NOTAS SOBRE LA MECANIZACION DE LAS DEDUCCIONES LOGICAS

JOSE ANTONIO LOPEZ BRUGOS
Oviedo

Desde Aristóteles hasta los intentos recientes de prueba automática de teoremas la historia de la lógica ha recorrido un camino en el que la construcción de diagramas y máquinas lógicas ha tenido papel, como ilustra, por ejemplo el libro de M. Gardner, *Máquinas lógicas y diagramas* (ed. Grijalbo, México, 1973). Un hito en esta historia es la máquina de Jevons (1869) para probar teoremas de álgebra de Boole.

Recientemente, desde mediados de los años 50, los lógicos estaban empeñados en construir programas para la prueba de teoremas lógicos con computadoras en dos direcciones: una, de interés para psicólogos y pedagogos, básicamente a partir de métodos llamados heurísticos (inteligencia artificial), y otra con el interés más puramente lógico de investigar en la teoría de la deducción, utilizando métodos fundamentalmente algorítmicos (complementados frecuentemente con recursos heurísticos). La deducción formal automática se divide en dos familias de métodos: la deducción natural (tablas) y los procedimientos de Herbrand (resolución).

En esta nota me centraré en la historia de esas dos familias de métodos, sin tratar de describirlos técnicamente, y dejando para otra ocasión los programas.

Durante muchos siglos los lógicos han pensado que el único medio de prueba era el silogismo, siguiendo la tradición aristotélica. En los *Analíticos Posteriores,* Aristóteles describe las características de una «ciencia demostrativa» (apodeiktiké episthéme) de modo que supone ciertos axiomas (APst. A 3, 72bl8-22), pero el medio de prueba es el silogismo (APst. A 2, 71b17 sq), como demuestra G. Patzig en *Aristotle's theory of the syllogism* (Dordrecht, 1968, pág. 132). En la *Etica a Nicómaco* (Z 3, 1139b26-31) distingue entre «didaskalia di'epagogñs» y «didaskalia sullogismo», base de la distinción histórica entre ciencias «deductivas» y ciencias «inductivas». Aún en el siglo XIX se sigue planteando esta cuestión como un tópico lógico. Puede verse en Boole (*An Investigatión of the Laws of Thought,* págs. 238-240), que con el ánimo de encontrar la solución definitiva se pregunta «si el silogismo se considera el tipo fundamental de razonamiento, si el estudio de sus leyes es co-extensivo con el estudio de la lógica deductiva».

Su respuesta es que «no se puede concebir que el silogismo sea el único proceso esencial de razonamiento», que hay que investigar las relaciones que sostienen las verdades de la lógica con otras verdades de la ciencia y con los métodos del arte de razonar.

La práctica misma de Aristóteles contradice su opinión de que los silogismos se prueban desde silogismos y por medio de silogismos. Por medio de un silogismo parece que sólo se puede probar la proposición de su conclusión; para probar el silogismo entero sería preciso construir una implicación entre las proposiciones que lo componen, es decir, se necesitaría la lógica de enunciados —en opinión de Patzig— (desarrollada posteriormente por los megárico-estóicos).

Pero algunas opiniones de Patzig, Bochenski, etc., sobre la silogística aristotélica—iniciadas por Lukasiewicz— no son sostenidas actualmente por importantes investigadores, en especial la opinión de que el silogismo aristotélico es una tesis lógica y no una inferencia. Desde el punto de vista lógico la cuestión no tiene mayor importancia, puesto que se puede pasar de una a otra, y, viceversa, por el «teorema de deducción» y el de «completud». La posición de Lukasiewicz (y la de Bochenski, Patzig, etc.) contradecía la tradición, que consideraba el silogismo aristotélico como una inferencia. No obstante, a partir de 1970, dos artículos de G.G. Granger N. Oeffenberger respectivamente, publicados en la revista *L'age de la science,* vol. III, nº 4 *(Le syllogisme catégorique d'Aristote,* págs. 281-310; *Pour une fondation plurivalente de la théorie aristotélicienne du syllogisme,* págs. 311-322), han vuelto a reforzar los argumentos que apoyan la idea tradicional. Sobre esta cuestión publicó J. Sanmartín un artículo en la revista *Teorema* (vol. III, núms. 2-3, 1973). Posteriormente J. Corcoran realizó varias investigaciones que refuerzan esta misma posición, de las que concluye: «el sistema deductivo desarrollado por Aristóteles en su «lógica segunda» es un sistema de deducción natural y no un sistema axiomático, como se había pensado anteriormente (Lukasiewicz). La lógica de Aristóteles es autosuficiente en dos sentido: a) que no supone otros conceptos lógicos, ni incluso los de la lógica proposicional, b) que es fuertemente completa en el sentido de que cada argumento válido formulable en el lenguaje del sistema es demostrable dentro del sistema por medio de una deducción formal» *(Journal of Symbolic Logic,* vol. 37, nº 4, Dic. 1972, págs. 696-702; *Aristotle's natural deduction System,* ibid. págs. 437; *A mathematical model of Aristotle's syllogistic, Archiv für Geschichte der Philosophie).*

Como es sabido, en el S. XIX se reconstruyen los dos núcleos de las lógicas clásicas, aristotélica y megárico-estóica: desde contextos y objetivos diferentes entre sí, Boole desarrolla la lógica de enunciados y Frege la de predicados cuantificada.

De cara al objetivo de la presente nota voy a remontarme a Frege. Se suele admitir normalmente, que instaura con su teoría de la cuantificación una nueva etapa para la lógica. Aparte de múltiples correcciones de línea y otros hallazgos originales (contra la opinión de Ventura Rey y Prosper, Teorema VIII, pág. 334), lo fundamental de Frege es su uso de la noción de *sistema formal.*

De Frege a Russel prima el interés por deducir las matemáticas de axiomas lógicos por medio de reglas formales (logicismo). Por otro lado, se fue consiguiendo reducir al mínimo el número de axiomas lógicos: Russell, Sheffer, Lukasiewicz, Bernays, Wadjsber, etc.

