita de puntos de  $\mathbb{R}^2$  ubicada en la vecindad de  $X$ .

**2.2. El cálculo de las escalas.** El cálculo de las  $r$  escalas (donde  $r$  es un valor dado por el usuario) puede llevarse a cabo mediante una descomposición vía Funciones Wavelet Discretas. La imagen inicial corresponde a la escala 1 y la denotaremos  $LL_1$  (figura 3), ésta se descompone en cuatro sub-bandas de escala y de detalles como se muestra en la figura 4; la sub-banda de escala corresponde a una matriz de integrales locales  $LL_2$ ; las sub-bandas de frecuencia son tres: la matriz de derivadas parciales en  $x$   $LH_2$ , la matriz de derivadas parciales en  $y$   $HL_2$  y la matriz de derivadas parciales mixtas  $HH_2$ . Cada una de estas cuatro



FIGURA 3. Imagen en escala 1.

matrices contendrá los coeficientes wavelet generados por el procedimiento. Para el cálculo de las escalas restantes seguimos un proceso recursivo; la sub-banda en la escala  $k > 1$ , se obtiene al aplicar el algoritmo de descomposición a la sub-banda  $LL_{k-1}$  (ver figura 5).

**2.3. Supresión de no máximos.** En esta sección planteamos un método que nos permite localizar los puntos en donde la intensidad de la imagen presenta máximos locales.

*2.3.1. El cálculo de la magnitud del gradiente.* El cálculo de la magnitud del gradiente  $G_k$  en la escala  $k$  puede efectuarse de varias maneras; por ejemplo como la suma de los cuadrados o de los módulos de los elementos de las matrices  $LH_k$  y  $HL_k$ . Pero también es posible calcular el gradiente vía la Transforma Wavelet Discreta Inversa usando las matrices de detalles  $LH_k$ ,  $HL_k$  y  $HH_k$ , y anulando la matriz de escala  $LL_k$  (ver [6]).

**Criterio del gradiente en la dirección del gradiente.** Este criterio hace parte del método de Canny; permite calcular los puntos donde la magnitud del gradiente se maximiza. Su aplicación, hace uso del teorema del gradiente del cálculo vectorial (ver [21]), según el cual, para cualquier punto  $(x, y)$  del plano, la dirección en la que se presenta la mayor variación de la intensidad de la imagen es precisamente la dirección del gradiente, en consecuencia, el punto  $(x, y)$



FIGURA 4. Sub-bandas de la escala 1.

es un posible punto de borde si los módulos de los gradientes, en los puntos vecinos en la dirección del gradiente, son menores que el módulo del gradiente en  $(x, y)$  (ver figura 6).

**Criterio del gradiente en la dirección ortogonal al gradiente.** Este segundo criterio, permite refinar la detección de bordes generada con el criterio anterior. El criterio marca un punto  $(x, y)$  como posible punto de borde, si la magnitud del gradiente en dicho punto, es mayor que la magnitud del gradiente en los puntos vecinos localizados en la dirección ortogonal al gradiente (ver figura 7).

Los puntos en donde se presenta un máximo local, son aquellos que satisfacen uno de los dos criterios anteriores. La figura 8 muestra únicamente los puntos de máximo local; los puntos de no máximo han sido eliminados mediante el criterio del gradiente.

**2.4. Umbralización de intensidades.** El proceso de umbralización funciona según lo descrito en el numeral (3) del método de Canny. En la figura 9 se muestran los resultados de aplicar umbrales a la imagen correspondiente a no máximos.

**2.5. Proyección y marcación de bordes.** Una idea interesante que surge al observar las escalas que genera el proceso de multirresolución, muestra que



FIGURA 5. Escala 4 en la esquina superior izquierda y las derivadas en cada iteración.

