Provincia de Buenos Aires
Dirección General de Cultura y Educación
INSTITUTO SUPERIOR "FUNDACIÓN SUZUKI"
San Miguel – Buenos Aires- Argentina.

CÓNICAS… POR SIEMPRE CÓNICAS!

Un lugar geométrico

Tesina para optar al Título de Profesor de Matemática

CASANOVA, Graciela Monica

San Miguel, Buenos Aires
Marzo 2009

ÍNDICE GENERAL

Págs.

RESUMEN

Respecto al abordaje de los contenidos matemáticos; como una actividad de reflexión de la práctica docente; como una propuesta de enseñanza – aprendizaje; como un acercamiento a las cónicas desde una forma poco usada en los libros de texto.

El presente trabajo pretende brindarle un abanico de alternativas donde se vaya apropiando de la noción de cónica.

La experiencia que podemos compartir va en diversos sentidos:

Primero se puede rescatar la riqueza del trabajo colaborativo que posibilita el aprendizaje entre iguales.

El mismo trabajo colaborativo permite desarrollar las habilidades de comunicación matemática.

La actividad de "tener que hacer" alguna modelación utilizando elementos poco comunes en una clase de matemáticas permite en el alumno: comprensión de la noción matemática y potenciar su creatividad.

Las diversas actividades son un acercamiento paulatino a las cónicas posibilitando: identificar su forma, reconocerlas como envolventes de tangentes, identificar el ¿Por qué se les llama cónicas?, la construcción de las cónicas mediante regla y compás, hasta lograr identificar los elementos de cada una e implementar el uso sistemático, consciente y planificado de la computadora como auxiliar didáctico; herramienta que permite que los alumnos puedan visualizar, explicar y formalizar el comportamiento gráfico y analítico de las Cónicas.

Consideramos también, de suma importancia, que el estudiante capte de su entorno, de la ciencia, tecnología, arquitectura y recreación el uso y aplicación de las cónicas.

ABSTRACT

Regarding the approach to the mathematical content, as a reflection of teaching practice, as a teaching - learning as an approach to conics from a little used in textbooks.

This paper aims to provide a range of alternatives which will be appropriating the notion of conic.

The experience is that we can share a variety of ways: First you can recover the richness of the collaborative work that enables peer-learning.

This collaborative work to develop communication skills mathematics.

The activity of "having to do some modeling using unusual elements in a math class allows the student understanding of mathematical concept and enhance their creativity.

The various activities are a gradual approach to conics allowing identifying its recognized as envelopes tangents, identify why they are called conics?, The construction of conics by rule and compass to identify the elements of each and implement a systematic, planned and conscious of the computer as a teaching assistant, a tool that allows students to visualize, explain and formalize the behavior of graphical and analytical conics.

We also of utmost importance that the student will pick their environment, science, technology, architecture and recreation use and application of conics.

DESCRIPTORES

- ***Concepto matemático***
- ***Abstracción***
- ***Análisis***
- ***Dispositivos***

INTRODUCCIÓN

En el transcurso de mis estudios he observado que la importancia fundamental de las cónicas radica en su constante aparición en situaciones reales.

Por otro lado lo complejo que resulta entenderlas desde los conceptos matemáticos solamente o de un gráfico, situándolas tan lejos de la realidad.

En el presente trabajo he realizado una específica investigación integrando distintas perspectivas en base a los contenidos matemáticos propuestos.

Respecto a la enseñanza de este tema he visualizado las variadas aplicaciones presentadas por los profesores, considerando, que los alumnos deben saber de la existencia de diversos caminos para llegar al concepto matemático y específico. Fortaleciendo como eje principal la construcción del conocimiento por parte del alumno desde la integración enseñanza-aprendizaje.

Siendo el objetivo principal mostrar una secuencia de criterios que sirvan para su entendimiento, cómo es su historia, sus fórmulas, sus gráficos, sus aplicaciones en la vida cotidiana.

FUNDAMENTACIÓN

Así como actualmente la ciencia tiene una fuerte y preponderante componente utilitaria, la curiosidad científica entre los griegos fue impulsada, fundamentalmente, por una influencia contemplativa y estética.

Las cónicas fueron para ellos un juego intelectual, un objeto de contemplación, como una música del pensamiento que, con su variedad y armonía, absorbieron durante siglos su capacidad de contemplación matemática. Este espíritu les llevó a desvelar una gran cantidad de propiedades que entraron en su matemática sin otra finalidad que la de satisfacer su sentido estético intelectual.

Este saber quedó almacenado durante más de quince siglos, pero, puesto que era un conocimiento tan fuertemente ligado a objetos y fenómenos corrientes, era natural que, al fin, cuando el hombre llegó a interesarse desde otros puntos de vista por tales fenómenos, encontrarse multitud de aplicaciones.

Las cónicas, en efecto, derivan de modo espontáneo del círculo omnipresente en la naturaleza. Allí donde hay un círculo, basta mirarlo oblicuamente para que aparezca la elipse.

Con el correr de los siglos, al cambiar la geometría sus modos de consideración, la teoría de las cónicas adquirió una nueva unidad más profunda.

Para la *geometría analítica*, cualquier cónica es representable mediante una ecuación de segundo grado del tipo:

$$\mathbf{Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0}$$

eligiendo adecuadamente los coeficientes.

Para la *geometría proyectiva*, cualquier cónica se puede obtener a partir de una circunferencia mediante una proyección desde un punto del espacio seguida por la sección por un plano.

Por tales consideraciones comenzó a desarrollarse la moderna *geometría algebraica*, que tiene, en la actualidad, multitud de ramificaciones en campos tan aparentemente alejados como la teoría de números. Fue en particular el llamativo

resultado siguiente uno de los estímulos importantes de desarrollo del tipo de geometría.

Una cónica puede considerarse como el resultado de cortar una superficie cónica con un plano; o como el lugar geométrico de los puntos del plano tal que la razón de sus distancias a un punto y a una recta es constante; o bien puede darse de ella una definición específica.

Teniendo en cuenta lo dicho anteriormente nosotros hemos realizado la presente investigación porque hemos observado que los métodos y formas de trabajo habituales y las herramientas que actualmente usa el docente, no son lo suficientemente consistentes para lograr que los alumnos se apropien del conocimiento de una manera significativa, para ello se requiere de la utilización de nuevas y variadas formas de enseñanza.

SUPUESTOS

- Al tener el tema elegido, supongo que me voy a encontrar con una amplia ramificación de conceptos.

- Suponemos que la información recaudada va a ser muy variada.

LIMITACIONES

- Una de las mayores limitaciones de la investigación, es al sector educativo al cual se apunta teniendo en cuenta el nivel de aprendizaje.

Marco histórico

La obra matemática de Apolonio

El otro gran griego que pertenece al periodo clásico en los dos sentidos de resumir y prolongar el tipo de matemática producido en ese período es Apolonio (c. 262-190 a. C). Nació en Perga, ciudad situada en el noroeste de Asia Menor, que durante su vida estaba sujeta al dominio de Pérgamo. Se trasladó a Alejandría cuando todavía era joven, y aprendió matemáticas con los sucesores de Euclides. Por lo que sabemos, permaneció en Alejandría colaborando con los grandes matemáticos que allí trabajaban. Su obra maestra es el tratado sobre las cónicas, pero también escribió sobre otros temas. Su capacidad matemática era tan extraordinaria que llegó a ser conocido en vida, y más tarde, como "el Gran Geómetra". También fue grande su reputación como astrónomo.

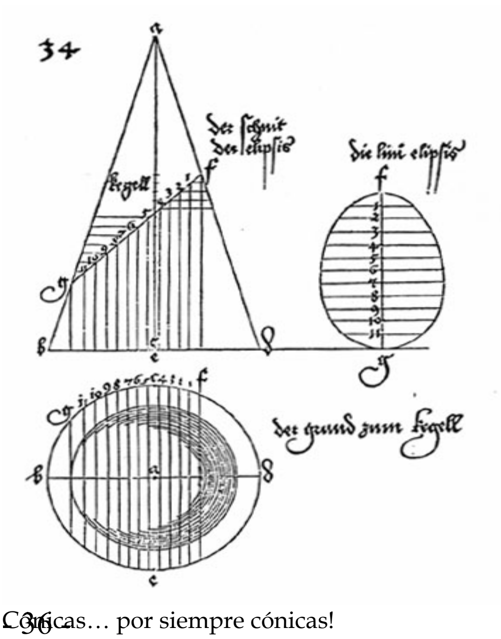
Las secciones cónicas fueron estudiadas mucho antes de Apolonio. Concretamente, Aristeo el Viejo y Euclides habían escrito obras sobre ellas. También Arquímedes presentó algunos resultados sobre este tema.

Fue Apolonio quién lo pulió, despojándolo de irrelevancias y le dio forma sistemática. Además de sus méritos totalizadores, las *Secciones Cónicas* contienen material altamente original, y son ingeniosas, extremadamente hábiles, y están excelentemente organizadas. Se trata de una realización tan monumental que cerró prácticamente el tema para los pensadores posteriores, al menos desde el punto de vista puramente geométrico. Puede considerarse verdaderamente como culminación de la geometría griega clásica.

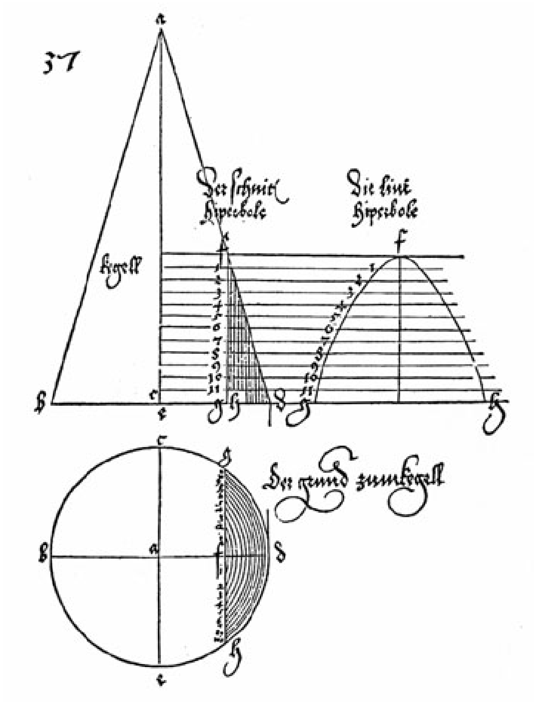
Las Secciones Cónicas constan de ocho libros que contienen 487 proposiciones. De ellos se conservan los cuatro primeros reproducidos en manuscritos griegos de los siglos XII y XIII, y los tres siguientes en una traducción al árabe escrita en 1290. El octavo se ha perdido aunque en el siglo XVII Halley llevó a cabo una reconstrucción basándose en las indicaciones de Pappus.

Los predecesores de Euclides, éste mismo, y Arquímedes, trataron las secciones cónicas en relación con los tres tipos de conos circulares rectos, como habían sido introducidas por el platónico Menecmo. Tanto Euclides como Arquímedes, sin embargo, sabían que la elipse también puede obtenerse como sección de los otros dos tipos de conos circulares oblicuos mediante planos que corten a todas las generatrices son elipses. Probablemente se dio cuenta de que las otras secciones cónicas pueden obtenerse a partir de conos circulares oblicuos.

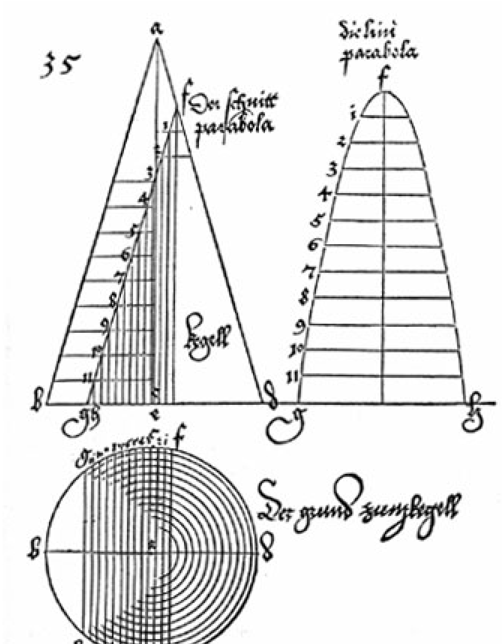
Fue Apolonio, sin embargo, el primero en basar la teoría de las tres cónicas en secciones de un mismo cono circular, recto u oblicuo, y en dar cuenta de las dos ramas de la hipérbola. Se aduce como una de las razones para que Menecmo y otros predecesores de Apolonio utilizaran planos perpendiculares a una de las generatrices de los tres tipos de cono circular recto, no que no vieran que pueden obtenerse otras secciones de esos conos, sino que deseaban estudiar el problema inverso. Dadas ciertas curvas cuyas propiedades geométricas sean de las secciones cónicas, la demostración de que esas curvas se pueden obtener como secciones de un cono es más fácil cuando el plano con el que se corta al cono es perpendicular a una generatriz.



Las elipses son las curvas que se forman cortando un cono con un plano que solo toca uno de los mantos del cono y no es paralelo a una de sus aristas.



Las hipérbolas son las curvas que se forman al cortar un cono con un plano que toca los dos mantos del cono.



Las parábolas son las curvas que se forman al cortar un cono con un plano paralelo a una de sus aristas.

Apolonio demostró que las curvas cónicas tienen muchas propiedades interesantes. Algunas de esas propiedades son las que se utilizan actualmente para definirlas.

Quizás las propiedades más interesantes y útiles que descubrió Apolonio de las cónicas son las llamadas ***propiedades de reflexión***. Si se construyen espejos con la forma de una curva cónica que gira alrededor de su eje, se obtienen los llamados espejos elípticos, parabólicos o hiperbólicos, según la curva que gira.

Apolonio demostró que si se coloca una fuente de luz en el foco de un espejo elíptico, entonces la luz reflejada en el espejo se concentra en el otro foco. Si se recibe luz de una fuente lejana con un espejo parabólico de manera que los rayos incidentes son paralelos al eje del espejo, entonces la luz reflejada por el espejo se concentra en el foco.