Pero Löwenheim *(Uber Möglichkeiten im Relativkalkül, Math Ann.* 76, 1915, págs. 447-470) toma otro camino, que se retrotrae a Schröder: fundamenta la lógica de predicados sobre la *teoría de conjuntos,* abriendo así el campo de la *teoría de modelos.* Deja a un lado axiomas, reglas de inferencia y la noción de demostrabilidad. Establece el siguiente teorema: si una fórmula de la teoría de la cuantificación es satisfacible, lo es en un dominio denumerable, es decir, si una lógica L es consistente es un modelo sobre enteros positivos. De gran importancia histórica, este teorema fue perfeccionado dentro de los teoremas de completud por Skolem, Gödel, Tarski y Malcev, y usado significativamente por otros (Henkin, Vaught, Hanf, Beth, etc.). Se han simplificado su demostración: Henkin (1949), Hasenjaeger (1953), Novak (1950), Rasiowa-Sikorski (1950), Beth (1951-3). (Ver, por ejemplo, J.B. Rosser, *Deux esquisses de Logique,* París, 1955, págs. 39-43; Beth, *L'existence en mathématique,* París, 1956, págs. 11-34; *Some Consequences of the theorem of Löwenheim-Skolem-Gödel-Malcev, Amsterdam Proceedings,* vol. 56, 1953; una reseña histórica breve en Bell y Slomson, *Models and Ultraproducts,* pág. 86).

Skolem en *Über die mathematische Logik (Norsk matematisk tidsskrift* 10, 1928, págs. 125-142) utiliza un método, sugerido por la demostración de Löwenheim de su teorema de 1915 (págs. 450-6), que llega a ser la base de la teoría de Herbrand, como este mismo reconoce: se trata de engendrar de un modo ordenado ciertas constantes con las que obtener casos particulares de una fórmula dada de la teoría de la cuantificación, y sacar, a partir de ahí, conclusiones acerca de dicha fórmula. Herbrand parte de una fórmula cuantificacional en forma prenex de Slokem, tratándola de satisfacer con una serie de constantes individuales no primitivas hasta construir una conjunción o disyunción de Herbrand para dicha fórmula. Así, por ejemplo, para la disyunción podemos concluir: existe un número r, tal que la r-ésima disyunción de Herbrand de, digamos G, tiene, por las leyes de la lógica proposicional, el valor de verdad V para toda elección de funciones lógicas definidas sobre S (la serie de constantes individuales), entonces la fórmula G es válida.

Para pasar de una fórmula prenex a una fórmula cuantificacional cualquiera es preciso definir de un modo más general la conjunción y disyunción de Herbrand, dintinguiendo entre variables generales y restringidas. Pero, por el método de Herbrand, es una operación mecánica verificar si la r-ésima disyunción de Herbrand de una fórmula, digamos G, es válida.

El teorema fundamental de Herbrand demuestra que el método axiomático y el de Herbrand se implican recíprocamente (J. Herbrand, *Ecrits Lógiques,* París, 1968, págs. 138-142). Gödel demostró, a su vez, que el método axiomático y el conjuntista son equivalentes (teorema de completud, 1930). Así los tres métodos son equivalentes, pero, como Herbrand adoptaba el punto de vista finitista, no podía admitir las nociones conjuntistas. En consecuencia, Herbrand (con la escuela hilbertiana) sólo considera problema válido el de las relaciones entre su método y el axiomático, y a resolverlo dirige su famoso teorema fundamental. En una nota de 1931, Herbrand expone sus ideas sobre Hilbert y Brouwer-formalismo e intuicionismo (*Note nos signée sur Herbrand* 1930, *Annales de l'Université de Paris,* 6, 1931 a, *Ecrits Logiques,* págs. 186-9).

Gödel, y ulteriormente Dreben, Andrews, Aanderaa, Denton y Scalon, corrigieron algunos errores de Herbrand, siendo uno de los más importantes por sus consecuencias el de que no creyera que al realizar ciertas aplicaciones de una regla de transformación aumentara el orden de una fórmula (ver el prefacio de van Heijenoort a los *Ecrits Logiques* de Herbrand). Luego veremos cómo una interpretación excesivamente restrictiva del teorema de Herbrand (restingiéndolo a fórmulas prenex) por parte de importantes autores (Gentzen, Hilbert-Bernays, Church, Bernays) ha limitado por algún tiempo su influencia.

Aunque el problema de la decisión es una de las cuestiones fundamentales de la lógica de los años 20 y

30 —llegando a importantes resultados, que van de Skolem y Behmann a Church, pasando por Gödel y otros—, me referiré a él ulteriormente, al tratar el cierre de las tablas semánticas y de ciertas propiedades de subclases de fórmulas de cara a su calculabilidad efectiva (ver, por ejemplo, Bernays y Schönfinkel, *Zum entscheidungsproblem der mathematischen Logik, Math. Ann.*, Vol. 99, 1928, págs. 342-372, que además subraya la importancia de las dualidades en Lógica).

Dado el carácter de la presente nota, voy a centrarme ahora en algunas consideraciones sobre la DEDUCCION NATURAL, que entre otras cosas inicia la deducción por árboles, frente a la deducción lineal típica de la axiomática.

G. Gentzen publicó sus cálculos de *Deducción Natural* en 1934 (*Mathematische Zeitschrift*, t. 39, págs. 176-210 y 405-431; en 1955 R. Feys y J. Ladriére publicaron una traducción francesa con prefacio del primero y notas muy amplias e ilustrativas de ambos, de la cual *Cuadernos Teorema* anuncia una versión castellana).

La exposición más completa y actual de la *Deducción Natural* es la de D. Prawitz, *Stockolm Studies in Philosophy* 3, 1965 (reseñada por R. Thomason en el *Journal of Symbolic Logic*, 32, 1967, págs. 255-6), incluyendo incluso su aplicación a la lógica modal.