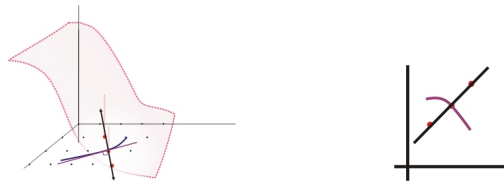


FIGURA 6. Criterio del gradiente en la dirección del gradiente.

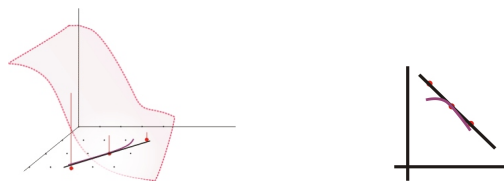


FIGURA 7. Criterio del gradiente en la dirección ortogonal al gradiente.

las escalas menores localizan con precisión los bordes aún cuando guardan ruido, mientras que las mayores eliminan el ruido, dispersan la localización de los



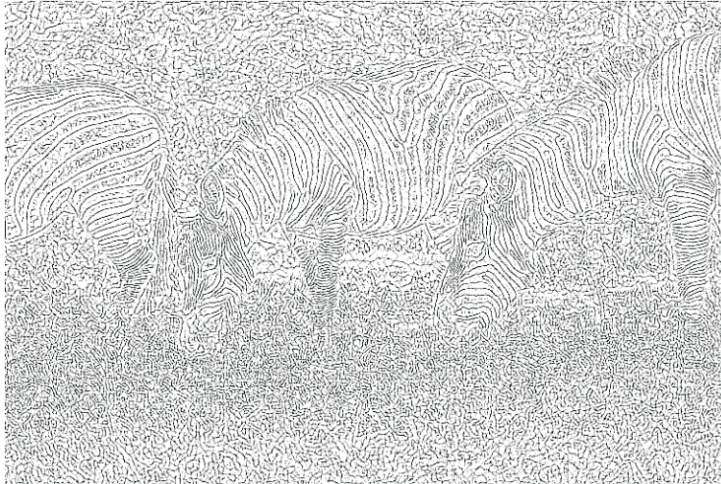


FIGURA 8. Supresión de no máximos con el método propuesto.



FIGURA 9. Bordes usando criterio del gradiente y umbralización.

puntos de borde pero mantienen una mayor conectividad entre los puntos de borde como se observa en la figura 10. Con el fin de implementar esta observación, proyectamos en forma piramidal (ver figura 11) los bordes encontrados en la escala  $k$  sobre la imagen de bordes en la escala  $k - 1$ , para posteriormente

a. Integral en las primeras seis iteraciones



b. Bordes en las primeras seis iteraciones



FIGURA 10. Primeras seis escalas.

refinar los bordes en la escala  $k - 1$  de acuerdo con el siguiente criterio de completación: si  $p_i^k$  y  $p_j^k$  son puntos vecinos en la escala  $k$  y  $P(p_i^k)$  y  $P(p_j^k)$  son sus proyecciones piramidales en la escala  $k - 1$ , entonces los puntos sobre el segmento de recta que une  $P(p_i^k)$  y  $P(p_j^k)$ , son marcados como puntos de borde sobre la escala  $k - 1$ , si y sólo si,  $p_i^k$  y  $p_j^k$  son puntos de borde sobre la escala  $k$ , y,  $P(p_i^k)$  y  $P(p_j^k)$  son puntos de borde sobre la escala  $k - 1$ . En la figura 12, podemos ver una comparación de resultados entre Canny y el método propuesto.



FIGURA 11. a. Proyección en línea. b. Proyección en diagonal.



FIGURA 12. a. Bordes Canny (arriba). b. Bordes método propuesto (abajo).