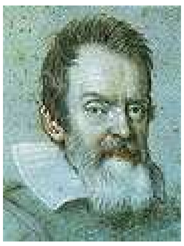
Esta propiedad permite encender un papel si se coloca en el foco de un espejo parabólico y el eje del espejo se apunta hacia el sol.

Existe la leyenda de que Arquímedes (287-212 A.C.) logró incendiar las naves romanas durante la defensa de Siracusa usando las propiedades de los espejos parabólicos. En el caso de los espejos hiperbólicos, la luz proveniente de uno de los focos se refleja como si viniera del otro foco.

En el siglo XVI el filósofo y matemático **René Descartes** (1596-1650) desarrolló un método para relacionar las curvas con ecuaciones. Este método es la llamada Geometría Analítica.

En la Geometría Analítica las curvas cónicas se pueden representar por ecuaciones de segundo grado en las variables x e y.

Quizás el resultado más sorprendente de la Geometría Analítica es que todas las ecuaciones de segundo grado en dos variables representan secciones cónicas.



Galileo Galilei (1564-1642), estudiando el movimiento de un proyectil, con una componente horizontal uniforme y una vertical uniformemente acelerada, llegó a la conclusión que dicha trayectoria, despreciando la resistencia del aire, es una **parábola**.

Galileo cambió el concepto que durante la Edad Media, se tenía sobre la trayectoria de un proyectil.

$$y = -\frac{g}{2v^2}(1 + tag^2\alpha)x^2 + x\ tag(\alpha)$$

siendo **g** la gravedad, **v** la velocidad inicial de la bala y **alfa** la inclinación del tiro. Galileo estableció a partir de la expresión anterior la inclinación para alcanzar la máxima distancia (x).

El astrónomo alemán Johannes Kepler (1570-1630) descubrió que las órbitas de los planetas alrededor del sol son elipses que tienen al sol como uno de sus focos.

Más tarde el célebre matemátco y físico inglés **Isaac Newton** (1642-1727) demostró que la órbita de un cuerpo alrededor de una fuerza de tipo gravitatorio es siempre una curva cónica.

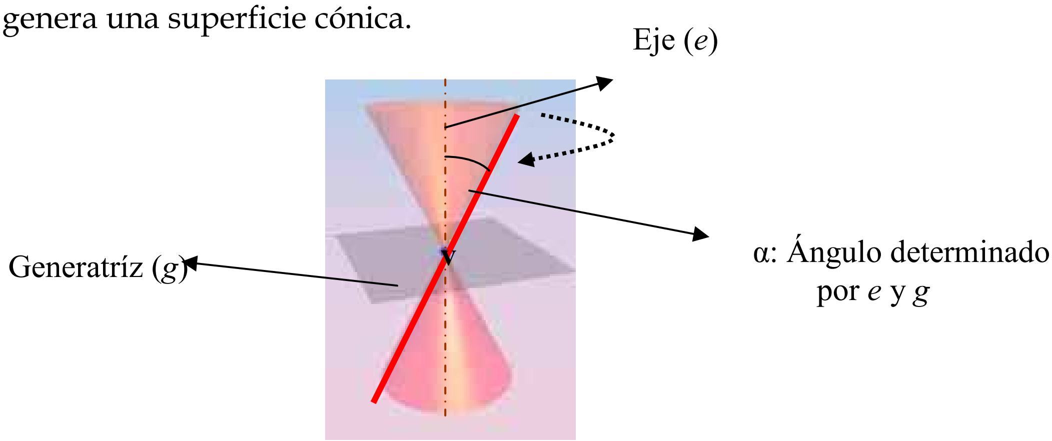
El concepto de cónica aparece no sólo en las trayectorias de planetas y proyectiles, sino también en trayectorias de partículas atómicas elementales.

La ley de los gases perfectos enunciada por el físico irlandés **Robert Boile** (1627-1691) dice: "A temperatura constante el producto P V = k". Una hipérbola equilátera.

Marco teórico

SECCIONES CÓNICAS

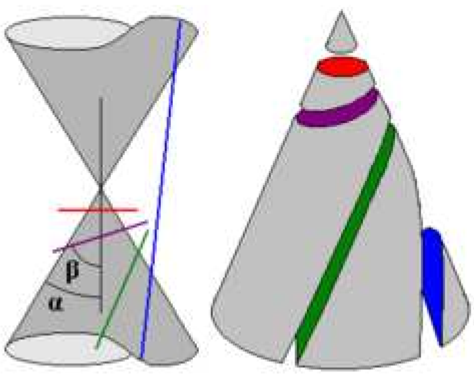
Una recta que gira alrededor de otra recta, con la cual se corta en un punto fijo, genera una superficie cónica.



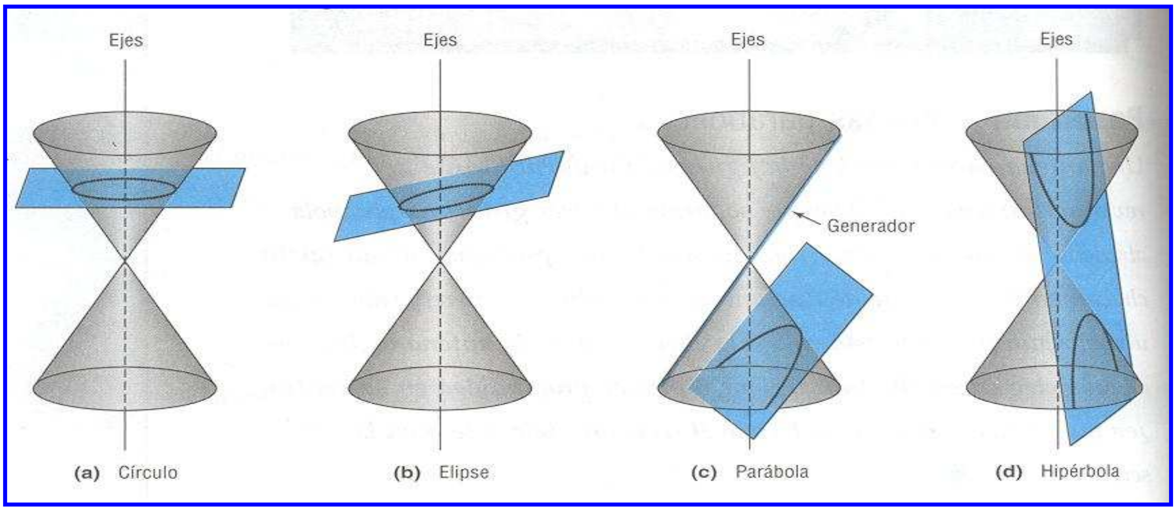
La superficie cónica circular recta de la figura es generada por la recta **g** (generatriz) que gira alrededor de la recta **e** (eje). El punto **v**, en el que se intersecan ambas rectas, es el vértice de la superficie cónica

Las secciones cónicas son curvas que resultan de la intersección de un plano (plano secante) con una superficie cónica circular recta. Éste plano determina un ángulo β con el eje.

Una sección cónica, es la curva de intersección de un plano con un cono circular recto.



Existen tres tipos de curvas que se obtienen de esta manera: **La parábola, la elipse incluyendo la circunferencia como un caso especial) y la hipérbola.**



Con algunas posiciones del plano se obtienen ***cónicas degradadas*** (o ***degeneradas***).

Por ejemplo, si el plano corta al cono solamente en el vértice (fig a) , entonces la cónica consta de un solo punto.

Si el plano contiene al eje del cono, se obtiene un par de rectas que se intersectan (fig. b). Finalmente, moviendo el plano paralelamente a la posición inicial puede llegarse a una posición en la cual el cono tiene solamente una recta en común con el plano (fig. c)

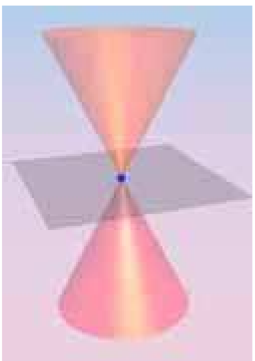


Fig. a

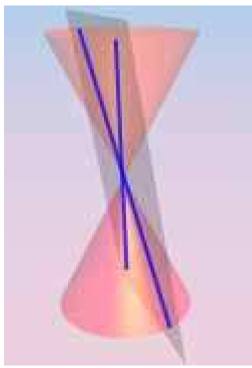


Fig. b

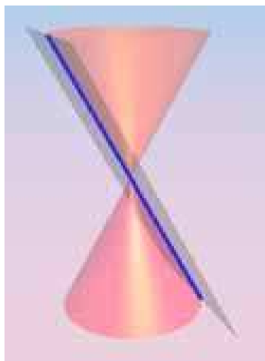
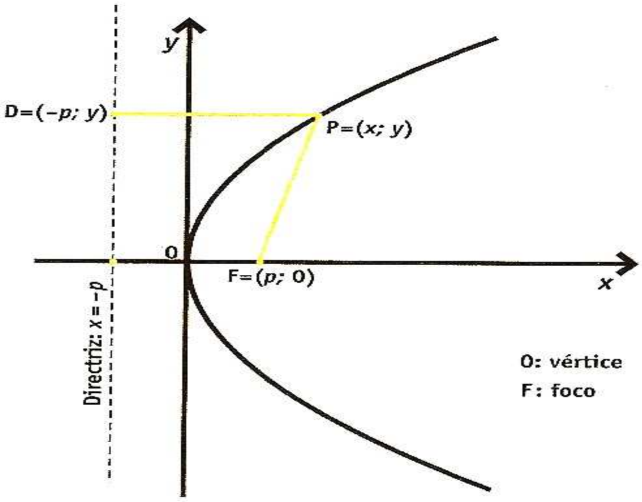


Fig. c

PARÁBOLAS

Definición: Una parábola es el conjunto de todos los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo **F** (llamado **foco**) y de una recta fija ***D*** (llamada **directriz**), ambos contenidos en el plano.

$|PF| = |PL|$



Esta definición nos permite deducir la ecuación en ***xy***, y queremos que ésta sea lo más sencilla posible. La posición de los ejes de coordenadas no tiene efectos sobre la curva, pero influye sobre la sencillez de la ecuación de la curva. Como una parábola es simétrica con respecto de su eje, es natural colocar uno de los ejes de coordenadas, como el ***eje x***, a lo largo del eje de la parábola. Ubicamos ***F***, el foco, a la derecha del origen, digamos, en ***(p,0)***; y la directriz a la izquierda, con ecuación ***x* = *-p***. Entonces el vértice está en el origen.

La condición $|PF| = |PL|$ y la fórmula de la distancia implican

$$\sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x+p)^2+(y-y)^2}$$

Después de elevar al cuadrado ambos lados y simplificar, obtenemos

$$\boxed{y^2 = 4px}$$

o

$$\boxed{y = \frac{1}{4p}x^2}$$

Esto se llama la **ecuación canónica** de una parábola horizontal (con eje horizontal), que abre hacia la derecha. Observe que **p > 0** y que **p** es la distancia del foco al vértice.

Las siguientes tablas resumen el análisis.

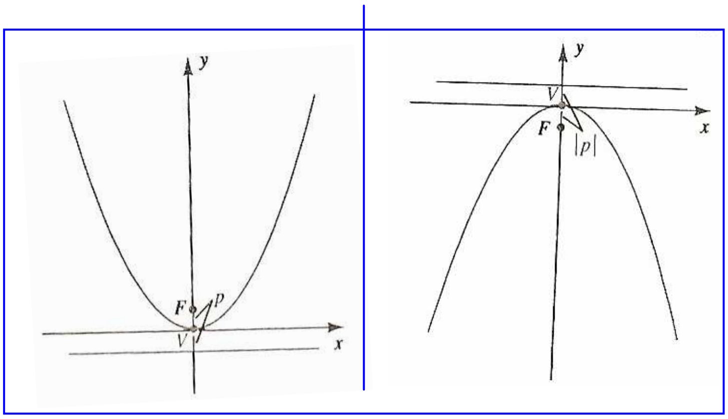
- ***Parábolas con vértice V(0,0)***

Ecuación, foco, directriz — ***Gráfica para p > 0*** — ***Gráfica para p< 0***

$$x^2 = 4py$$
o
$$x = \frac{1}{4p}y^2$$

Foco: *F(0,p)*

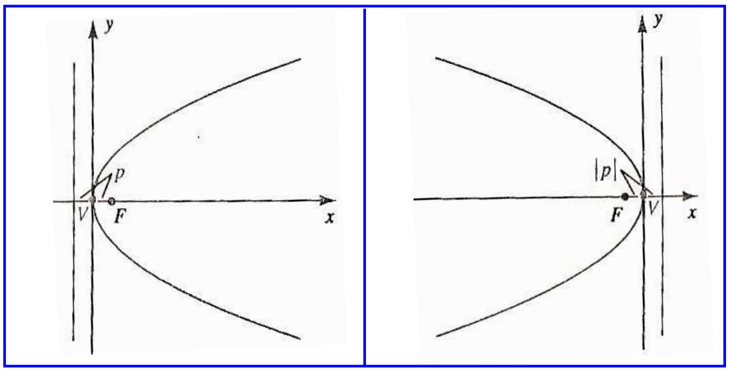
Directriz: *y = -p*



$$y^2 = 4px$$
o
$$x = \frac{1}{4p}y^2$$

Foco: *F(p,0)*

Directriz: *y = -p*



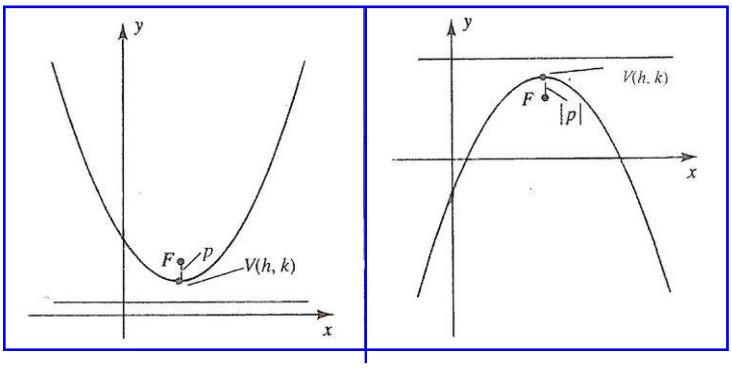
- **Parábolas con vértice V(*h,k)***

Ecuación, foco directriz — ***Gráfica para p>0*** — ***Gráfica para p<0***

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$
o
$$y = ax^2 + bx + c$$

$donde \quad p = \frac{1}{4a}$

Foco: F (*h, k+p*)