R. Feys escribió un artículo en 1946 (*Les méthodes récentes de déduction naturelle, Revue Philosophique de Louvain*, t. 44, págs. 370-400), donde proporciona información histórica acerca de dichos cálculos (que incorpora literalmente, como nota A, a su traducción de los dos artículos de Gentzen citados) y algunas observaciones a modo de conclusión. Al año siguiente Feys vuelve a publicar otro artículo, complementario del anterior, sobre los métodos de deducción natural (*Note complémentaire sur les méthodes de déduction naturelle, Revue Philos. de Louvain*, 45, 1947, págs. 60-72), pero esta vez en las versiones de Jaskowski (*On the rules of suppositions in formal logic, Studia Logica*, n. 1, Varsovie, 1934, 32 págs.), que le proporcionó Perelman (dedicado a la lógica de la argumentación retórica), y Ketonen (*Untersuchungen zum Prädikatenkalkül, Annales Academiae Scientiarum Fennicae*, series A, 1. *Mathematica-physica* 23, Helsinki, 1944, 71 págs.), concluyendo también con «ciertas observaciones sobre las posibilidades de expresión que ofrecen los métodos de deducción natural». Jaskowski construyó un método idéntico al primero de Gentzen (cálculo N), independiente de éste, poniendo en práctica una sugerencia de Łukasiewicz había hecho en 1926. En este último trabajo Feys expone además una simplificación del segundo método de Gentzen (cálculo L) y utiliza dos variates de Kentonen

Feys expone los cálculos de deducción natural en su *Logistik* I (1944, §§ 9, 10, 16 págs. 230-253 y 283-291). Johanssen los adapta a su «cálculo mínimo» en 1936. Hay también diversos trabajos de Popper y otros que siguen métodos análogos a los del cálculo N.

H.B. Curry ha hecho una importante reducción (*A theory of Formal Deducibility, Notre Dame mathematical lectures*, nº 6, 126 págs.; y *A note on the reduction of Gentzen's calculus LJ* (segundo método, cálculo intuicionista), *Bull. Americ. Soc., 1939, t. 45, págs. 280-293).* Esta reducción tiene la ventaja de simplificar el cálculo LHJ (nuevo método, cálculo intuicionista). Demuestra la equivalencia del cálculo LJ y las lógicas intuicionistas. Interpreta los enunciados bajo supuestos como enunciados «epiteóricos» y construye los sistemas L en varias etapas lógicas sin negación ni cuatificación, lógicas con cuantificaciones, lógicas con negación intuicionista o clásica. Aplica L a la lógica modal (S4 de Lewis). Demuestra el teorema fundamental para cada una de las etapas, aligerando así la demostración.

La introducción de los cálculos de deducción natural en E.E. U.U. fue hecha por Bernays, que enseñó en Princeton el cálculo NK en 1936.

Un sistema de deducción natural análogo al de Gentzen es el de L. Nolin (*Sur un système de «deduction naturelle», Comptes rendues des séances de l'Académie des Sciences,* París, vol. 246, 1958, págs. 1128-1131). Pero la simplificación más conocida es la de Quine (*On natural deduction, The Journal of Symbolic Logic*, vol. 15, nº 2, June, 1950, págs. 93-102; recogido también en los *Métodos de la Lógica).* El objetivo prioritario de su método es establecer la implicación y secundariamente la validez general. Para marcar las fórmulas usa columnas con asteriscos, las cuales recuerdan la notación de Jáskowski (como Quine mismo indica); las reglas de generalización se simplifican marcando las variables en cuestión.

Una versión más perfeccionada es la de R. Montague y D. Kalish (*Remarks on description and natural deduction, Archiv für Mathemasche Logik und Grundlagenforschung*, Band 3, 1957, págs. 50-73), que Garrido utiliza en la exposición de la «Teoría de la identidad y descripciones» en su *Lógica Simbólica*, pág. 222.

La información que ahora interesa —sin entrar en la descripción técnica de los cálculos— es la que proporciona Feys en los trabajos anteriormente citados o la del mismo Gentzen en la introducción a *Investigaciones sobre la deducción lógica.*

El campo sobre el que Gentzen trabajó es el «cálculo funcional restringido» (Hilbert) o lógica de predicados, tanto en la versión llamada clásica como en la intuicionista. Parte de la formalización del razonamiento lógico elaborada por Frege, Russell, Hilbert, pero desde otros supuestos.

Presenta dos grupos de cálculos:

1) Los cálculos N («cálculos de deducción natural») que usan «aserciones con supuestos» (análogos a los ya citados de Jaskowski) y

2) Los cálculos L, que usan «aserciones de consecuencia», reflejando de Hertz la notación de secuencias y reglas expresadas por los esquemas de Strukturfiguren (Hertz, *Über Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme, Math. Ann.*, t. 87, 1922, págs. 246-269; y t. 89, 1923, págs. 76-102; y con el mismo título, *Ann. Phil. und phil. Krit.*, t. 8, 1929, págs. 178-204; y *Math. Ann.*, t. 101, 1929, págs. 457-514; *Über Axiomensysteme von Satzsystemen*, D.M.-t. 38, 1929, 2 Abt. págs. 45-6). En un artículo publicado en Febrero de 1932 *(Über die*

Existenz unabhängiger Axiomensysteme zu unendlichen Satzsytemen, Mathematische Annalen, 107, págs. 329-350) Gentzen recoge cierta metodología de Hertz, e incluso cierta terminología, que luego usó en las *Investigaciones,* como, por ejemplo, la transformación del «silogismo» en «cut», el «antecedente» y «consecuente» de las secuencias, etc., y sobre todo la noción de «consecuencia lógica». (Sobre estas aportaciones y otras, ver la introducción de M. E. Zsabo a la obra de Gentzen en *The Collected Papers of G. Gentzen,* North-Holland, 1969).

Gentzen introduce el cálculo NJ para la lógica de predicados intuicionistas y el NK para la lógica de predicados clásica; el cálculo LJ para la intuicionista y el LK para la clásica. Como es sabido, los intuicionistas rechazan el clásico principio del tertio excluso.

La principal razón de la creación del nuevo cálculo L está en las dificultades de prueba, en el cálculo N, del Teorema Fundamental.