### 3. UNA IMPLEMENTACIÓN USANDO LIFTING

En su forma más básica, los procesos o esquemas *lifting* fueron desarrollados por Donoho [7] mediante el uso de interpolación promedio. En 1994 Lounsbery et al [9] proponen una generalización, que permite una construcción funciones wavelets a partir de una malla de datos no uniformemente particionada. Los

esquemas lifting también pueden definirse a partir de filtros de bancos como puede encontrarse en Vetterli y Herley [24] o mediante descomposición local como lo hacen Carnicer, Dahmen y Peña [2]. En las siguientes secciones explicaremos con mayor detalle el diseño de esquemas lifting. El lector interesado en información más amplia puede consultar [18].

**3.1. Lifting Haar.** Para facilitar la introducción al tema, presentaremos inicialmente el esquema lifting para la transformada wavelet Haar [13]. Supongamos que  $S_n = \{s_{n,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  es una colección ordenada de  $2^n$  datos y que cada uno de estos ha sido clasificado como “par” o “impar” dependiendo de si su posición es par o impar en la colección. Supongamos además que  $a$  y  $b$  son dos datos sucesivos en la colección, siendo  $a$  par y  $b$  impar. Ahora, al aplicar la transformada Haar a  $S_n$  obtenemos por cada par  $a, b \in S_n$  dos nuevos datos  $s$  y  $d$  dados por las igualdades

$$\begin{aligned} s &= \frac{a+b}{2} \\ d &= b-a. \end{aligned}$$

Una implementación del cálculo anterior requiere de la creación de dos espacios de memoria para guardar  $s$  y  $d$ , por cada par de datos  $a$  y  $b$ , lo cual conllevaría a un tiempo adicional de procesamiento. Sin embargo, puede disminuirse el espacio de memoria usado y por ende el tiempo de procesamiento, efectuando los siguientes pasos: inicialmente se calcula la diferencia

$$d = b - a$$

que se almacena en la variable  $b$ , de aquí el valor de  $s$  puede calcularse mediante

$$s = a + \frac{1}{2}b,$$

el cual se almacena en la variable  $a$ . Este cambio de operaciones permite implementar el cálculo sin la necesidad de crear dos nuevos espacios de memoria para  $s$  y  $d$ . Usando el lenguaje C, el procedimiento descrito puede llevarse a cabo mediante los comandos

$$(2) \quad b- = a;$$

$$(3) \quad a+ = \frac{1}{2}b;$$

Esta manera de efectuar el cálculo se denomina esquema lifting para la transformada wavelet Haar. Con el fin de formalizar lo anterior, hagamos  $S_{n-1} = \{s_{n-1,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  y  $D_{n-1} = \{d_{n-1,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ , donde estos conjuntos corresponden a las colecciones generadas al aplicar la transformada Haar a  $S_n$ ; es decir, sus términos pueden calcularse mediante las igualdades

$$s_{n-1,k} = \frac{s_{n,2k} + s_{n,2k+1}}{2}$$

$$d_{n-1,k} = s_{n,2k+1} - s_{n,2k}$$

o por

$$d_{n-1,k} = s_{n,2k+1} - s_{n,2k}$$

$$s_{n-1,k} = s_{n,k} + \frac{d_{n-1,k}}{2}$$

donde  $0 \leq k \leq 2^{n-1} - 1$ . Este procedimiento se aplica posteriormente a  $S_{n-1}$  con el fin de generar las colecciones  $S_{n-2}$  y  $D_{n-2}$ . Se continúa así sucesivamente hasta llegar a  $S_0$  y  $D_0$ . El esquema de cálculo para la Transformada Haar se puede observar en la figura 13.

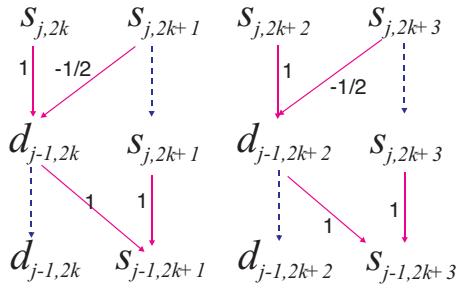


FIGURA 13. Proceso Lifting con Wavelet Haar.