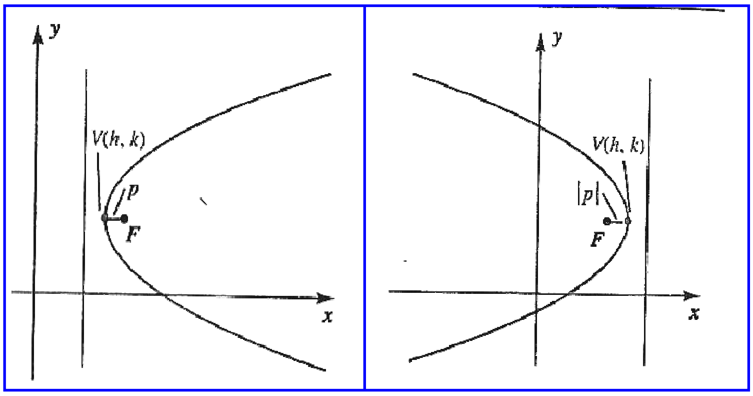


Directriz: $y = k - p$

Ecuación, foco directriz	*Gráfica para p>0*	*Gráfica para p<0*

$$(y-h)^2 = 4p(x-h)$$
o
$$x = ay^2 + bx + c$$
$$donde \quad p = \frac{1}{4a}$$
Foco: $F(h+p, k)$

Directriz: $x = h-p$



Propiedad Reflectora

Una propiedad importante está asociada con una recta tangente a una parábola. (una recta tangente a una parábola tiene exactamente un punto en común con la parábola, pero no la corta). Supongamos que ***l*** es la recta tangente al punto $P(x_1, y_1)$ sobre la gráfica ***y²=4px***, y sea **F** el foco. Al igual que en la figura b, denotamos con **α** el ángulo entre ***l*** y el segmento de recta FP y con **β** el ángulo entre ***l*** y la semirrecta horizontal indicada con el extremo ***P***. Se puede demostrar que ***a = β***. Esta propiedad reflectora tiene muchas aplicaciones, que se demostrarán en la sección siguiente.

Fig.a

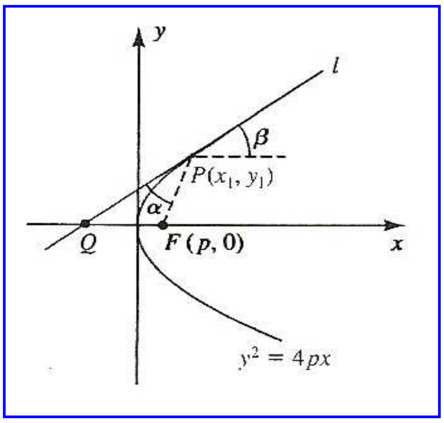


Fig.b

ELIPSE

Definición: Una elipse es el conjunto de todos los puntos en un plano, tal que la suma de sus distancias a dos puntos fijos del plano (los ***focos)*** sea una constante positiva.

A fin de obtener una ecuación sencilla para una elipse, elijamos el eje x como la recta que pasa por los dos focos F ***y*** F' , con el centro de la elipse en el origen. Si F tiene coordenadas $(c,0)$ con $c>0$, entonces, como en la fig.a, F' tiene coordenadas $(-c,0)$; por lo tanto, la distancia entre F y F' es $2c$. La suma constante de las distancias de P desde F y F' se denotará con $2a$. Para obtener puntos fuera del eje x, debemos tener $2a > 2c$, esto es, $a > c$. Por definición, $P(x,y)$ está en la elipse si y sólo si.

$$d(P,F) + d(P,F') = 2a$$

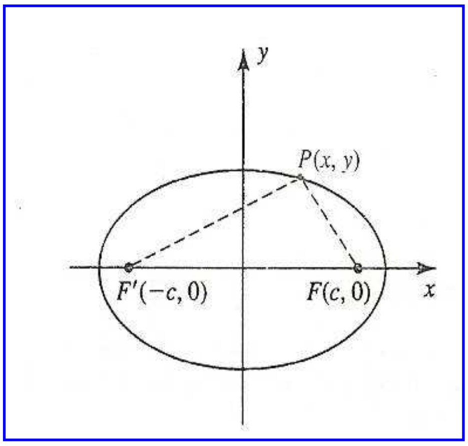


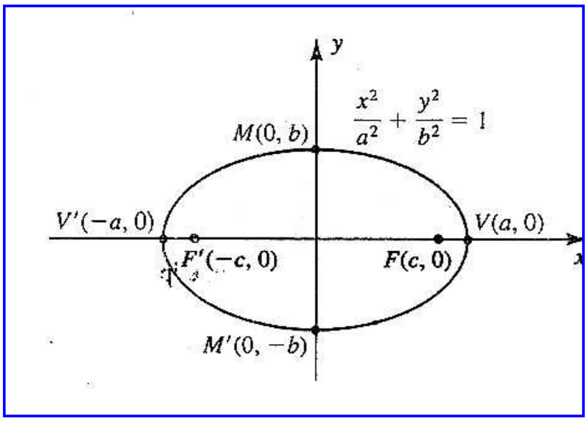
Fig. a

Si usamos la fórmula de la distancia y eliminamos radicales, llegamos a la siguiente ecuación en donde $b^2 = a^2 - c^2$.

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Dado que **c >0** y **b² = a² -** *c*, se deduce que **a² > b²** y, por lo tanto, **a > b.**

Podemos encontrar las intersecciones en x de la elipse con $y = 0$ en la ecuación, de manera que obtendremos $x^2/a^2 = 1$ o bien $x^2 = a^2$, en consecuencia, las intersecciones x son a y $-a$. Los puntos correspondientes ***V(a,0)*** y ***V'(-a,0)*** de la gráfica se llaman *vértices* de la elipse (fig. b). El segmento de recta ***V'V*** es ***el eje mayor.*** De igual forma, $x = 0$ en la ecuación obtenemos $y^2/b^2 = 1$, o $y^2 = b^2$. Por lo tanto, las intersecciones en y son b y $-b$. El segmento entre M***(0,-b)*** y ***M(0,b)*** se denomina **eje menor** de la elipse-



El eje mayor siempre es más largo que el menor puesto que ***a > b.***

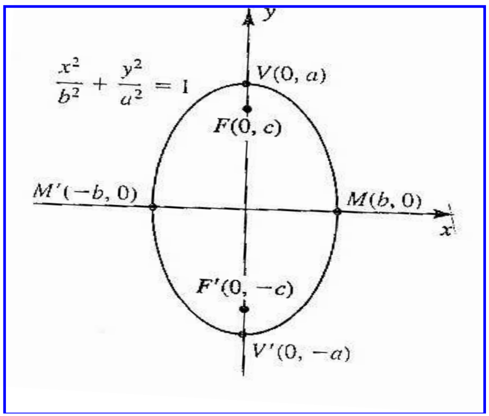
Al aplicar pruebas para simetría. Vemos que la elipse es simétrica con respecto al eje x, al eje y y al origen.

Del mismo modo, si tomamos los focos sobre el eje y, obtenemos la ecuación

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

En este caso, los vértices de la elipse son ***(0,±a)*** y los puntos extremos del eje menor son (±***b,0)*** según se expone en la fig.c.

Fig.c



Las elipses pueden ser muy alargadas o casi redondas. Para obtener información sobre la "redondez" de una elipse se usa a veces la excentricidad ***e*** (que no debe confundirse con la base de los logaritmos naturales). La excentricidad se define como:

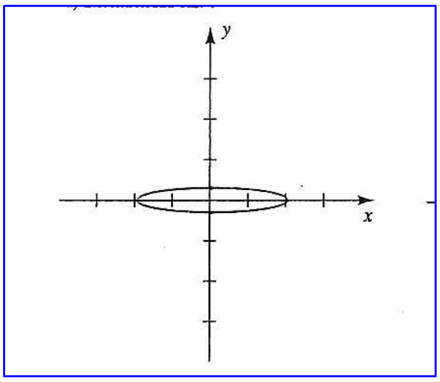
$$e = \frac{distancia\ del\ centro\ al\ foco}{distancia\ del\ centro\ al\ vértice} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Supongamos que en la definición anterior, se considera la longitud del eje mayor **2*a*** como fija y la del eje menor **2*b*** como variable. $\sqrt{a^2 - b^2} < a$ Como , vemos que $0 < e < 1$.

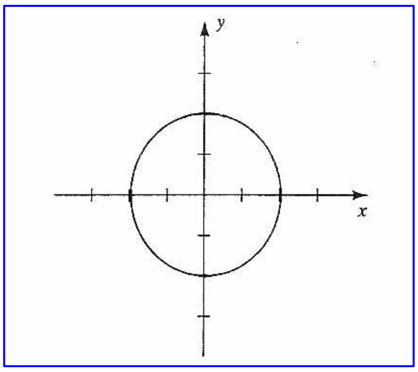
Si $e = 1$, entonces $\sqrt{a^2 - b^2} = a$ y por tanto $b = 0$. En este caso la elipse es muy alargada.

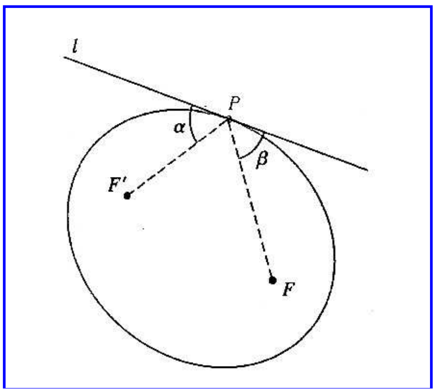
Si $e=0$, entonces $\sqrt{a^2 - b^2} = 0$ y $a = b$. En este caso la elipse es casi redonda o circular.

Excentricidad casi 1



Excentricidad casi 0





Una elipse tiene una ***propiedad reflectora*** análoga a la de la parábola estudiada al final de la sección anterior. Para demostrar esto, denotemos con ***l*** la línea tangente en un punto *P* en una elipse con focos ***F y F′*** (fig.d). Si α es el ángulo agudo entre F'P y l, y β es el ángulo agudo entre FP y *l*, es posible demostrar que $\alpha = \beta$. Así, si un rayo de luz emana de un foco, es reflejado al otro foco. Esta propiedad se utiliza en el diseño de ciertos tipos de equipo óptico.

HIPÉRBOLAS

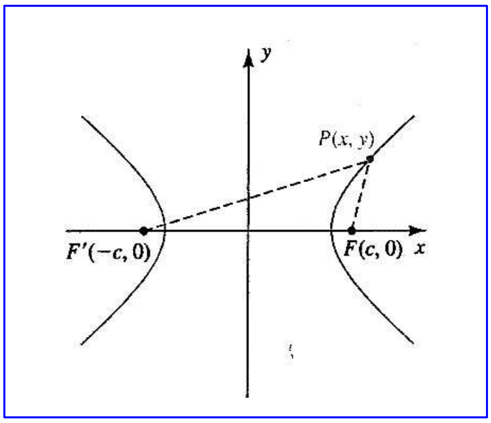
Definición: Una hipérbola es el conjunto de todos los puntos de un plano, la diferencia de cuyas distancias desde los puntos fijos (los **focos**) del plano es una constante positiva.

A fin de hallar una ecuación sencilla para una hipérbola, escogemos un sistema de coordenadas con focos en ***F(c,0)*** y ***F′(-c,0)*** y denotamos la distancia (constante) con ***2a***. El punto medio del segmento ***F′F*** (el origen) se llama centro de la hipérbola. Al consultar la figura a vemos que un punto ***P(x,y)*** pertenece a la hipérbola si y sólo sí

$$|d(P,F) - d(P,F')| = 2a$$

Utilizamos la fórmula de la distancia, eliminamos radicales y obtenemos la siguiente ecuación donde $b^2 = c^2 - a^2$.

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$



Al aplicar pruebas de simetría, la hipérbola es simétrica con respecto a ambos ejes y al origen. Podemos encontrar las intersecciones en x de la hipérbola con $y = 0$ en la ecuación, de esta manera llegamos a $x^2/a^2 = 1$, o sea $x^2 = a^2$ y, en consecuencia, las intersecciones x son a y $-a$. Los puntos correspondientes ***V(a,0)*** y ***V′(-a,0)*** de la gráfica se llaman

vértices de la hipérbola (fig.b). El segmento de recta ***V V'*** se denomina ***eje transverso***.

La gráfica carece de intersección ***y*** porque la ecuación $-y^2/b^2 = 1$ tiene las soluciones complejas $y = \pm bi$.

Los puntos ***W(0,b)*** y ***W'(0,-b)*** son puntos extremos del eje conjugado ***W' W***. Los puntos W y W' no pertenecen a la hipérbola pero, según veremos, son útiles para describir la gráfica.

Al despejar y de la ecuación $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ resulta

$$\boxed{y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}}$$

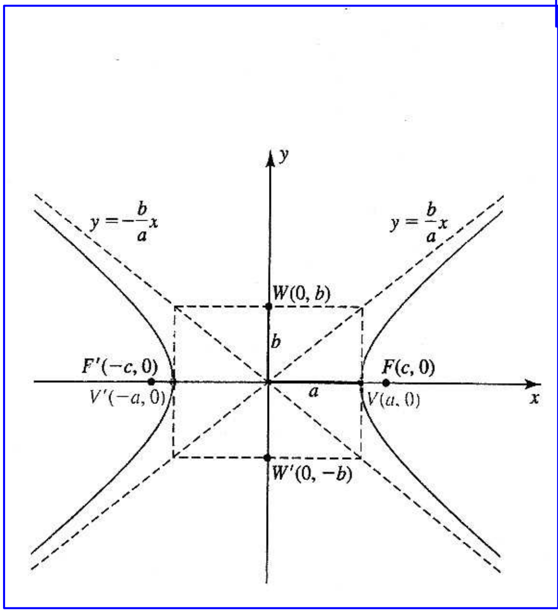


Fig.b

Si $x^2 - a^2 < 0$, o lo que es lo mismo $-a < x < a$, entonces no hay puntos ***(x, y)*** en la gráfica. Hay puntos ***P(x,y)*** en la gráfica si $x \geq a$ o $x \leq -a$.