Este teorema dice que «toda demostración puramente lógica puede llevarse a una forma normal determinada, que no es unívoca» (*Recherches,* pág. 4). Gentzen cree que parte de este teorema había ya sido demostrada por Herbrand. Se lo suele llamar teorema de Herbrand-Gentzen. Respecto a esta cuestión van Heijenoort dice en su introducción a la obra de Herbrand:

«En sus escritos de 1934 Gentzen estableció un verschärfter Hauptsatz para un sistema LK y escribe (nota 6, pág. 409, o 1955 pág. 115) que el teorema fundamental de Herbrand es un caso particular de él («Spetialfall»). Parece pensar, contrariamente al texto mismo de Herbrand, que su teorema no se aplica más que a fórmulas prenex (y lo mismo Hilbert-Bernays, Church, Bernays); por tanto, traducido al sistema LK, el teorema se aplicaría, según Gentzen, a una secuencia cuyo antecedente es vacío y el consecuente consiste en una fórmula prenex, mientras que el verschärfter Hauptsatz se aplica a toda la secuencia cuyas dos fórmulas son prenex. Es precisamente ahí donde Gentzen ve la mayor generalidad de su resultado. Pero Herbrand no ha restringido nunca su teorema a fórmulas prenex y, como el verschärfter Hauptsatz, una vez que se traduce al sistema LK a una versión corriente de la teoría de la cuantificación, sólo se aplica a fórmulas de una estructura particular, es de hecho el verschärfter Hauptsatz el que es un caso particular del teorema fundamental de Herbrand. La Mittelsequenz de Gentzen es, en el sistema LK, el análogo de la disyunción de Herbrand. El estudio de los campos permite a Herbrand dar más información sobre la naturaleza y el papel de esta disyunción que la que da Gentzen acerca de la Mittelsequenz. La existencia de demostraciones sin corte *(Hauptsatz de Gentzen,* 1934, pág. 196, o 1955, pág. 49) es análoga, para el cálculo LK, al resultado, establecido por Herbrand en 1929, según el cual la regla de implicación es una regla derivada, es decir, superflua, en el sistema adoptado por Herbrand para la teoría de la cuantificación (págs. 143, 182, y la nota D., escrita por Dreben, en van Heijenoort, 1967, pág. 571). Subrayemos finalmente ésto: si para un cierto número r la r-ésima disyunción de Herbrand de una fórmula F es válida (en lógica de proposiciones), la fórmula F tiene, en el sistema de Herbrand, una demostración que evidentemente goza de la propiedad llamada de subfórmulas» *(Ecrits logiques,* págs. 10-1).

Gentzen adaptó este segundo cálculo (L) a los formalismos de Russell, Hilbert y Heyting con el nombre de LHJ (para la lógica de predicados intuicionistas) y LHK (para la clásica). También demostró la equivalencia entre los cálculos N y los L, tanto en la versión intuicionista como en la clásica.

Hay que añadir que Gentzen construyó las pruebas de su Hauptsatz para los cálculos NI y NK, pero no las aplicó. Una prueba del Hauptsatz de Gentzen para NI y una variante más fuerte para NK puede encontrarse en A.R. Raggio *(Gentzen's a Hauptsatz for the systems NI and NK, Logique et Analyse,* 1965, págs. 91-100).

Feys explica el sentido de los cálculos de Gentzen del siguiente modo:

«Ha despertado el uso, frecuente y natural en matemáticas, de los razonamientos a partir de un supuesto (estos razonamientos proceden, en suma, como las pruebas ex suppositione de los Antiguos). Para formalizar estos razonamientos deberá introducir la aserción 'esto es verdadero bajo todo supuesto' como elemento formalizado de sus sistemas. Lo hace bajo dos formas: implícitamente en sus sistemas N, explícitamente en sus sistemas L. Siendo B verdadero suponiendo U, se puede aceptar que U implica B. Esta regla no define la implicación por un equivalente que le es sustituible; permite introducir la implicación desde el momento que la deducción es posible: La gran novedad de los métodos L es esta introducción de la aserción bajo supuesto, a continuación la enunciación de las reglas de su manejo, que, en los sistemas, L, revestirán la forma explícita de 'figuras de estructura'. El método L 'clásico' o método LK introduce, por su parte, una cierta dualidad de la aserción bajo supuesto, la aserción de consecuencias alternativas ('de ésto se saca tal consecuencia o tal otra') con figuras de estructura apropiadas». (Prefacio de Feys a *Recherches sur la déduction logique,* págs. VII-VIII).

Estas figuras no recuerdan en general los esquemas de reducción usados por Hilbert y su escuela.

Resultados:

1. «La aplicación de los esquemas 'naturales' N permite demostrar los teoremas de la lógica intuicionista y no los de la lógica clásica. Para demostrarlos debe *introducirse el tertio excluso como axioma suplementario*; en efecto, es el único postulado que no es un esquema de deducción. Los esquemas L conducirán también únicamente a los teoremas intuicionistas, si no se razona más que sobre 'aserciones bajo supuestos' y no sobre aserciones con consecuencias alternativas.

2. «El del 'teorema principal': Si procedemos según los esquemas de la lógica L, todas las tesis demostrables pueden ser demostradas sin recurrir a eliminaciones (...) En un razonamiento por supuestos es posible demostrar todos los teoremas de la lógica construyéndolos por complicación sucesiva de una tautología inicial, sin eliminar nunca un término medio por un silogismo, además sin deber usar el moduns ponens» (ibid., pág. IX).

En su artículo de 1946 Feys compara los métodos de Gentzen a los de «valores de verdad», quince años anteriores, considerando que inciden mejor que otros en el aspecto deductivo: «se hacen razonamientos lógicos con vistas a establecer proposiciones 'verdaderas' o 'válidas'; se hacen razonamientos lógicos con vistas a sacar consecuencias». «Los nuevos métodos, y sólo ellos, proporcionan un acceso fácil a las lógicas 'no-clásicas'. El método de valores de verdad se traspasa sin dificultad de las lógicas polivalentes; los métodos de Gentzen se adaptan fácilmente a la lógica de los intuicionistas y a la lógica 'mínima'; ponen estas lógicas 'al alcance de todos'. Sobre este punto, subrayémoslo, los cálculos de valores de verdad y los de Gentzen tienen cada uno su dominio 'privilegiado': la lógica de los intuicionistas se expresa difícilmente en términos de lógicas polivalentes (con la ayuda de la matriz de Jaskowski); y, por el contrario, no se ve cómo adaptar los métodos de Gentzen a las lógicas polivalentes (por el hecho de que los 'teoremas de deducción' no parecen demostrables en ellos). Donde los métodos nuevos se vuelven indispensables, es en el terreno de los problemas metalógicos (problema de decisión, problemas de no-contradicción, y otros análogos» (págs. 399-400).