Podemos resumir el esquema lifting en este caso de la siguiente manera:

1. Se clasifican los elementos de  $S_n$  en dos subconjuntos; “pares” e “impares”. Este proceso lo llamaremos de *partición (split)*, y lo denotaremos con  $Sp$ .
2. Se efectúa el cálculo de los elementos de  $D_{n-1}$ , lo cual se denomina *predicción (predict)* y lo denotaremos con  $P$ .
3. Se efectúa el cálculo de los elementos de  $S_{n-1}$ , que llamaremos de *actualización (update)* y lo denotaremos con  $U$ .

El esquema lifting para la Transformada Haar puede verse en la figura 14.

**3.2. Una generalización de lifting.** En esta sección se explicará el esquema lifting introducido en la sección anterior con mayor generalidad.

1. El proceso de *partición* de  $S_n$  clasifica sus elementos en una colección finita de subconjuntos  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k$ .

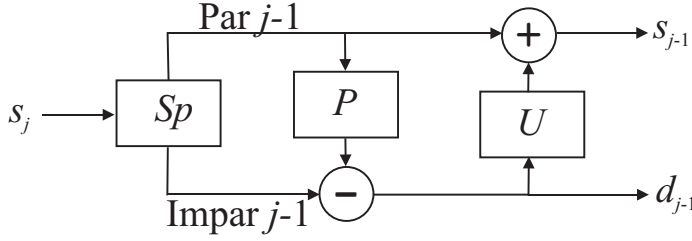


FIGURA 14. Esquema Lifting con Wavelet Haar.

2. El proceso de *predicción-actualización* permite el cálculo de los elementos de  $D_{n-1}$  y  $S_{n-1}$ , y puede llevarse a cabo en un número finito de etapas  $PU_1, \dots, PU_r$ .

En la figura15 se muestra el esquema lifting generalizado.

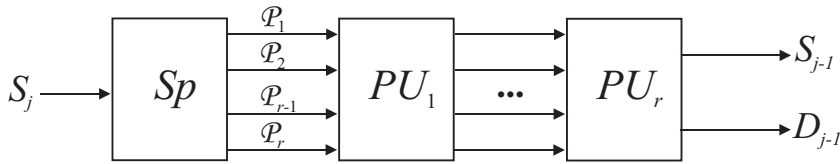


FIGURA 15. Esquema Lifting con Wavelet Haar.

**3.3. Lifting con cúbicas.** A continuación desarrollaremos algunos esquemas tipos lifting que hacen uso de interpolación por tramos con polinomios cúbicos.

El procedimiento lo desglosamos en los siguientes literales:

- (a): Consideremos una colección de datos  $S_n = \{s_{n,i}\}_{i=0}^{2^n-1}$ . Ahora efectuamos la interpolación por tramos sobre los puntos  $(k, s_{n,k})$ ,  $(k+1, s_{n,k+1})$ ,  $(k+2, s_{n,k+2})$ , y  $(k+3, s_{n,k+3})$  donde  $k = 0, \dots, (2^n - 1)/4$ . El polinomio cúbico que interpola estos puntos es

$$p_{n,k}(x) = a_{n,k}x^3 + b_{n,k}x^2 + c_{n,k}x + d_{n,k}$$

: donde

$$\begin{bmatrix} a_{n,k} \\ b_{n,k} \\ c_{n,k} \\ d_{n,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 1 & -\frac{5}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{11}{6} & 3 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{n,k} \\ s_{n,k+1} \\ s_{n,k+2} \\ s_{n,k+3} \end{bmatrix}.$$