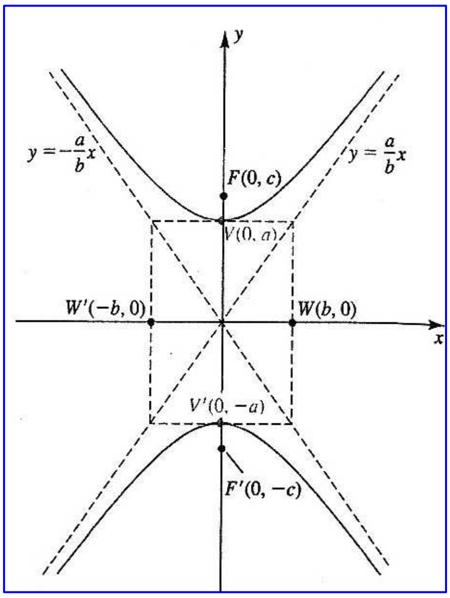
Es posible probar que las rectas $y = \pm (b/a)\, x$ son ***asíntotas*** para la hipérbola. Estas asíntotas sirven como excelentes guías para dibujar la gráfica.

Una forma sencilla de trazar las asíntotas consiste en encontrar primero los vértices ***V(a,0),V'(-a,0)*** y los puntos ***W(0,b), W'(0,-b)*** (fig. b).

Si se dibujan líneas verticales y horizontales que pasen por estos puntos extremos de los ejes transverso y conjugado, respectivamente, entonces las diagonales del ***rectángulo auxiliar*** resultante tienen pendientes ***b/a*** y ***–b/a***, por lo tanto, al prolongar estas diagonales obtenemos las asíntotas $y = \pm(b/a)x$. La hipérbola se traza como en la figura b, usando las asíntotas como guías. Las dos partes que conforman la hipérbola se llaman ***rama derecha*** y ***rama izquierda*** de la hipérbola.

Del mismo modo, si tomamos los focos sobre el eje y, obtenemos la ecuación

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$



En este caso, los vértices de la hipérbola son ***(0±a)*** y los puntos extremos del eje conjugado son **(±*b*,*0*)**, según se aprecia en la figura c. Las asíntotas son

y*= ±(*a/b*)*x (no ***y*** **±(*b/a*)*x*** como en el caso anterior), y ahora nos referimos a las ***ramas superior*** e i***nferior*** de la hipérbola

- *Ecuaciones estándares de una hipérbola con centro en el origen*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad o \qquad \frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1}$$

- *Ecuación de la hipérbola con el centro desplazado al punto* (x_1, y_1) *es*

$$\boxed{\frac{(x-x_1)^2}{a^2}-\frac{(y-y_1)^2}{b^2}=1}$$

Los resultados anteriores muestran que la gráfica de cualquier ecuación de la forma:

Fig.c

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Es una sección cónica excepto por algunos casos degradados en los que la gráfica consta sólo de puntos o rectas, o bien no existe la gráfica.

- Si A y C son iguales pero no nulos, entonces la gráfica, cuando existe, es una ***circunferencia*** o –en algunos casos- un punto.

- Si A y C son diferentes pero del mismo signo, entonces, completando cuadrados y trasladando los ejes adecuadamente, se obtiene una ecuación cuya gráfica, cuando existe, es una ***elipse*** (o un punto).
- Si A y C tienen signos opuestos, se obtiene la ecuación de una ***hipérbola*** o posiblemente, en algunos casos en que hay degradación, dos rectas que se cortan.
- Finalmente, si uno de los dos (A o C) es cero, pero el otro no, la gráfica es una ***parábola*** o –en algunos casos- un par de rectas paralelas, o bien una sola recta.

ANÁLISIS DE DATOS

Las representaciones en Geometría han sido, por sí solas, un núcleo central de interés. Las representaciones gráficas, planas o espaciales, tienen una larga tradición y prestigio, habiéndose de distinguir las representaciones al servicio del propio razonamiento geométrico de las representaciones que gracias a la geometría posibilitan hacer mapas, planos y diseños. A la popular afirmación de que "hacer geometría es realizar razonamientos correctos sobre figuras mal hechas" se le podría añadir el enorme interés de las "figuras bien hechas".

En la actualidad se habla más que nunca de la imagen. Las imágenes más genuinas y, en cierta forma, más bella son las ligadas al mundo geométrico, un eslabón insoslayable e imprescindible en todas las etapas educativas.

La Visualización

Cuando nos enfrentamos a una situación nueva, por ejemplo, cuando entramos a una ciudad desconocida, vamos percibiendo a través del sentido de la vista diversos elementos: árboles, coches, casa. En una segunda fase vamos integrando estas primeras imágenes en una estructura más compleja, percibiendo las calles, las manzanas de casas y las grandes zonas urbanas de la ciudad. Obtenemos así, de forma gradual, una imagen visual de la misma que podemos reconocer en una posterior visita. Este proceso de captación y formación de una imagen mental es lo que se llama el ***proceso visual.***

En la construcción del proceso interviene nuestra experiencia previa haciendo asociaciones con otras imágenes mentales almacenadas en nuestra memoria. El desarrollo completo del proceso visual es esencial para lograr una adecuada percepción espacial. De hecho es un primer paso para obtener un conocimiento de las estructuras espaciales que nos rodean.

Los estímulos visuales son el medio que hace avanzar el proceso de construcción de imágenes mentales. En las personas ciegas, los estímulos visuales se sustituyen, en menor grado, por el desarrollo de otros sentidos, como el del tacto, de cada a tener una mínima percepción espacial.

El sentido de la vista, a veces, no es absolutamente fiel en la percepción de las imágenes de las formas. El contexto, los hábitos y costumbres influyen en el procesamiento de las imágenes. En la educación geométrica el correcto desarrollo de la percepción visual es fundamental para alcanzar un perfecto conocimiento de las relaciones espaciales. La percepción visual, igual que el lenguaje, puede ser aprendida, favoreciendo así el desarrollo del conocimiento geométrico.

La percepción visual exige el desarrollo de una serie de habilidades, entre las que destacan el saber ver y el saber interpretar.

La Representación Gráfica

La representación gráfica desempeña un papel muy importante para expresar nuestros conocimientos e ideas, la construcción de las imágenes mentales de nuestro entorno requiere hacer presente en la mente las formas y las relaciones de los objetos reales. Las representaciones gráficas son una manera de comunicación, un lenguaje para expresar y construir los conocimientos geométricos. La expresión gráfica se realiza por medio de esquemas, figuras y dibujos mucho más sencillos y directos que los símbolos de la escritura. Es el lenguaje ideal para la intuición geométrica, la percepción visual y en definitiva la percepción espacial.

La comunicación gráfica es, por tanto, una habilidad que tiene que ser aprendida y practicada. Es una herramienta muy útil en la resolución de problemas. Algunas veces la representación gráfica de los datos de un problema puede sugerirnos las estrategias para encontrar la solución. En Geometría, no sólo es importante para expresar formas, sino que lo es para comprender razonamientos.

Los modelos manipulativos

El material como forma de representación y estudio de la Geometría es muy rico e importante.

Existe la necesidad de recurrir a lo concreto. Lo concreto deberá tener el doble fin de ejercitar las facultades sintéticas o las analíticas del alumno, aquellas que le permiten llegar al complejo a través del *elemento*, o sea construir,

la facultad que nos lleva a discernir un objeto, en una globalización, cuyos elementos que la forman, nos conducen entonces a analizar el objeto.

Para que un modelo atraiga la atención, científicamente, es necesario que sea movible; entonces no es el material en sí el objeto de la atención, sino más bien la transformación del material, una operación que en cuanto a tal, es abstracta, lo que hace referencia a la facultad de analizar del alumno.

Por cuanto se refiere a la facultad de sintetizar, el material tendrá como fin ser manejable y poder construir con él; pero no se trata sólo de construcción manual, porque el alumno vendrá a descubrir, a través de una serie continua de tentativas –lo que no es posible con el dibujo- cuáles son las condiciones independientes que ligan los elementos de una figura, y obtendrá así, además del "objeto geométrico", una teoría sobre posibilidades de construcción. En ambos casos, entonces, el carácter del material es operativo.

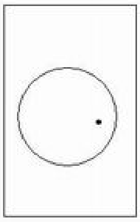
Para establecer este carácter del material hemos sido conducidos por consideraciones psicológicas; el alumno es atraído por aquello que se mueve. Pero un tipo de material operativo refleja también la estructura de las matemáticas.

Las características que deberá tener un material para la enseñanza constructiva de la geometría quedan sujetas a las consideraciones ya expuestas: el material deberá ser artificial y también ser transformable. Estas dos características sugerirán una amplia gama de "modelos" aptos para facilitar el paso de lo concreto a lo abstracto.

De esto expondremos algunos ejemplo del tema elegido : Secciones Cónicas.

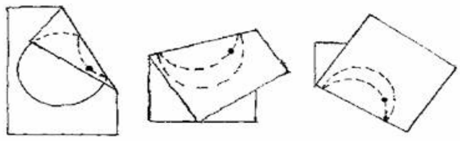
VARIADOS TIPOS DE MATERIAL para trabajar en forma individual o Grupal

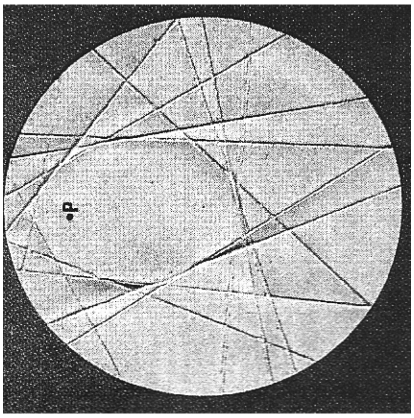
- ***Construcción de cónicas mediante papiroflexia*** *La actividad que se propone puede llevar algún tiempo, pero es sencilla y muy bonita: anímate a hacerla.*



Dibuja una circunferencia sobre un papel y, en su interior, dibuja un punto P distinto del centro. Dobla el papel de modo que se haga pasar la circunferencia por punto P. Vuelve a hacerlo por lo menos más de doce veces.

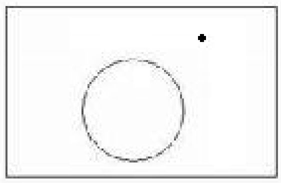
Si, como en la ilustración, vas recorriendo

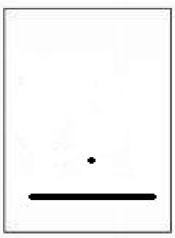




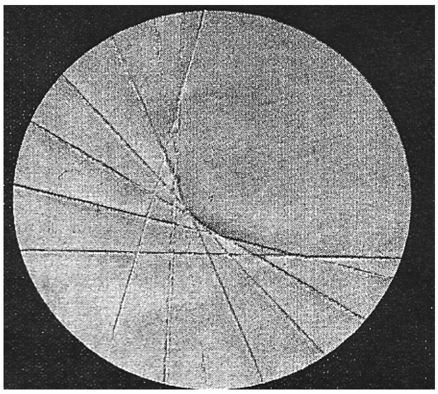
todas las partes de la circunferencia, verás que las líneas de los pliegues envuelven una hermosa elipse. ¿Cuáles crees que serán sus focos?.

*-Si repites la experiencia pintando el punto **P** exterior a la circunferencia, obtendrás una hipérbola.*





Para conseguir una parábola por el mismo procedimiento, dibuja sobre el papel un punto y una recta y hazlos coincidir mediante dobleces.

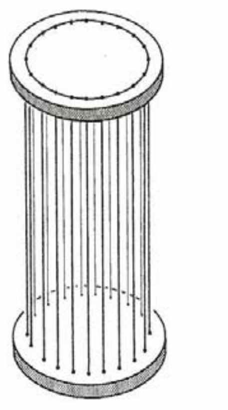


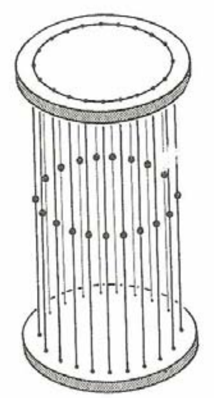
- *El haz de luz que emite una lámpara con pantalla circular es un cono cuyo vértice está en el filamento de la bombilla.*

Si se proyecta este hay sobre la pared de una habitación oscura, se apreciará una circunferencia, una elipse, una parábola o una rama de la hipérbola, según la inclinación con que se haga la proyección, pues, en definitiva, lo que se está haciendo es cortar un cono (el haz de luz de la lámpara) por un plano (la pared).

- *En un vaso de agua no completamente lleno, la superficie del agua tiene la forma de un círculo, pero al inclinarlo ésta toma otra forma, la de una elipse. La experiencia se logrará mejor si tomamos una cajita cilíndrica, por ejemplo de plástico transparente, y si ponemos en ella un poco de arena.*

- **<u>Experiencia de las secciones luminosas</u>**

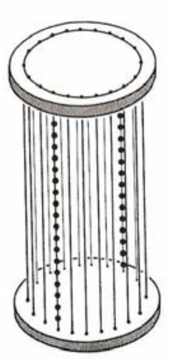




Esta experiencia, podemos perfeccionarla transformándola en instrumento de investigación geométrica; utilizando, también en este caso un proyector. Construir un cilindro del modo siguiente: sobre dos discos iguales hechos de material rígido transparente hacemos pequeños agujeros en el borde; por uno y otro agujeros de cada disco pasamos un hilo elástico, y valiéndonos de una varilla resistente de hierro que se coloca como eje de la figura, de modo que los hilos, todos paralelos entre sí, permanezcan bien tensos. Obtenemos así un cilindro cuyas generatrices son precisamente representadas por los hilos elásticos.

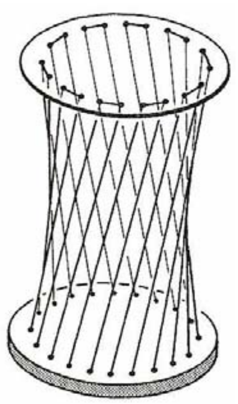
Coloquemos ahora este cilindro de modo que pueda ser cortado por el plano de luz proveniente del proyector; observaremos que serán iluminados los puntos de las generatrices, mientras el resto de la figura quedará en la sombra.