Siguiendo a Feys en su *Note Complémentaire* apuntaremos algo sobre los métodos de Jaskowski. La lógica que se deduce de las cuatro reglas de Jaskowski es la lógica bivalente formulada en términos de implicación y negación (la del sistema axiomático de Łukasiewicz). Jaskowski ha visto el partido que se puede sacar de su método para el estudio de los sistemas «incompletos», donde ciertos axiomas son omitidos o reemplazados por otros más débiles. Muestra además la equivalencia del sistema fundado sobre sus tres primeras reglas con una lógica «positiva» sin negación y que se deduce de dos axiomas de Lukasiewicz: ::pF(qFp) y ::(pF(qFr))F((pFq) F (pFr)).

Como esta lógica no menciona más que implicaciones, las proposiciones válidas en ella son las «positiv identische Implikationsformeln» de Hilbert-Bernays.

No menciona la posibilidad de deducir la lógica intuicionista desde la deducción natural, cosa que vió clara Gentzen en su primer método. Lo que sí indica es cómo obtener las proposiciones válidas en el cálculo de Kolmogoroff *(O principe tertium non datur, Matematitcheskij Sobornik,* t. 32, 1924-5, págs. 646-667).

Jaskowski muestra también que el «ex falso sequitur quodlibet» no se puede deducir en la lógica de Kolmogoroff, ni en la lógica formulada en 1936 por Johansson.

Sus esquemas para la deducción de proposiciones generales no permiten deducir una lógica intuicionista de proposiciones generales.

El segundo método de Gentzen puede tener dos variantes para las que Ketonen tiene interés. Los esquemas de Ketonen son *reversibles:* se puede deducir la expresión de encima de la línea tomando como premisa la de abajo. La aplicación repetida de esquemas reversibles permite la *descomposición:* un enunciado del cálculo de proposiciones puede descomponerse en una serie de enunciados compuestos sólo de proposiciones simples equivalentes a la primera (gracias a la reversibilidad de los esquemas). Pero el método de descomposición se limita a la lógica clásica de proposiciones.

Estas dos variantes han sido incorporadas a los cálculos corrientes de deducción natural (ver, por ejemplo, Kleene , *Introd a la metamatem.,* cap. XV).

Lo que los lógicos han subrayado frecuentemente es, como dice Feys, que los métodos «naturales» de deducción son también métodos «naturales» de expresión, que traducen ciertos encadenamientos de ideas de forma más obvia que la lógica formalizada ordinaria.

En el campo de la metamatemática se han sacado también consecuencias útiles del teorema de Herbrand-Gentzen, que suele formularse: si $A \supset A'$ es un teorema de cálculo de predicados de primer orden y si A es una conjunción, y A' una disyunción de formas normales prenex, entonces hay una H-deducción de $A \supset A'$:

Una tarea de la metamatemática, dice Craig, es relacionar conceptos sugestivos pero no elementales, de la teoría de modelos con conceptos de la teoría de la prueba más elementales que los anteriores. Beth mostró, usando una versión modificada del teorema de H-G que una cierta noción de definibilidad de la teoría de modelos para todos los sistemas de primer orden coincide con una cierta noción de teoría de la prueba *(On Padoa's method in the theory of definitions, Indagationes mathematicae,* vol. 15, 1953, págs. 330-9). Posteriormente Craig *(Three uses of the H-G theorem in relating model* *theory and proof theory, Journal of Symbolic Logic,* vol. 22, n. 3, 1957, págs. 269-285) generaliza los resultados de Beth de símbolos primitivos de predicados a fórmulas y términos arbitrarios: cualquier relación funcional obtenida entre conceptos que sean expresables en el sistema es ella misma expresable y probable en el sistema. Hace también una aplicación a la jerarquía de fórmulas de segundo orden. Y una tercera sobre un problema de axiomatizabilidad: para un sistema de primer orden existe un sistema axiomático del tipo deseado si y sólo si se satisface una cierta condición de la teoría de modelos.

En el mismo número de la revista indicada Craig publica, en las págs. 250-268, otro artículo *(Linear reasoning. A new form of the H-G theorem),* donde expone cómo se puede pasar del nivel libre de cuantificadores al nivel cuantificacional. En el teorema de Herbrand o en el Hauptsatz de Gentzen extendido se afirma que vale una cierta relación entre las estructuras de A y A', si A implica a A' (i.e., A⊃A' es válida) y además A es una conjución y A' una disyunción de fórmulas de primer orden en forma normal prenex, pero desgraciadamente la relación está descrita de una forma indirecta, relacionando A y A' con una tautología libre de cuantificadores. Y ésto es precisamente lo que resuelve Craig en este artículo. (Para estas cuestiones ver *Mostowski, Thirty years of foundational studies,* Oxford, 1966, págs. 43-50).

La línea del teorema de H-G es una base fundamental para la construcción de programas para la prueba de teoremas con ordenadores, la otra línea es la de las tablas semánticas de Beth. La obra de este autor tiene especial interés en el período preparatorio de algunos de los primeros programas.

Si queremos que una teoría deductiva sea lo más simple posible, es preciso tener un método que nos permita garantizar la independencia de los términos primitivos, como se hizo anteriormente con los axiomas. Para conseguir ésto, Beth partió del método de las definiciones de Padoa (1901), que consiste en la construcción de un modelo apropiado (artículo de 1953, citado antes). Estaba preocupado por aplicar los resultados del análisis de la teoría de modelos a la teoría de la prueba, por aplicar la semántica al análisis de las teorías deductivas; en concreto, como se verá en un artículo que comentaré después *(On remarks...),* estaba preocupado por encontrar un procedimiento de decisión para la validez intuicionista de las fórmulas clásicas válidas (Kleene le demostró luego que no existía tal procedimiento).

Comenzaré por algunas observaciones sobre el problema de la decisión. El problema se puede reducir a dos casos fundamentales: ¿Hay un método general que nos permita decidir si una expresión dada U es una tesis o no? ¿Hay un método general que permita decidir, para cualquier conjunto D de expresiones, si una expresión U dada está contenida en K(D) o no?.