(b): Con el fin de obtener los datos de las colecciones  $S_{n-1} = \{s_{n-1,i}\}_{i=0}^{2^{n-1}-1}$  y  $D_{n-1} = \{d_{n-1,i}\}_{i=0}^{2^{n-1}-1}$ , calculamos los valores de las integrales en la primera y segunda mitad del intervalo  $[k, k+3]$  para cada  $k = 0, \dots, (2^n - 1)/4$  en términos de los datos de  $S_n$ ; estos están dados por

$$\begin{aligned} s_{n-1,k} &= \frac{1}{64} (15s_{n,k} + 51s_{n,k+1} - 3s_{n,k+2} + s_{n,k+3}) \\ s_{n-1,k+1} &= \frac{1}{64} (s_{n,k} - 3s_{n,k+1} + 51s_{n,k+2} + 15s_{n,k+3}) \end{aligned}$$

respectivamente. Las derivadas en los puntos con abscisas  $k+1$  y  $k+2$ , son

$$\begin{aligned} d_{n-1,k} &= \frac{1}{6} (-2s_{n,k} - 3s_{n,k+1} + 6s_{n,k+2} - s_{n,k+3}) \\ d_{n-1,k+1} &= \frac{1}{6} (s_{n,k} - 6s_{n,k+1} + 3s_{n,k+2} + 2s_{n,k+3}) \end{aligned}$$

respectivamente. En forma matricial tenemos que

$$(4) \quad \begin{bmatrix} s_{n-1,k} \\ s_{n-1,k+1} \\ d_{n-1,k} \\ d_{n-1,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15}{64} & \frac{51}{64} & -\frac{3}{64} & \frac{1}{64} \\ \frac{1}{64} & -\frac{3}{64} & \frac{51}{64} & \frac{15}{64} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{n,k} \\ s_{n,k+1} \\ s_{n,k+2} \\ s_{n,k+3} \end{bmatrix}$$

(c): La anterior igualdad puede expresarse en términos de la factorización LU de la matriz del sistema como

$$\begin{bmatrix} s_{n-1,k} \\ s_{n-1,k+1} \\ d_{n-1,k} \\ d_{n-1,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{15} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{64}{45} & -\frac{19}{3} & 1 & 0 \\ \frac{32}{45} & \frac{47}{3} & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{15}{64} & \frac{51}{64} & -\frac{3}{64} & \frac{1}{64} \\ 0 & -\frac{1}{10} & \frac{4}{5} & \frac{7}{30} \\ 0 & 0 & 6 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{n,k} \\ s_{n,k+1} \\ s_{n,k+2} \\ s_{n,k+3} \end{bmatrix}.$$

Esta última expresión permite encontrar con mayor facilidad el esquema lifting asociado al sistema lineal (4). Este esquema (ver figura 16) requiere un total de 28 operaciones; sin embargo, es posible diseñar un esquema que requiere de 26 operaciones como se muestra en la figura 17.

(d): El proceso anterior puede repetirse recursivamente sobre las colecciones  $S_{n-1}, \dots, S_1$ .

**Observación:** El sistema lineal (4) es invertible, y en consecuencia podemos reconstruir la colección  $S_k$  a partir de las colecciones  $S_{k-1}$  y  $D_{k-1}$ .

$$\begin{bmatrix} s_{n,k} \\ s_{n,k+1} \\ s_{n,k+2} \\ s_{n,k+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{3}{2} & 3 \\ \frac{1}{18} & \frac{17}{18} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{6} \\ \frac{17}{18} & \frac{1}{18} & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{7}{2} & \frac{9}{2} & -3 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{n-1,k} \\ s_{n-1,k+1} \\ d_{n-1,k} \\ d_{n-1,k+1} \end{bmatrix}$$