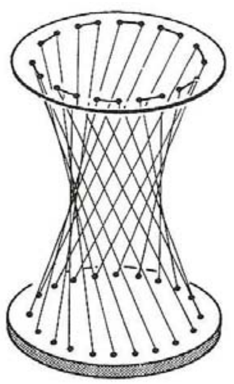
Si por ejemplo el plano de la luz es perpendicular al eje, veremos sobre el cilindro un círculo luminoso. Girando el plano luminoso se puede ver una elipse.



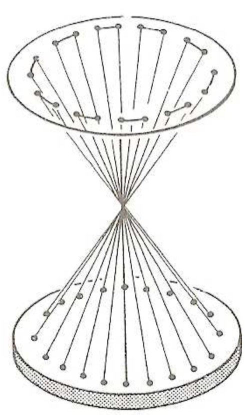
Si luego el plano queda paralelo al eje, veremos iluminadas dos rectas paralelas, dos generatrices del cilindro.

Nuestro cilindro realizado con hilos elásticos, puede transformarse en cono, en el cono de la ***geometría proyectiva****; mantengamos fija una base y giremos la otra sobre*



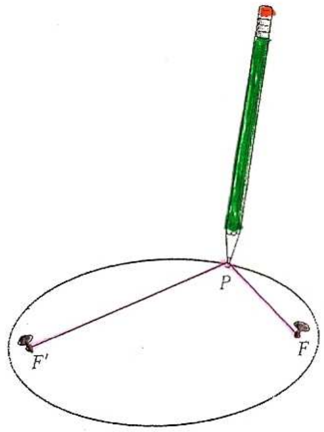


su mismo plano; observaremos que las generatrices, que estaban primero paralelas, cambian su posición recíproca y se convierten en sesgos de dos en dos. Se obtiene así la ***hipérboloide*** *rayada (fig.); se ve aquí sólo un sistema de generatrices.*



Si después continuamos girando una base con respecto de la otra, se observará que en cierto momento las generatrices se vuelven incidentes y se tiene el cono. Atamos con un hilo al conjunto de las generatrices en su punto de reunión, de manera que la figura "cono" quede bien fija.

Dispongamos este cono de manera que sea cortado por el plano luminoso saliente de un proyector; girando dicho plano podremos poner en evidencia las varias formas de secciones planas. Aun más que en el caso del cilindro, será aquí bastante sugestivo observar cómo por continuidad se pasa de una curva a la otra, tal como elipse, parábola, hipérbola , que no son más que una sola curva que se transforma; son, en suma, "las secciones cónicas".



Compás elíptico:

Se puede construir una elipse en papel así: clava dos tachuelas en el papel en dos puntos cualesquiera F y F′ y sujeta los extremos de un trozo de hilo a las tachuelas. Tras enrollar el hilo alrededor de un lápiz y tensarlo, igual que en el punto P de la figura, mueve el lápiz de modo que el hilo se mantenga tenso. La suma de as distancias d(F,P9 y d(F′,P) es la longitud del hilo y por lo tanto, es constante, así, el lápiz trazará una elipse con focos en F y F′. El punto medio del segmento F′F se llama centro de la elipse. Si cambiamos las posiciones de los F yF′ pero mantenemos la longitud del hilo, podemos variar considerablemente la forma del elipse.

- ***Rayos de luz en un espejo parabólico***

En esta experiencia vamos a estudiar cómo podemos ver los rayos de luz que se reflejan en un espejo parabólico.

ATENCIÓN*: En esta experiencia se trabaja con material potencialmente peligroso y debe ser supervisada por un adulto.*

Material: *lata de conservas , arcilla, caja transparente (de las que se utilizan para los bombones, puntero láser (de los que se venden como llaveros),gelatina para cocinar.*

Preparación del espejo parabólico*: De una lata de conservas puedes quitar las tapas y quedarte con el lateral. Dibuja una parábola en un papel y dale a la "hoja de lata" la forma de la parábola. Construye un molde de arcilla donde puedas sujetar la chapa metálica con la forma deseada, de manera que la parábola se mantenga sin que se pierda.*

***Preparación del medio para visualizar los rayos**: Prepara una cierta cantidad de gelatina siguiendo las instrucciones del envase. Cuando esté todavía líquida añade dos o tres gotas de leche y remueve para que se difunda bien.*

En la caja transparente coloca el espejo parabólico y rellena con la gelatina hasta que cubra el espejo. Dejar enfriar para que la gelatina tome consistencia.

***El experimento:** Con el puntero láser vamos a ver cómo se reflejan los rayos de luz en el espejo parabólico. La leche nos ayudará a que la luz se refleje en las minúsculas partículas que la componen y podamos visualizar los rayos.*

Dirige el rayo de luz desde distintas posiciones para que se refleje en el espejo y observa lo que ocurre. Si lanzas el rayo de forma paralela al eje del espejo observarás que la luz reflejada acaba siempre pasando por un punto que es el foco.

En la foto pueden verse dos rayos de luz y cómo se reflejan en el espejo pasando por el foco. Se han utilizado dos punteros de color rojo. Para que se vea mejor la imagen se han alterado los colores en la fotografía.

• ***Calentador solar***

***Materia :** Antena parabólica vieja (de las que se utilizan para ver la televisión por satélite), papel de alumnio (del que se utiliza para envolver los alimentos,una barra de pegamento para papel, alambre, termómetro de cocina.*

Puede que no resulte fácil conseguir la antena parabólica. Puedes sustituirla también por una superficie circular, por ejemplo hay unos envases de "corcho blanco" (porexpan) que tienen esa forma.

Cómo hacerlo*: Tan sólo hay que forrar la antena con el papel de aluminio. Por ejemplo, puedes untar su superficie con el pegamento para que no se mueva el papel. Hay que tener mucho cuidado de que no queden arrugas al colocarlo. Cuántas más arrugas haya más se dispersa la luz y más débil será el efecto.*

En el foco puedes colocar un vaso con agua con un termómetro y observar cómo sube la temperatura una vez puesto el dispositivo al Sol. También puedes pasar lentamente la mano buscando cuales son las zonas más calientes.

La superficie parabólica debe orientarse hacia el Sol, de forma que los rayos lleguen paralelos al eje de la parábola. Para ello basta con que la barra que sujeta el sensor apunte hacia el Sol. Una buena forma de orientar el dispositivo es conseguir que la barra no proyecte sombra sobre la parábola.

- ***Método del jastre***

Consideremos una parábola cualquiera. Trazamos las rectas r y s tangentes a la parábola desde el punto O de corte de la directriz con el eje. Estas rectas tocan a la parábola en los puntos Pr y Ps respectivamente. Si tomamos un punto Q de la parábola, entre Pr y Ps, y trazamos la tangente a la parábola por el punto Q, esta recta corta a las rectas r y s en dos puntos Qr y Qs. Verificándose que: d(Pr,Qr)=d(Qs,O) y d(Qr,O)=d(Qs,Ps)

Utilizando esta propiedad vamos a construir una parábola como envolvente de sus tangentes. Dibujamos dos rectas r y s secantes en un punto O. A partir de O y en la misma dirección trazamos puntos a una distancia constante sobre la recta r e igual sobre la recta s, por ejemplo 20 puntos. Unimos el último punto de r con el primero de s, el penúltimo de r con el segundo de s, y así sucesivamente hasta pasar por todos los puntos.

Todas las rectas trazadas al unir estos puntos son tangentes de una misma parábola (Daniel Santos 1995).

Si el método descrito lo realizamos sobre una madera, clavando en cada punto una puntilla y unimos las puntillas con un hilo según se ha descrito; se observa claramente la figura de la parábola .

APLICACIONES

Elipses, parábolas e hipérbolas a nuestro alrededor

La elipse, la parábola y la hipérbola son curvas que tienen una gran importancia en Física y que se ajustan a la descripción o a la representación matemática de muchos fenómenos. Pero las cónicas también tienen importancia en nuestra vida cotidiana y, aunque muchas veces no nos fijemos o no seamos conscientes de ello, las tenemos a nuestro alrededor. Vamos a comentar algunos ejemplos.

PARÁBOLAS

Cualquier cuerpo lanzado al aire de forma oblicua u horizontal describe un movimiento parabólico bajo la acción de la gravedad. Por ejemplo es el caso de una pelota que se desplaza rebotando.

Fotografía estroboscópica de una pelota de tenis que se desplaza hacia la derecha, rebotando contra el suelo. Podemos distinguir dos arcos parabólicos. También vemos como el tamaño del arco se va haciendo más pequeño, la pelota cada vez bota a menor altura, debido a la pérdida de energía que experimenta en cada colisión.

-También, en el caso de los chorros y las gotas de agua que salen de los caños de las numerosas fuentes que podemos encontrar en las ciudades. El desplazamiento bajo la acción de la atracción gravitatoria de la Tierra permite obtener bonitos arcos

parabólicos. **Trayectorias parabólicas en las fuentes de "Cibeles" y "Neptuno" en Madrid.**

Arcos parabólicos en dos de las fuentes que pueden encontrarse en el Paseo del Prado de Madrid

- *También obtenemos formas parabólicas cuando un haz luminoso de forma cónica se proyecta sobre una pared blanca de manera que la pared sea paralela a la generatriz del cono. Es lo mismo que ocurre cuando cortamos un cono con un plano paralelo a cualquiera de las generatrices.*

Una de las propiedades más importantes de las formas parabólicas es que cualquier rayo que incida de forma paralela al eje de la parábola rebota en su superficie pasando por el foco. La parábola sirve para concentrar los rayos de luz en un punto, el foco. Esta propiedad se llama "reflectora"

Esta propiedad de reflexión en la parábola se utiliza en la construcción de ***antenas parabólicas*** *para recepción de señales de TV, radares, radiotelescopios, etc. Estos dispositivos constan de un "plato" parabólico que recoge las ondas y estas se reflejan hacia una antena colocada en el foco. Tienen diferentes tamaños, según su utilidad, desde los 60 cm de una antena para recibir la televisión por satélite hasta los 305 m de diámetro que tiene el plato del radiotelescopio más grande del mundo que se encuentra en Puerto Rico..*

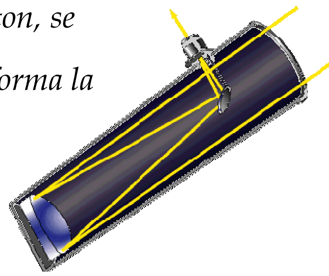
Otra aplicación se encuentra en la fabricación de ***hornos solares****. Se construye una "cocina" parabólica que concentra la radiación solar y la convierte en calor gracias a un reflector de láminas de aluminio sobre el que se pone la sartén, la paellera o cualquier otro recipiente utilizado para cocinar. En un día soleado se puede conseguir que un litro de agua hierva en unos 18 minutos y que el aceite alcance una temperatura máxima de 200ºC. Al cocinar es necesario tomar ciertas precauciones, como evitar el deslumbramiento, usar cacerolas de color negro y utilizar manoplas para evitar quemaduras.*

*También, en los **faros de los coches** la lámpara situada en el foco hace que el haz de luz se concentre en la ruta.*

*-**L**a parábola es la curva que adopta un cable que tenga que soportar una carga, un peso, uniformemente distribuido, véase el puente de San Francisco: El Golden Gate.*

La catenaria es la curva que adopta un cable sostenido por sus extremos debido a su propio peso. Por otro lado, la curva que adopta el cable es una parábola cuando, despreciando su propio peso, es una carga uniformemente distribuida la que soporta. En el puente colgante, los cables, además de su propio peso, tienen que soportar el de la plataforma. Por ello, la forma exacta que adoptan los cables es una "combinación" de la catenaria y la parábola. La diferencia entre ambas curvas es muy pequeña. De hecho, los ingenieros suponen en sus cálculos que es una parábola, dada la simplicidad de su ecuación frente a la ecuación de la catenaria.

***Los telescopios reflectantes**, llamados de Newton, se construyen con un espejo parabólico en cuyo plano focal se forma la imagen invertida del cielo.*



Espejos convexos

Siguiendo una construcción similar a los espejos cóncavos, observaremos que en un espejo convexo la imagen es siempre virtual, derecha y más pequeña que el objeto, independientemente de la posición en que lo situemos.

Este tipo de espejos se suelen utilizar en los retrovisores de coches y motos, debido a que proporcionan un mayor campo de visión, aunque debemos tener en cuenta que nuestro cerebro interpreta que los objetos están más alejados de lo que realmente están.

También se colocan grandes espejos convexos en las esquinas de algunos cruces de poca visibilidad o en algunas tiendas para observar algún personaje de lo ajeno.

Espejos de sonido

*-**P**robablemente, alguna vez, hayas visto, en museos dedicados a la ciencia, que aparecen unas grandes pantallas parabólicas desde las que se puede hablar y escuchar a bastante distancia, aunque haya mucho ruido de fondo.*

El fundamento de la experiencia está en las propiedades de la parábola que reflejan el sonido concentrándolo en el foco (parábola receptora) o el emitido desde el foco lo reflejan en la dirección paralela al eje (parábola emisora). Es lo mismo que ocurre con los rayos de luz.

ARTE Y ARQUITECTURA:

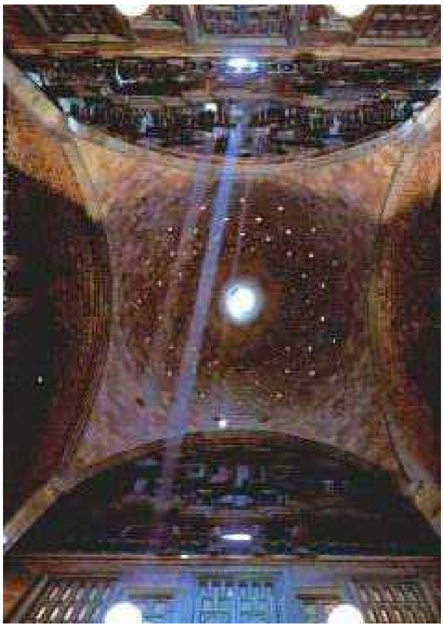
GAUDI y los arcos parabólicos

Antoni Gaudí fue un arquitecto catalán nacido en Reus (1852) que murió en Barcelona (1926), mundialmente conocido por la originalidad de su obra arquitectónica. probablemente su obra más famosa, la que hace que sea su fama sea universal es la "Sagrada Familia" de Barcelona. La obra de Gaudí, en la que es difícil separar arquitectura y escultura, se inscribe dentro del movimiento modernista, aunque lo supera ampliamente por la originalidad de sus concepciones y su capacidad para romper moldes y crear nuevas soluciones.