El teorema de Church *(A note on the entscheidungsproblem, Journal of Symbolic Logic,* vol. 1, 1936, págs. 40-1 y 101-2) obliga a excluir la posibilidad de una solución general para ambos casos. De ahí que la investigación haya ido en direcciones particulares. Beth apunta tres *(Les Fondements logiques des mathématiques,* París, 1955, págs. 52-3, 41):

1) La investigación de una solución para clases especiales de expresiones (los primeros resultados fueron los de Skolem, 1919, y los de Behmann, 1922).

2) La investigación de casos particulares cuyo carácter insoluble es demostrable.

3) La reducción del problema de la decisión para ciertas clases de expresiones al mismo problema para otras clases (el primer resultado fue el de Löwenheim, 1915).

Más recientemente J. Friedman *(A computer program for a solvable case of the decision problem, Journal of the ACM,* 1963, pág. 348 vol. 10) apunta tres direcciones para mitigar los efectos del teorema de Church:

1) Restricción de la clase de expresiones que ha de ser considerada de modo que se abtengan casos solubles;

2) Construcción de procedimientos de prueba que reconozcan eventualmente cualquier teorema, pero que pueden proceder indefinidamente para un no-teorema;

3) Construcción de procedimientos de semi-decisión, que incluyan procedimientos de decisión para subclases que se sabe que son solubles y que, confrontadas con expresiones fuera de esos casos, pueden reconocer un teorema o fallar en el intento de alcanzar cualquier decisión.

Friedman mismo trabajó en la línea de esta tercera orientación, llegando a las conclusiones de Church y Ackermann.

El fondo de estas investigaciones reposa sobre la noción de calculabilidad efectiva, dándose pasos decisivos en la década de los años 30, pero sus orígenes se remontan a 1923 (Skolem). Fueron los trabajos de Gödel en 1931 los que le dieron un gran impulso, aunque anteriormente se habían emitido ideas análogas (M. Finsler y T. Brodén, 1926). Desde diferentes puntos de partida se ha llegado a conclusiones equivalentes, que se pueden resumir así:

a) Funciones computables-μ ssi funciones computables-Turing;

b) Funciones computables o algoritmo ssi funciones computables en sentido intuitivo;

c) Función recursiva-μ ssi función recursiva;

d) Funciones definibles γ-K ssi funciones computables;

e) Función recursiva-μ (computable) ssi función definible. γ-k

Así se ha podido definir con precisión matemática las nociones de algoritmo, procedimiento efectivo, etc. (Ver *Thirty years,* de Mostowski).

Entre 1951 y 1955 Beth se mueve en el contexto del tercer tipo de investigaciones del problema de la decisión que apunté antes. En 1955 da publicidad en dos escritos *(Remarks on natural deduction, Nederl. Akad. Wetenschap. Proc. Ser.* A, 1955, vol. 58, págs. 322-5; *Semantic Entailment and Formal Derivability,* ibid., vol. 18, *Afdel Letterk. Med.,* págs. 309-42) a su método de las tablas semánticas. Al final del primero de estos dos artículos razona la cuestión de la decisión para su sistema formal F (al que llama también sistema de deducción natural «por su similaridad con los sistemas construidos por Gentzen, Ketonen, Schütte, Kleene, Curry, Quine, y por sus estrechas conexiones con una aproximación semántica a los problemas de la lógica»): en vista de que no podemos decidir si una tabla es cerrada o no por una interpretación en la que introdujéramos individuos en la serie de fórmulas que constituyen la derivación, busca una salida tomada de la lógica intuicionista de Heyting. Piensa que «restringiendo adecuadamente las reglas del sistema formal F, obtenemos un sistema intuicionista correspondiente F'. Supongamos ahora que tenemos una derivación D en F, cuyo número crítico sea n. Entonces el problema de si hay o no una derivación análoga en F' (es decir, una derivación que comience con las mismas premisas y llegue a la misma conclusión) D', que tenga el mismo número crítico n, se reduce a un problema concerniente a la derivabilidad en el cálculo intuicionista sentencial y, por tanto, puede decidirse efectivamente, sobre la base de un resultado de Gentzen».

En 1958 Church escribe *An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory (Amer. Jounal of Mathem.,* págs. 345-363), de donde se puede concluir que no puede existir procedimiento efectivo para determinar en general, si es verdadero o no que Kn>O, para todo n; y, en general, que no puede existir procedimiento efectivo para la construcción de interpretaciones de sentencias.

El método de las TABLAS SEMANTICAS tiene su base en los contra-ejemplos clásicos, en la entasis aristotélica. Quine comunica a Beth que Hintikka había desarrollado también simultáneamente ideas semejantes *(Two papers on Symbolic Logic, Acta Phil Fenn,* Fasc. VIII, Helsinki, 1955). En el postcripto de *Semantic Entailment* Beth explica sus diferencias con Hintikka: este no usa tablas semánticas y su técnica consiste «en la extensión de cualquier conjunto consistente de fórmulas (cerradas) a un conjunto 'normal' completo y consistente». Tal técnica también había sido desarrollada previamente por Beth (e independientemente por Hasenjaeger y Henkin) en 1951 *(A topological Proof of the theorem of Löwenheim-Skolem-Gödel, Proceedings,* 54; *Some Consequences of the theorem of Löwenheim-Skolem-Gödel-Malcev,* ibid., 56, 1953) y lo mismo las conexiones con los resultados de Gentzen y Herbrand *(On Padoa's méthod,* 1953) y en *L'existence en mathematiques,* París, 1955).

En *Semantic Entailment* (págs. 9-10) presenta las características de su método:

1) Está en completa armonía con el punto de vista semántico, en cuanto ha sido obtenido por transformación de una tabla, establecida sobre la base de consideraciones semánticas concernientes al significado de las palabras «todo», «alguno», «no», «y», «si... entonces».

2) En total acuerdo además con el punto de vista de una teoría formal de la derivabilidad, pudiendo alternativamente ser construído como una secuencia de aplicaciones de ciertas reglas de inferencia, que pueden ser formuladas en términos puramente «topográficos», sin referencia alguna al significado de las sentencias (o fórmulas) a las que esas reglas se aplican.