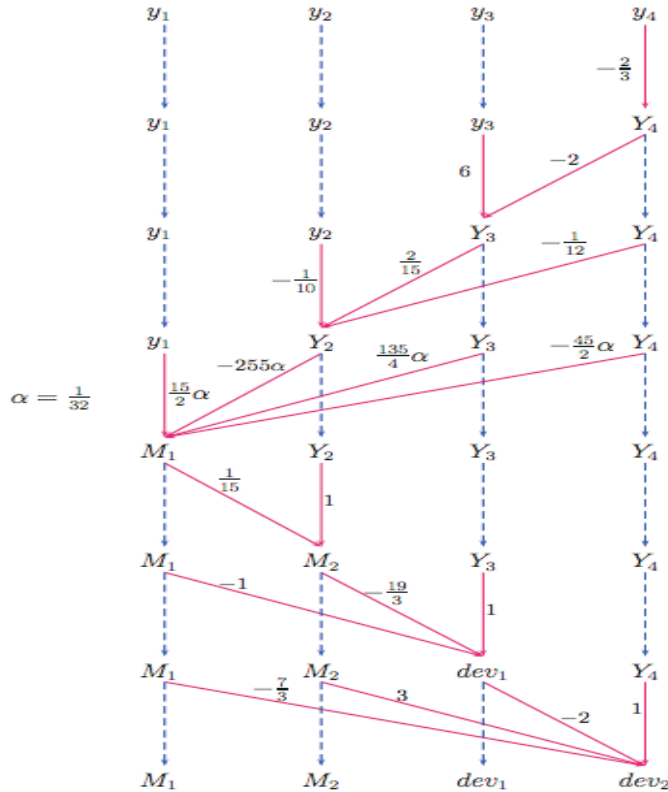


FIGURA 16. Lifting usando factorización LU.

**3.4. El cálculo de las sub-bandas.** Presentamos a continuación, el procedimiento que se ha seguido para el cálculo de las sub-bandas  $LL_{k-1}$ ,  $LH_{k-1}$ ,  $HL_{k-1}$  y  $HH_{k-1}$  mediante funciones wavelet. Las sub-bandas pueden obtenerse al pasar en la dirección vertical sobre cada fila de la escala  $LL_k$  el esquema lifting descrito en el párrafo anterior; usando tres escalas se obtiene la figura 18. Luego, sobre esta última figura se pasa el esquema sobre cada columna, obteniéndose la figura 4. De esta manera sobre la banda  $LL_{k-1}$  quedarán localizados los coeficientes de escala que corresponden a las integrales locales; la banda  $HL_{k-1}$  contiene los coeficientes asociados con la derivada parcial en  $x$ , la subbanda  $LH_{k-1}$  los coeficientes de la derivada parcial en  $y$  y la sub-banda  $HH_{k-1}$  que contiene los coeficientes de las derivadas mixtas.



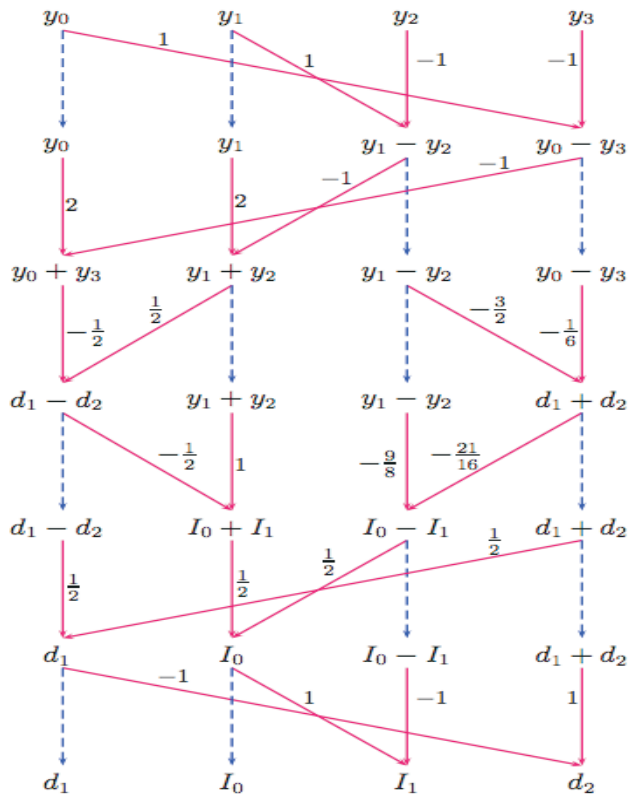


FIGURA 17. Lifting con 26 operaciones.