Una de las innovaciones que constituye un rasgo característico y distintivo del lenguaje arquitectónico de Gaudí es la utilización de arcos parabólicos con función tanto constructiva como ornamental. Lo introdujo por primera vez en la Casa Vicens en la que diseña una cascada con arco parabólico, que posteriormente se convirtió en una arco ornamental y al final fue demolida. Posteriormente utilizó este elemento arquitectónico en obras como la casa Batlló, el Colegio de Santa Teresa, el Palacio Güell o las Bodegas Güell de Garraf, de las que aquí vamos a ver algunos ejemplos.

El acceso al colegio ya se inicia en un porche con un arco parabólico. Pero el elemento más notable de esta obra, probablemente el de mayor belleza, es el sistema de corredores con arcos parabólicos de la planta baja y el primer piso que permiten aprovechar la luz y distribuirla hacia los patios interiores

Colegio de Santa Teresa



Uno de los elementos más singulares del Palacio Güell es la gran cúpula parabólica y estrellada (agujeros en forma de estrella por los que penetra la luz) situado sobre el amplio vestíbulo.

Casa Batlló y Casa Milá (La Pedrera)

En estas dos edificaciones Gaudí utiliza los arcos parabólicos como sustentación de la cubierta para formar los espacios correspondientes a las buhardillas o áticos.

En muchas ciudades es fácil encontrar plazas de planta elíptica, normalmente conocidas por el nombre de "plaza elíptica". Por ejemplo, en Madrid y Bilbao existen plazas de este tipo. Sin embargo, la plaza de planta elíptica más famosa en el mundo probablemente sea

la Plaza de San Pedro en el Vaticano.

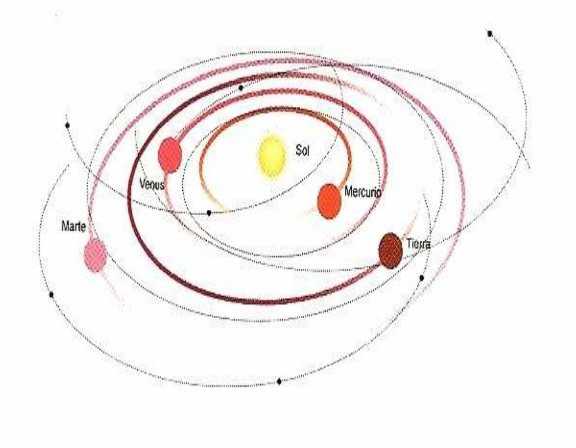
También podemos encontrar edificaciones con planta elíptica. Un ejemplo es la iglesia del Monasterio de San Bernardo, más conocido por "Las Bernardas" en Alcalá de Henares. Un templo con una única nave y planta elíptica, con cúpula del mismo trazado. En sus muros se abren seis capillas, cuatro de ellas también de planta elíptica, con diferentes tamaños de sus portadas.

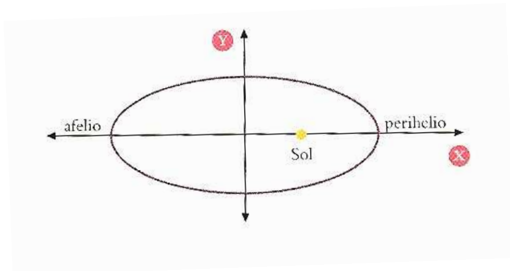
<u>*ASTRONOMÍA:* ***del plano cartesiano al plano sideral***</u>

Se denomina ***órbita*** *a la trayectoria que describen los cuerpos celestes.*

Los astros del Sistema Solar, que transitan sin quedar atrapados como algunos cometas, describen trayectorias parabólicas o hiperbólicas.

Las órbitas de los planetas que, como la Tierra, giran alrededor del Sol, son elipses que tienen al Sol en uno de sus focos.





Llamó ***perihelio*** *al punto de la órbita donde la distancia del planeta al Sol es mínima y* ***afelio****, al punto donde la distancia es la máxima.*

Planeta	Excentricidad
Mercurio	0,206
Venus	0,007
Tierra	0,017
Marte	0,093
Júpiter	0,043
Saturno	0,051
Urano	0,06
Neptuno	0,004
Plutón	0,250

Las órbitas se diferencias por su excentricidad

EL BILLAR ELÍPTICO DE GABRIEL OROZCO

La obra de Gabriel Orozco Oval con Péndulo se presentó por primera vez, en 1996, en el Empty Club de Londres, un antiguo casino y club victoriano, y en 2005 en el Palacio de Cristal de Madrid en la exposición organizada por el Museo Nacional Centro de Arte Reina Sofía (MNCARS). Consiste en una mesa de billar elíptica (ovalada), con dos bolas blancas que pueden moverse libremente bajo el impulso del taco y rebotan en las bandas siguiendo las reglas que impone su forma elíptica. También aparece una bola roja colgada de un hilo sobre el centro de la mesa que puede oscilar como un péndulo ante cualquier impulso de las otras dos bolas.

LOS BILLARES DE LEWIS CARROLL

Desde luego, las reglas del billar no pueden ser más simples: al rebotar una bola en la banda, en ángulo de incidencia es igual al de reflexión.

Empezando con la elíptica, aparecen curiosas novedades. Si la pelota empieza su trayectoria en un foco, una conocida propiedad de la elipse hace que todos los sucesivos recorridos pasarán alternativamente por ambos focos. Pero, además, la trayectoria converge rápidamente hacia el eje mayor de la elipse, como puede verse en la figura 4.

Si un intervalo no pasa por un foco, ningún otro lo hará. Pero las trayectorias difieren según que uno de los intervalos corte o no al segmento comprendido entre los dos focos. En este último caso, las sucesivas trayectorias forman la envolvente de una elipse menor, pero no “llenan” todas las zonas residuales de la elipse mayor, sino que dejan zonas continuas excluidas.

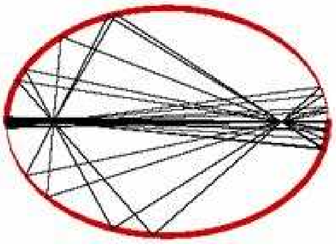


Fig 3. Trayectoria que pasa por un foco.

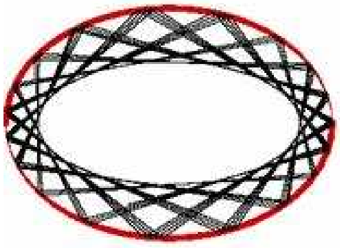


Fig.4 Trayectoria que no pasa entre los focos

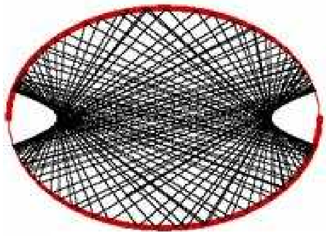


Fig 5 Trayectoria que si pasa entre los focos

Cabría también preguntarse qué ocurrirá con billares poligonales, etc. O estudiar las variaciones de la trayectoria de la bola al variar ligeramente las posiciones iniciales.

1) Breve descripción del Modelo- Tabla elíptica con paño y banda de rebote de billar, con los 2 focos marcados. Una bola pasante por un foco al rebotar pasa por el otro.

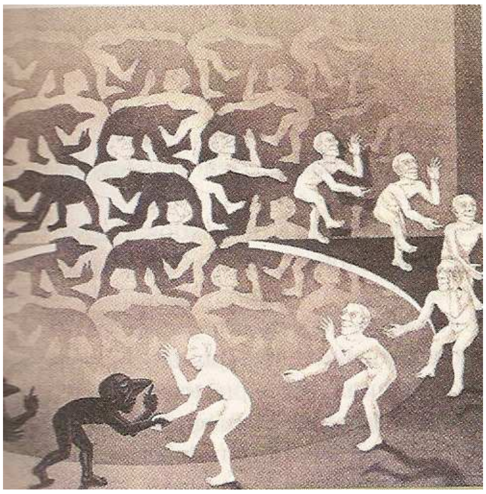
2) Conceptos Matemáticos en juego- elipse, foco, reflexión.

3) Guía de Uso Específica del Modelo- <u>Qué y Cómo hay que mover o realizar</u>: Se impulsa a la bola tratando de no darle efecto de rotación. <u>Qué hay que observar</u>: Al pasar por un foco también pasa por el otro. <u>Qué precauciones</u> se deben tener: No lastimar el paño. No dejar caer al piso la bola.

4) Breves referencias teórico-técnicas- Los rebotes se realizan manteniendo la igualdad de ángulos de incidencia y de reflexión.

ESCHER Y LA GEOMETRIA

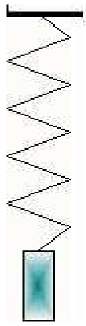
Muchos criticos encuadran los grabados y las litografías del pintor y dibujante holandés Maurits C. Escher (1898-1972) en la categoría de arte matemático. Él mismo reconoció que se sentía "más próximo a los matemáticos que a los artistas". En muchas de sus obras encontramos aspectos surrealistas combinados con juegos geométricos, que desmenuzan la relación entre "lo plano" y lo "espacial".



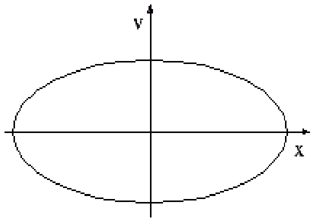
En "Encuentro", las figuras que componen el mosaico escapan a su confinamiento plano y salen a dar una vuelta por el mundo tridimensional. Los dos personajes, que para algunos representan el bien y el mal, huyen de la prisión plana para reconciliarse en el espacio.

La elipse aparece en otras leyes de la ***MECÁNICA,*** *además de las que se presentaban o, quizás no tan importantes o conocidas. La comprensión de tales leyes requiere del conocimiento de ciertos conceptos y magnitudes físicas: momentos de inercia, momento angular, velocidad angular, frente de ondas, etc.. Citaré, brevemente, algunos ejemplos.*

Elipses en el movimiento armónico simple

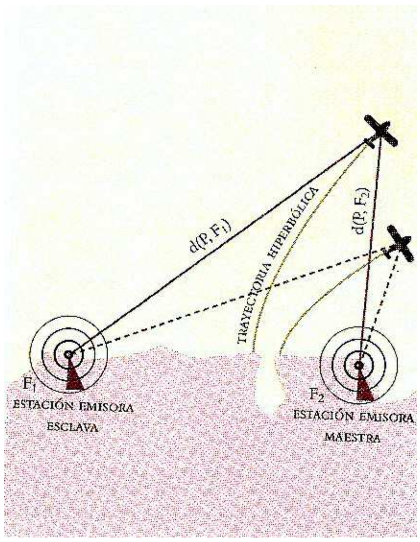


Uno de los movimientos más importantes en la Naturaleza es el movimiento armónico simple (MAS), que es un movimiento periódico, oscilante, en torno a un punto, centro de oscilación. Por ejemplo: una masa colgando de un resorte. Si estiramos el resorte y luego lo soltamos, la masa empezará a subir y a bajar en un MAS. En este fenómeno, nos encontramos a la elipse en la representación del movimiento en el espacio de las fases, es decir, en la representación de la velocidad del peso (eje Y) frente al espacio recorrido respecto al centro de oscilación o de equilibrio (eje X).



EN LA AVIACIÓN

El Loren es un sistema que les permite a los pilotos de avión determinar la posición de su nave a partir de la diferencia de recepción de las señales de radio, procedentes de dos emisores sincronizados, distantes entre sí. El sistema emisor se compone de una estación maestra y de otra esclava.



La maestra emite de forma regular una pequeña señal, que es repetida por la esclava, controlada por radio desde la maestra. Ambas señales se reciben en el avión, se amplifican y se registran como pequeñas ondas sobre una pantalla. Los circuitos del receptor están dispuestos de *forma tal que la distancia entre las señales corresponde a la diferencia de tiempo de llegada de las señales de ambas estaciones. La curva que ve el piloto es, entonces, una* ***hipérbola.***

LENTES

Las propiedades ópticas de las cónicas han sido utilizadas en la elaboración de lentes durante cientos de años. Una innovación reciente es la introducción de lentes variables para reemplazar los lentes bifocales en los anteojos.

Comenzando por la parte superior, estos lentes se pulen de modo que la excentricidad varíe continuamente de $e<1$ a $e=1$ a $e>1$, produciendo entonces secciones transversales horizontales que van de elipses a parábolas e hipérbolas, de modo que se permita una visión perfecta de los objetos a cualquier distancia, moviendo en forma adecuada la cabeza.

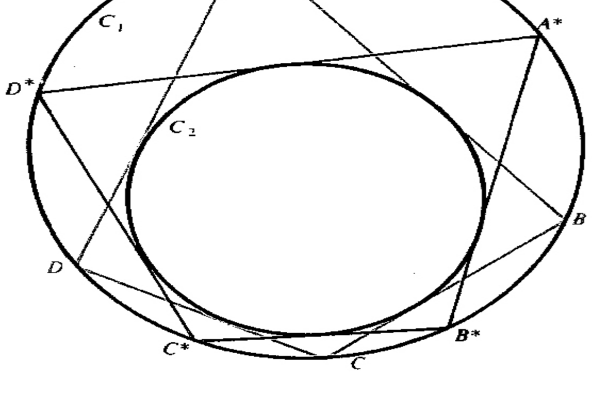
CURIOSIDADES

Un teorema curioso

Versa sobre cónicas

Supongamos que tenemos dos circunferencia C y C en el plano; una de ellas, C, en el interior de la otra, C.

Supongamos, además, que están situadas de tal forma que hay un polígono ABCD de cuatro lados inscrito en una de ellas y circunscrito a la otra, como indica la figura:



Es decir, que hay un punto A tal que al trazar la tangente AB, luego BC y luego CD, resulta que la tangente desde D vuelve a pasar por A.