3) Sigue muy estrechamente la manera en que argüimos, cuando no intentamos adaptarnos a ninguna teoría lógica preconcebida. Al construir un cierto sistema de Deducción Natural como el dado, primero por Gentzen y luego por otros autores (Curry, Schütte, Hasenjaeger, Kleene, Feys) obtendríamos una sistematización de los principios, fortaleciendo su derivación y todas las similares. Curiosamente, sin embargo, esos autores estuvieron guiados en sus construcciones por consideraciones pertenecientes a la teoría formal de la derivabilidad más que por concepciones semánticas. Por su parte, Carnap, Popper, Quine y Scholz construyeron la teoría de la derivabilidad sobre la base de consideraciones semánticas, pero no establecieron las estrechas conexiones entre la semántica y la teoría de la derivabilidad que Beth intentará hacer.

4) Satisface automáticamente el principio de las subfórmulas de Gentzen, en cuanto que la construcción de la tabla original consiste en disolver las premisas y la conclusión en subfórmulas más pequeñas. Por tanto, los resultados del Teorema de Herbrand, el Teorema de Löwenheim-Skolem-Gödel, el Teorema de las subfórmulas y el Hauptsatz extendido de Gentzen, el Teorema de Consistencia de Bernays, son obtenidos fácilmente desde el punto de vista de Beth. Al mismo tiempo, su aproximación realiza considerablemente la concepción de un método puramente analítico, que ha jugado tan importante papel en la historia de la lógica y la filosofía.

En *La Crise de la raison et la lógique* (París, 1957; conferencias en la Universidad de Liège, mayo del 66) establece un Teorema de fórmulas parciales paralelo al de Gödel, pero que incluye al mismo tiempo el Hauptsatz, Teilformelnsatz, erweiterter Hauptsatz de Gentzen (pág. 38). Sigue preocupado por la aplicación del método de las tablas a la lógica intuicionista (pág. 44).

En *Quelques remarks sur la semantique* (1956) indica que un punto de partida para una lógica teórica consiste en construir tablas semánticas que, si cierran, son susceptibles de transformarse en deducciones formales pertenecientes a un cierto sistema de deducción natural F, semejante al sistema NK de Gentzen.

Posteriormente, en 1959 *(Considérations heuristiques sur les méthodes de déduction par sequences, Logique et Analyse,* págs. 153-9), intenta dar una explicación de la estructura de los sistemas LJ y LK de Gentzen, elucidando dos puntos: la introducción de secuencias con varias fórmulas en el consecuente y la obtención de un cálculo intuicionista limitando el número de fórmulas del consecuente a una (o cero).

Al año siguiente, aunque todavía no ha desarrollado la teoría cuantificacional, llega a conclusiones importantes desde su método *(Logique inférentielle et logique biva-*

lente de l'implication, Math, du XX siècle, 1960, vol. I, págs. 11-23). «Es, sin embargo, interesante constatar que, ya al nivel extremadamente elemental en que nos hemos movido e incluso al nivel de la pura lógica de la implicación, dimos forzosamente con dos sistemas lógicos distintos, que hemos llamado lógica inferencial y lógica bivalente. El desarrollo de la lógica bivalente produce la lógica clásica, mientras que el desarrollo paralelo de la lógica inferencial da lugar a la lógica intuicionista de Brouwer y Heyting. La adjunción del esquema iij" (V:K/F:L', Z//V:Z), o de un principio equivalente (por ejemplo, la ley de Peirce: ∅ /(((A→ B)→ A)→ A) bastan para pasar de la lógica intuicionista a la lógica clásica. En consecuencia, la distinción entre lógica intuicionista y lógica clásica se encuentra, por así decir, al nivel de la pura lógica de la implicación» (pág. 22).

En síntesis, el proceso que sigue Beth es el siguiente:

1. Tabla deductiva cerrada.

2. La deducción natural obtenida por la conversión de una tabla deductiva cerrada.

3. La tabla semántica cerrada.

4. La tabla semántica cerrada suplementada.

5. La deducción natural obtenida por la suplementación y conversión de una tabla semántica cerrada.

1 y 2 son equivalentes: lógica intuicionista.

3, 4 y 5 son equivalentes: lógica clásica (o de dos valores).

La lógica clásica es más fuerte que la lógica inferencial en el siguiente sentido: toda deducción que es inferencialmente posible es también clásicamente posible. Las deducciones correspondientes a la secuencia ∅/((A→ B)→ A)→ A (ley de Peirce) y a la secuencia ∅/(Ex)((Ey)A(y)→A(x)) (ley de Platón) son clásicamente realizables, pero no inferencialmente *(Aspects of Modern Logic,* Dordrecht, 1970, p. 36).

En la misma página del artículo de 1960 citado un poco más arriba señala además que «la construcción de la lógica por los métodos discutidos en este estudio constituye una cierta síntesis de tres tendencias dispares, a saber:

1) La idea de una lógica pura de la implicación (Tarski, antes de 1930).

2) La introducción por Gentzen y Jasjowski (1934) de los métodos de deducción por secuencias.

3) Los intentos de relacionar la teoría de la deducción formal con la interpretación semántica de los símbolos lógicos por varios autores (Beth, Hintikka, Kanger, Schütte, desde 1955) (Hintikka, *A New Approach to sentencial Logic, Soc. Sc. Fenn. Commentationes physico-mathematicae,* vol. 17, n. 2, 1953; *Notes on Quantification Theory,* ibid., vol. 17, n. 2, 1955; *Two Papers on Symbolic Logic, Acta Phil. Fenn.,* vol. 8, Helsinki, 1955; K. Schütte, *Ein System des vernüpfendes Schliessens, für Mathematische Logik und Grundlagenforschung,* 2, 1956; *Beweistheorie,* Berlín, 1960; S. Kanger, *Provability in logic,* Stockholm, 1957; también la disertación, no publicada, del discípulo de Shannon, Trenchard More, 1956).

Las primeras axiomatizaciones de la lógica partían de principios aparentemente arbitrarios, cuya base semántica se veía después; ahora, al revés, el método de Beth permite desgajar la deducción formal partiendo de la interpretación de los símbolos lógicos *(Aspects,* pág. 21).