#### 4. CONCLUSIONES

El uso del criterio del gradiente en la dirección ortogonal a éste y el análisis de multiresolución, efectivamente ayudan a mejorar la conectividad entre puntos de borde. Se pueden usar filtros bilaterales (ver [22]) a cambio de filtros gaussianos y aún cuando los primeros permiten una mejor localización de los bordes, dejan pasar el ruido precisamente en la vecindad de estos, lo cual genera imágenes de no muy buena calidad.

Salvo las imágenes obtenidas por el método de Canny, todas las demás han sido obtenidas usando esquemas lifting diseñados a partir de cúbicas tal como se explica en la sección anterior, esto ha permitido un cálculo simple y eficiente. Sin embargo, dada la discontinuidad que presenta el proceso de interpolación

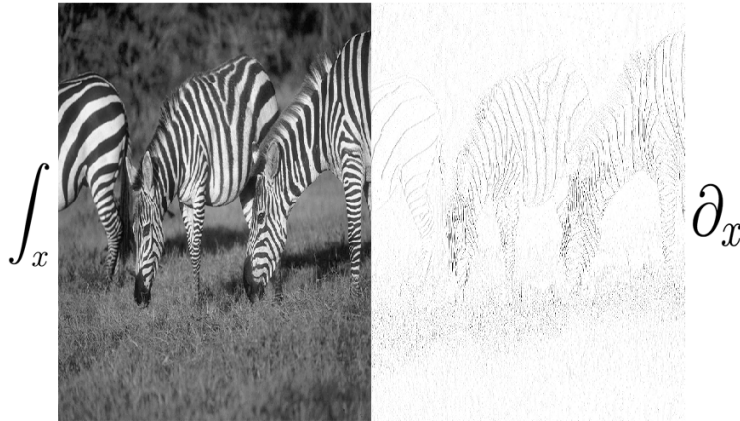


FIGURA 18. Aplicación lifting horizontal.

por partes con cúbicas, quizás sea posible mejorar los resultados usando, por ejemplo, esquemas lifting tipo spline o algún otro tipo de funciones wavelets.

#### REFERENCIAS

- [1] Canny. J.F. *A computational approach to edge detection*. IEEE Transactions Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 8, No. 6. pp. 679-698. 1986.
- [2] Carnicer, J. M. et al. *Local Decomposition of Refinable Spaces and Wavelets*. Applied and Computational Harmonic Analysis. Vol. 3, No 2. pp. 127-153. 1996.
- [3] Chidiac H, Ziou D. *Classification of Image Edges*. 12th International Conference on Vision Interface, pp. 17-24. May 1999.
- [4] Christov, I. *Multiscale Image Edge Detection* Final Project 18.327/1.130 has been published through MIT. May 12, 2004.
- [5] De Vega, A. *Extracción de bordes* Department of Computer Science of the Faculty of Informatics of the University of Corua. Curso 2002-2003
- [6] Deslauriers, G., Dubuc. S. *Symmetric iterative interpolation processes*. Constructive Approximation. Vol. 5. pp.49-68. 1989.
- [7] Donoho, D.L. *Interpolating Wavelet Transforms*. Technical Report, Department of Statistics, Stanford University. 1992.
- [8] Hladuvka, J. et al. *Exploiting Eigenvalues of the Hessian Matrix for Volume Decimation*. Winter School of Computer Graphics. pp. 124-129. 2001.
- [9] Lounsbery, M *Multiresolution surfaces of arbitrary topological type*. ACM Transactions on Graphics. Vol. 16 , Issue 1. pp. 34-73. 1997.
- [10] Mallat, S. *Multifrequency channel descompositions of images and wavelets models*. IEEE Transactions on Acoustic, Speech, and Signal Processing. Vol. 37, No. 12. 1989.
- [11] Mallat, S., Hwang, W. L. *Singularity Detection and Processing with Wavelets*. IEEE Transactions on Information Theory. Vol. 38, No 2. 1992.