¿Y si partimos de otro punto cualquiera A'? El cuadrilátero A'B'C'D' se cierra igualmente.

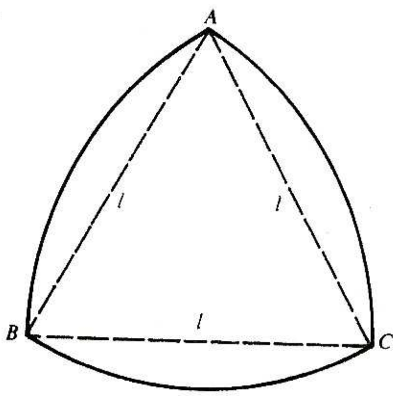
¿Lo habrías adivinado?

Curvas de anchura constante

Los antiguos egipcios transportaban las enormes piedras para construir sus pirámides utilizando troncos circulares del mismo diámetro (anchura constante).

Colocaban la piedra encima de los troncos y, empujándola, ésta se desliza sobre ellos a la vez que giraban. Reponían los troncos pasando delante los que se quedaban atrás.

¿Qué hubiese ocurrido si en lugar de colocar troncos circulares hubiesen usado troncos con este perfil en el que la anchura también es constante?

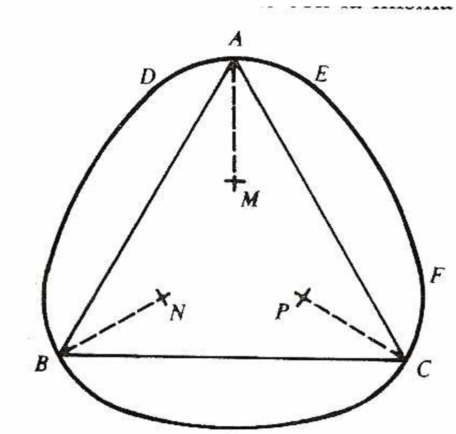


ABC es un triángulo equilátero de lado l; el arco BC es un arco de circunferencia de centro A y radio l; el arco AC tiene centro B y radio l y el arco AB es de centro C y radio l.

Curiosamente, estos troncos habrían hecho el mismo servicio. La piedra hubiera ido tan suavemente en un caso como en otro. El nuevo perfil es una curva de anchura constante l, como fácilmente puedes comprobar, igual que la circunferencia de diámetro l que es una curva de anchura constante l.

¿Qué ventaja tiene entonces la circunferencia sobre este perfil?. Está claro que, para llevar las piedras, ninguna; pero sí debes saber que, para usarlos como rueda con ejes, una muy importante. Piénsalo. ¿Qué pasaría si se utilizase una rueda con el perfil indicado?.

Curvas de anchura constante hay muchas. Aquí tienes otra y puedes construir otras muchas con la misma idea:



El triángulo ABC es equilátero.

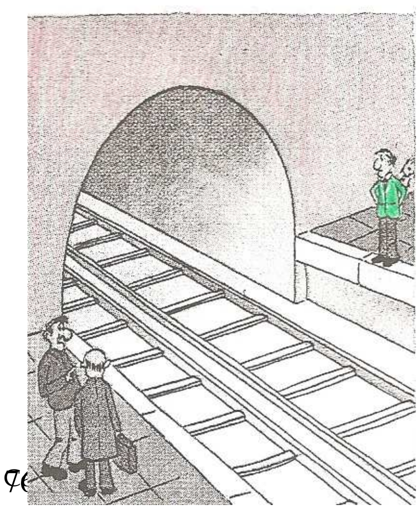
El arco DAE tiene centro en M, y el arco EF tiene su centro en N, etc…

¿Por qué no hallas la anchura y el perímetro de las curvas de anchura constante que hemos dibujado?. Observa la relación entre las medidas que has encontrado.

Todas las curvas convexas, es decir, sin entrantes, y de anchura constante, tienen una curiosa propiedad, a la que se llama teorema de Barbier: si la anchura es d, el perímetro es **πd.**

Un hecho sorprendente

A veces en el andén del subterráneo, se produce el siguiente fenómeno:



Una persona oye hablar a otra con absoluta nitidez pero no la encuentra cerca. Mirando a su alrededor, llega a descubrir que la voz procede de alguien que está en el andén de enfrente. Y no está hablando más fuerte que los demás.

La primera mujer matemática

La primera mujer de la que se tiene noticia que dedicó su vida a las Matemáticas es **Hypatia de Alenjandría (s.1V-V d.c.)**, que inicio sus actividades con Euclides y continuo con grandes matemáticos como Arquímedes, Apolonio y Pappus. La obra de Hypatia se centro en los comentarios sobre las obras de los matemáticos anteriormente citados y en los trabajos originales sobre curvas cónicas.

ACTIVIDADES

Se proponen actividades para que el estudiante logre un aprendizaje, para ello se debe posibilitar el trabajo colaborativo, lo que permitirá el desarrollo de las habilidades básicas de comunicación haciéndolo capaz de analizar la información. Las actividades propiciarán que el educando inicie la búsqueda de la información pertinente al tema de las Cónicas, desarrollando con ello un proceso que implica las siguientes acciones concretas: identificar, clasificar, organizar, presentar y decodificar.

Los nuevos enfoques educativos rescatan el concepto de que el aprendizaje es más eficiente aprovechando todos los sentidos del Ser humano ya que con ello se potencializa la comunicación interna y externa del alumno.

Actividad 1

OBJETIVO: Por medio del sentido del tacto y la vista; en un ambiente creativo y recreativo el alumno construirá e identificará las cónicas como envolventes de tangentes; utilizando para ello la papiroflexia con un fin didáctico.

Etapa I. Situación problema: Construir las cónicas mediante doblado de papel.

Etapa II. Algoritmo de construcción:

1. **CIRCUNFERENCIA**
   1) Recorta un círculo de papel de 20 cm. de diámetro.
   2) Marca el centro del círculo llamándole al punto **C**.
   3) Considera los puntos de la circunferencia como el conjunto de puntos **P**.
   4) Se hace coincidir un punto **P** con el punto **C** y se marca el doblez.
   5) Se repite el paso anterior hasta recorrer los ***n*** puntos **P**.
2. **PARÁBOLA.**
   1) Recorta un rectángulo de papel de 15x20 cm.
   2) Llamarle **C** al punto de intersección de las diagonales.
   3) Llamarle **P** al conjunto de puntos que forma solo uno de los lados más largos del rectángulo.
   4) Trazar un segmento perpendicular al lado elegido y que pase por **C**.
   5) Sobre el segmento coloca un punto **F** procura que no sea extremo.

6) Se hace coincidir un punto **P** con el punto **F** y se marca el doblez.

7) Se repite el paso anterior hasta recorrer los ***n*** puntos **P**

3. ELIPSE.

1) Recorta un círculo de papel de 20 cm. de diámetro.

2) Marca el centro del círculo llamándole al punto **C**.

3) Marca el punto **F** diferente de **C** al interior del círculo.

4) Considera a los puntos de la circunferencia como el conjunto de puntos **P**.

5) Se hace coincidir un punto **P** con el punto **F** y se marca el doblez.

6) Se repite el paso anterior hasta recorrer los ***n*** puntos **P**.

4. **HIPÉRBOLA.**

1) Recorta un cuadrado de papel de 20 cm. de lado.

2) Dibuja una pequeña circunferencia en el interior del cuadrado cercano al centro.

3) Marca el punto **F** exterior al círculo e interior al cuadrado.

4) Considera a todos los puntos de la circunferencia como el conjunto de puntos **P**.

5) Se hace coincidir un punto **P** con el punto **F** y se marca el doblez.

6) Se repite el paso anterior hasta recorrer los ***n*** puntos **P**.

Etapa III. Presentación de los trabajos terminados ante el grupo en un primer momento; en un segundo momento exposición para la comunidad estudiantil.

Etapa IV. Análisis de la actividad

1) ¿Qué nombre le das al doblez que hiciste?

2) ¿Cada doblez tiene la misma longitud?

3) ¿Cómo determinas la longitud?

4) ¿Qué unidad de medida utilizaste?

5) Delinear con color verde la curva que se formó.

6) Marca con color azul uno de los dobleces.

7) Marca con color rojo el punto de intersección entre la curva y la recta.

8) ¿Qué nombre matemático recibe la curva delineada, la recta y el punto de intersección.

9) ¿Qué relación guarda cada una de las tangentes a la circunferencia con respecto al radio?

10) ¿Habrá alguna línea recta que pase por el foco de la parábola y sea perpendicular a alguna de las rectas tangentes.

Etapa V. Abordar el tema matemático de la línea recta desde definición, ecuaciones, demostraciones, problemas matemáticos y problemas de aplicación.

<u>Actividad 2</u>

OBJETIVO: Por medio del sentido del tacto y la vista, y en un ambiente creativo y lúdico el alumno construirá e identificará las cónicas como cortes al cono con un plano; utilizando para ello plastilina y un trozo de plastifico duro y delgado.

Etapa I. <u>Situación problema:</u> Construir las cónicas mediante cortes a un cono recto.

Etapa II. <u>Algoritmo de construcción:</u>

1. CIRCUNFERENCIA

1) Se obtiene cuando un plano corta $(\theta = 90^0)$ perpendicularmente el eje del cono

2) ¿Qué nombre recibe el área que se obtiene del corte anterior?

3) ¿Qué nombre recibe el perímetro del área?

2. PARÁBOLA.

1) Se obtiene cuando el cono es cortado por un plano paralelo a la *generatriz* del cono, y se identifica como el contorno circular de éste corte.

3. ELIPSE.

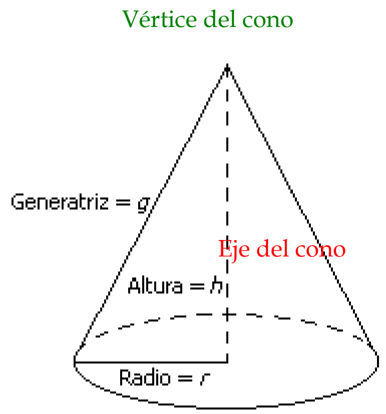
1) Se obtiene cuando un plano corta el *eje del cono* con un ángulo $0^0 < \theta < 90^0$.

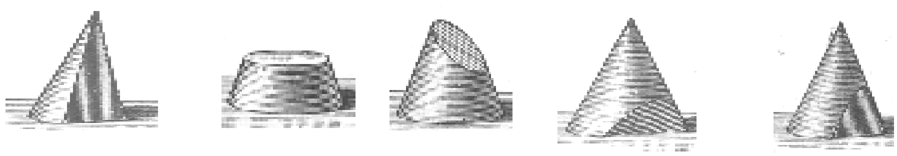
4. HIPÉRBOLA.

1) Para generar una hipérbola se deben unir *dos mantos de cono* por el *vértice* y éstos deben ser cortados por un plano paralelo (no coincidente) al *eje del cono* $\theta = 0^0$.

5. RECTAS.

1) Para generar dos rectas que se cortan, se deben unir *dos mantos de cono* por el *vértice* y éstos deben ser cortados por un plano que pase por el *eje del cono* $\theta = 0^0$





Etapa III. <u>Presentación de los trabajos</u> terminados ante el grupo en un primer momento; en un segundo momento exposición para el grupo estudiantil.

Etapa IV. <u>Análisis de la actividad</u>

1) ¿Cómo se les llama al conjunto de curvas que acabas de identificar al hacerle diversos cortes al cono?

2) ¿Por qué se les llama así?

3) ¿Qué características tiene cada una de las curvas que encontraste en ésta actividad?

4) ¿Qué curvas de las aquí encontradas observas en los juegos mecánicos del parque de la costa?

5) ¿Qué curvas de las aquí encontradas observas en los cortes que realizas al partir alguna fruta? Especifica.

6)

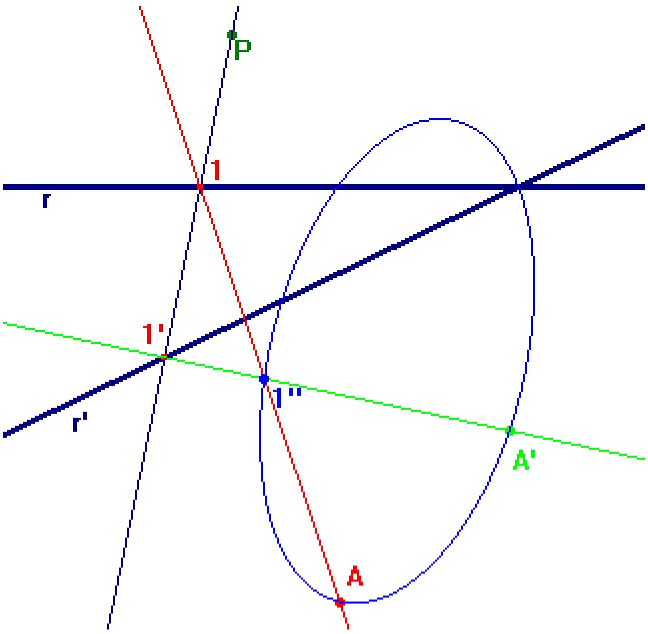
Etapa V. Abordar el tema matemático de las cónicas mediante su gráfica en el sistema de coordenadas rectangulares e identifica de sus elementos.

Actividad 3

En la siguiente actividad se utiliza la computadora y el software de geometría CABRI, como una estrategia didáctica diseñada expresamente para la enseñanza de las cónicas, favoreciendo la comprensión de este tema a través de la visualización, construcción, explicación y formalización de los aspectos gráfico y analítico de estas curvas geométricas, contribuyendo al logro de los objetivos propuestos.

CÓNICAS PROYECTIVAS

Definición de cónica:



Consideremos un punto P y dos rectas r y r′. Una recta que pase por P cortará a estas rectas en dos puntos, 1 y 1′ respectivamente. Consideremos dos puntos A y A′ y las rectas que unen A con 1 y A′ con 1′. Sea 1′′ el punto de intersección de estas rectas. ¿Cuál es el lugar geométrico de estos puntos 1′′?

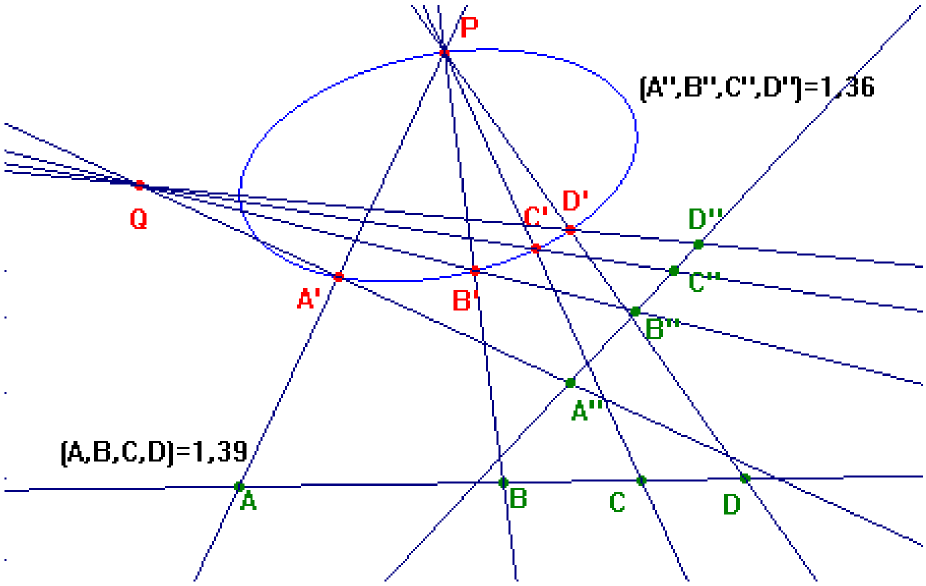
Moviendo la recta que pasa por P y por 1 observamos que el lugar geométrico que describe 1'' es una cónica.

De hecho, este es un caso particular de la definición de cónica en geometría proyectiva sintética:

'Una cónica es el lugar geométrico de los puntos de intersección de rectas homologas respecto a una transformación proyectiva entre dos haces de rectas'

En nuestro caso los haces de rectas son los determinados por A y A', y la transformación proyectiva entre estos haces es la correspondiente a proyectar la existente entre r y r'.

Estructura proyectiva de una cónica:



- Dibujemos 4 puntos A, B, C, D sobre una recta, y luego una cónica.
- Tomemos un punto P en la cónica y sean A′, B′, C′, D′ los puntos de corte de la cónica con las rectas que unen P con A, B, C y D respectivamente.
- Sea Q otro punto cualquiera del plano. Tracemos las cuatro rectas que unen Q con los puntos A′, B′, C′, D′, y sean A′′, B′′, C′′, D′′ los puntos de intersección de estas rectas con otra recta cualquiera.
- Calculemos la razón doble de A, B, C, D y de A′′, B′′, C′′, D′′.
- Mueve ahora, el punto Q, sitúalo sobre la cónica y desplázalo sobre ella. ¿Qué sucede con al razón doble?

Acabamos de verificar con *Cabri* que podemos definir la razón doble de cuatro puntos sobre una cónica como la razón doble de sus proyecciones sobre cualquier recta desde un punto de la cónica.
Esto nos permite dar una estructura proyectiva a la cónica. Además la aplicación del haz de rectas definido por un punto de la cónica sobre esta, que a cada recta le asigna el punto de corte con la cónica es una transformación proyectiva.

Nótese que cuando el punto Q no está sobre la cónica, la razón doble (A’’, B’’, C’’, D’’) no coincidiría con (A, B, C, D). Por tanto, esta es una propiedad característica de las cónicas y no de otro tipo de curvas, y de hecho justifica la definición de cónica en geometría proyectiva sintética que aparece en la sección

Construcción del conjugado armónico en una cónica:

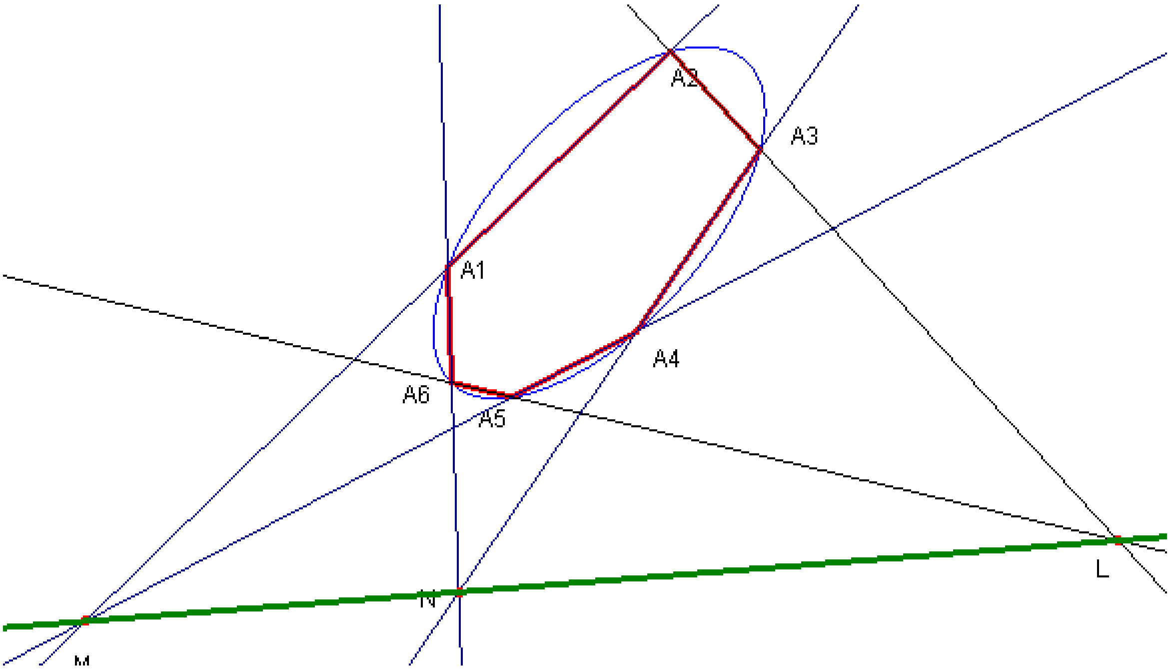
Como ejercicio podemos construir el conjugado armónico de un punto C en la cónica con respecto a otros dos A, B también en la cónica. Tomamos la recta que une A y B y calculamos su polo P (puedes usar el macro "polo"). El punto de corte de la recta PC con la cónica es el conjugado armónico de C respecto de Ay B.

En efecto, proyectando desde A y cortando con PC obtenemos P, B', C, D, que es cuaterna armónica por ser P el polo de AB. (Para proyectar el punto A desde sí mismo se toma la tangente en A a la cónica y se corta con PC, obteniéndose P).

Si a la cónica le quitamos los puntos A y B, obtenemos dos componentes conexas. Comprobar que C y D están en distintas componentes y que cuando C recorre una de ellas D recorre la otra, como sucedía en la recta proyectiva.

En torno al Teorema de Pascal

Teorema de Pascal: Los lados opuestos de un hexágono inscrito en una cónica propia se cortan en tres lineadpuntos aos.



Podéis intentar dibujar el hexagrama de Pascal, y a continuación probar las siguientes construcciones:

- <u>Verificación del teorema</u>: mover el punto A1 (o cualquiera de los otros cinco) haciéndolo pasar por encima de los otros e ir comprobando que los puntos M, N, y L están siempre alineados.
- <u>Tangentes</u>: haced coincidir A1 y A2, ¿qué se obtiene?
- <u>Construcción de la tangente</u>:

  · Dar 5 puntos enumerados $A_1=A_2$, A_3, A_4, A_5, A_6

  · Trazar las rectas A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6 y A_6A_1.

  · Considerar los puntos $P = A_2A_3 \cap A_5A_6$ y $Q = A_3A_4 \cap A_6A_1$, y trazar la recta PQ que pasa por ambos.

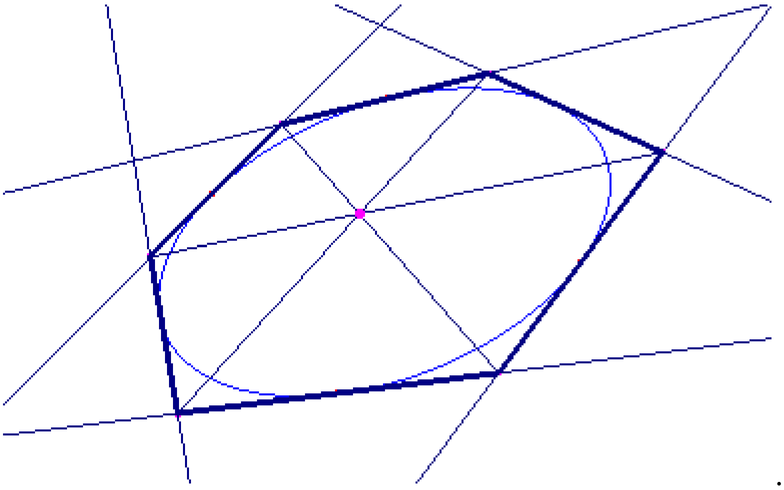
  · Sea ahora $R = PQ \cap A_4A_5$.

  · Verificar que la recta RA_1 es tangente a la cónica que pasa por los puntos $A_1=A_2$, A_3, A_4, A_5 y A_6 en el punto A_1.

- <u>Dual</u>: dibujar el dual del teorema de Pascal (Teorema de Brianchon).

Teorema de Brianchon:

Las diagonales que unen los vértices opuestos de un hexágono son tres rectas concurrentes si y sólo si el hexágono circunscribe una cónica



Para trazar las tangentes puedes utilizar el macro "Polar" que dibuja la recta polar de un punto con respecto a una cónica. Si el punto está sobre la cónica la polar coincide con la tangente a la cónica en dicho punto.

CONCLUSIÓN

El tema de la enseñanza y el aprendizaje de las cónicas (parábola, hipérbola y elipse) no es un tema exento de problemas, su aprendizaje empleando los métodos y formas de trabajo habituales requiere considerable esfuerzo por parte de los profesores, además, el alumno no encuentra su utilidad práctica, lo que se convierte en un verdadero conflicto.

La práctica muestra que el tratamiento de las cónicas empleando sólo lápiz y papel no permite, en el tiempo de que se dispone, motivar a los alumnos por su estudio ni desarrollar en ellos los conocimientos y habilidades previstos. Se requiere una habilidad muy especial en el docente para que pueda lograr que el alumno preste atención al discurso con el que se pretende enseñar un determinado tema matemático y en especial el de las cónicas.

El docente debe actualizarse, y para ello requiere conocimientos nuevos, de tal manera que las matemáticas se vean privilegiadas, tanto en su enseñanza como en su aprendizaje.

Entre las principales dificultades que presentan los alumnos en este tema se encuentran: reconocer las cónicas como lugares geométricos, identificar y describir sus elementos característicos, establecer la relación entre los parámetros de la ecuación y la representación gráfica (cómo la variación de los parámetros determina la transformación de la gráfica de la curva), y apreciar sus potencialidades para modelar fenómenos de la realidad.

Con estas observaciones, tan sólo he pretendido poner de manifiesto algunas de las características más importantes de las Matemáticas sobre su tratamiento didáctico.

Quiero terminar con unas palabras de Gonzalo Sánchez Vázquez, que muestran, con mayor claridad, algunos aspectos didácticos que he querido resaltar:

"*... Esta revolución informática y los nuevos contenidos de la Matemática actual no pueden ser desconocidos por la enseñanza. ... Las Matemáticas no deben enseñarse ya de una manera expositiva, estática, transmitida por el profesor a un conjunto de* *alumnos pasivos. Es preciso que estos participen, observen, exploren, hagan conjeturas y se enfrenten con problemas que les interesan. El profesor es un director de orquesta que apenas se ve, pero que sugiere y orienta constantemente...* "

BIBLIOGRAFÍA

- SWOKOWSKI, Earl W.; "Cálculo con geometría analítica"; 2da edición,; Grupo Editorial Iberoamericano S.A. de C.V.;1989.

- SWOKOWSKI, Earl W.; "Álgebra y Trigonometría", 9na edición; Editores Thomson; 1997.

- SMITH, Robert y otros; "Cálculo"; Mc Graw Hill Interamericana S.A.; 2000.

- CASTELNUOVO, Ema; "Didáctica de la matemática moderna"; serie de Matemáticas; Editorial Trillas; 1999.

- ALSINA, Claudia y otros; "Invitación a la didáctica de la geometría"; Editorial Síntesis; 1989.

- GUZMÁN, M de y otros; "Matemáticas"; Bachillerato 3; Editorial Grupo Anaya S.A: Madrid; 1998.

- KLINE, Morris; "El Pensamiento Matemático desde la antigüedad a nuestros días 1"; Editorial Alianza; 1999.

- PARRA, Cecilia y otros; "Didáctica de matemáticas, Aportes y reflexiones"; Editorial Paidós Educador;1997.

- ALTMAN, Silvia Y OTROS; "Matemática/Polimodal-Vectores"; Editorial Longseller, 2002.

- KACZOR, Pablo.J y otros; "Matemática 1"; Editorial Santillana1999.

- BERIO, Adriana y otros; "Matemática 2-Activa"; Editorial Puertos de Palos; 2001.

- **Ambiente Informático Interactivo para el aprendizaje de las cónicas**
  Cortés Zavala, José Carlos
  Localización: http://dialnet.unirioja.es/servlet/oaiart?codigo=2218913 (Revista) ISSN 1815-

0640http://biblioteca.universia.net/html_bura/ficha/params/id/20495724.htm

- Sistema computarizado para la enseñanza aprendizaje de las secciones cónicas.
  autores: Msc. Lisset Cruz Pupo. Drc. Manuel Mariño Betancourt.
  http://teleformacion.cujae.edu.cu/repositorios/crcrea/recursos documentos/408433a613/3534.pdf

GLOSARIO

Asíntotas: Es una recta de una función cuando la gráfica de la función y la recta permanecen muy próximas.

Estroboscópica: es un instrumento que permite visualizar un objeto que está girando como si estuviera parado o girando muy lentamente.

Papiroflexia: es la construcción de objetos plegando papel.

Plano sideral: los astros que en el espacio van por distintas órbitas