- [12] Mallat, S., Zhong, S. *Characterization of Signals from Multiscale Edges*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. Vol. 14, No.7. 1992.
- [13] Nievergelt Y. *Wavelets Made Easy*. Birkhäuser, Boston 1999.
- [14] Porta, P. *Fotografía e Imaxe Dixital*. Editorial LEA. 2003.
- [15] Shen, J. Castan, S. *An Optimal Linear Operator for Step Edge Detection*. Computer Vision, Graphics, and Image Processing: Graphical Models and Understanding. Vol. 54, No. 2. pp. 112-133. 1992.
- [16] Shih M.-Y., Tseng D.-C.. *A wavelet-based multiresolution edge detection and tracking*. Image Vision Computing, Vol. 23, No. 4. pp. 441-451. 2005.
- [17] Sweldens, W., *The lifting scheme: a construction of second generation wavelets*. SIAM Journal on Mathematical Analysis. Vol.29, issue 2. pp. 511-546. 1998.
- [18] Sweldens, W. Schröder, P. *Building your own wavelets at home*. Wavelets in the Geosciences. Lecture Notes in Earth Sciences, Vol. 90. pp. 72-107. 2000.
- [19] Sze, C.-J., et al. *Multiscale Edge Detection on Range Images via Normal Changes*. IEEE Transactions on Circuits and Systems II, Special issue on Multirate Systems, Filter Banks, Wavelets, and Applications. Vol. 45. No 8. pp. 1087-1092. 1998.
- [20] Tang, Y.Y. et al, *Characterization of Dirac-Structure Edges with Wavelet Transform* IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B. Vol. 30, Issue 1. pp. 93-109. 2000.
- [21] Thomas G. *Cálculo en una Variable* Ed. Addison Wesley Vol. 2, Undécima Edición, pp. 1012-1014. 2005.
- [22] Tomasi, C., Manduchi, R. *Bilateral Filtering for Gray and Color Images*. Sixth International Conference on Computer Vision. pp. 839-846. 1998.
- [23] Trucco, E., Verri. A. *Introductory Techniques for 3-D Computer Vision*. Ed. Prentice Hall, cap. 4. 1998.
- [24] Vetterli, M., Herley, C. *Wavelets and lter banks: theory and design*. IEEE Transactions in Signal Processing. Vol 40. pp. 2207-2232. 1992.
- [25] Wu Y. et al. *Optimal threshold selection algorithm in edge detection based on wavelet transform* Image Vision Computing. Vol. 23, Issue 13. pp. 1159-1169. 2005.
- [26] <http://www.educa.madrid.org/web/cap.hortaleza/Cursofoto/generalidades.htm>
- [27] Ziou D., Tabbone S. *Edge Detection Techniques - An Overview*. International Journal of Pattern Recognition and Image Analysis, Vol. 8, No. 4. pp. 537-559, Dec 1998.
- [28] Zazula, D., Dušan, H. *Combined edge detection using wavelet transform and signal registration* Image and Vision Computing. Vol. 25, Issue 5. pp. 652-662. 2007.
- [29] Zhang, L., Bao, P. *Edge detection by scale multiplication in wavelet domain* Pattern Recognition Letters. vol. 23. pp. 1771-1784. 2002.
- [30] [en.wikipedia.org/wiki/Edgedetection](http://en.wikipedia.org/wiki/Edgedetection)

RECIBIDO: Octubre de 2007. ACEPTADO PARA PUBLICACIÓN: Septiembre de 2008