H. Leblanc ya llamó la atención en 1957 acerca de la importancia del razonamiento indirecto como medio de evitar complicaciones al transformar las tablas cerradas en deducciones formales. Ideas que desarrolla Beth en *Observations au sujet du raisonnement indirect (Logic et Analyse,* 1961, págs. 166-173). Hay un prejuicio negativo (Schopenhauer, Goblot, R.L. Goodstein, Bouligand y Desgranges, E. Lefèbvre, etc.) sobre el razonamiento indirecto, de manera que, incluso en los casos en los que resulta más natural, tiende a convertirse en directo: sólo serviría para establecer una conclusión negativa. «En el presente estudio, dice Beth, me propongo analizar las circunstancias que explican por qué, incluso para una conclusión afirmativa, se impone frecuentemente un razonamiento indirecto y su conservación en un razonamiento directo se vuelve difícil» (pág. 166). Esta idea ha sido incorporada en la estrategia de los programas para la prueba de teoremas lógicos.

Antes de reseñar los artículos en los que Beth hace observaciones acerca de la mecanización de la prueba de teoremas haré un resumen bibliográfico, siguiendo el orden cronológico, de los principales artículos y libros en los que expone el método de las tablas:

1. a. *Remarks on Natural Deduction,* 1955.
   b. *Semantic Entailment and Formal derivability,* 1955 (fundamental).

2. *La crise de la raison...,* 1956.

3. a. *Considerations heuristiques sur les méthodes de deductions par sequences,* 1959.
   b *The Foundations of Mathematique. A Study of philosophy of Science,* North-Holland, Amsterdam, 1959 (sda. ed., 1968, págs. 177-200).

4. *Logique inférentielle et logique Bivalente de l'implication,* 1960.

5. *Observations au sujet du raisonnemaent indirect,* 1961.

6. *Formal Methods,* 1962 (págs. 9 ss/122 ss).

7. *Aspects,* 1970 (págs. 22-62).

8. *Quelques remarques sur la sémantique, Rev. phil. de Louvain* pp. 607-625, 54, 1956.

Seguramente la mejor discusión de las tablas deductivas la hizo Beth en *Logique inférentielle...,* reescrita en *Formal Methods.*

E.M. Barth realizó un arreglo sistemático de las reglas de Beth para sus tablas semánticas *(On the transformation of closed semantic tableaus into natural and axiomatic deductions, Logique et Analyse,* 1966, págs. 147-170), donde retoma a Gentzen. «En sus libros y artículos E.W. Beth ha subrayado frecuentemente que es siempre posible transformar una tabla semántica cerrada para una secuencia K/Z, con una fórmula Z en el consecuente, en una deducción natural de un tipo muy similar a los sistemas N de Gentzen. Con respecto a la lógica implicacional están suficientemente claras las reglas con las que se puede realizar esta transformación. Pero cuando salimos de este marco el sistema de reglas necesario se presenta en la obra de Beth sólo de una forma más bien embrionaria. La razón de esto se basa en el hecho de que Beth nunca presentó el método de las tablas deductivas sistemáticamente, excepto para la lógica implicacional, mientras que la conversión de una tabla semántica en una deducción natural consistirá en general en añadir ciertas fórmulas, de modo que pueda leerse como una tabla deductiva. Si se hace ésto correcta y sistemáticamente, la transformación subsiguiente de una tabla deductiva en una deducción natural es totalmente trivial. Más precísamente, una tabla deductiva cerrada *es* una deducción natural, presentada en una disposición gráfica especial» (pág. 147).

Rafael Beneyto desarrolló la transformación de las tablas semánticas de Beth en las tablas analíticas de Smullyan (Smulyan, *First-Order Lógic,* Berlín, Springer-Verlag, 1968) (R. Beneyto, *Laberintos analíticos, Teorema,* dic. 1971; *Arboles, lógica y mecanismos de decisión,* ibid. III/2-3, 1973, págs. 289-313). En la misma línea de Beneyto, G. Coray, *Intelligence Artificiélle,* Lausanne, Mai, 1973, cáp. II, págs. 82-112).

Intentaré ahora reseñar algunas observaciones de Beth acerca de la mecanización de la prueba de teoremas *(On machines which prove theorems, Simon Stevin 32 y Formal methods,* cap. VII, págs. 112-121; *On the so-called 'thought machine', Aspects,* cap. V, págs. 63-74; indirectamente. *Considerations about logical thought,* ibid. cap. IX, págs. 118-139; *Observations concerning computacion, deduction, and heuristics,* en *Computer Programming and Formal Systems,* eds. P. Braffort y D. Hirschberg, Amsterdam, 1967, págs. 21-32).

Una línea de investigación es la de la INTELIGENCIA ARTIFICIAL, que parte de la obra de Newel y Simon *(The Logic Theory machine-A complex information processing systems, IRE Transactions on information theory,* vol. IT-2, n. 3, Sept. 1956, págs. 61-79; Newel, Shaw, Simon, *Empirical explorations of the logic theory-machine, Proc. of the Wester Joint Computer Conf.,* feb. 1957, págs. 218-230; *Programming the logic theory machine,* ib. págs. 230-240; *Report on a general problem-solving program, Proc. of the Intern. Conf. on Inform. Processing,* Unesco House, París, 1959, págs. 256-64) y luego la de H. Gelernter (& N. Rochester, *Intelligent behavior in problem-solving machines, IBM Journal of Research and Development,* vol. 2, n. 4, Oct. 1958, págs. 336-345; y varios sobre teoremas de geometría).

Newel y Simon partieron del llamado BRITISH MUSEUM METHOD, que se basa en el principio de sustitución, pero equipándolo (para evitar excesivo con-

sumo de tiempo y memoria) con recursos heurísticos, que permiten seleccionar las sustituciones más adecuadas de cara al éxito de la prueba. Estos recursos se toman de la manera en que el hombre usa su inteligencia en situaciones similares. Una descripción de este método se puede encontrar en la obra citada de Newel y Simon, en S. Kanger *(A simplified proof method for elementary logic,* en *Computer Programming and Formal Systems,* págs. 7), y en Ana María Torres *(Los primeros intentos de prueba automática de teoremas en el cálculo de enunciados, Teorema,* vol. IV/4, 1974, págs. 490-7). El resultado de tal método fué la prueba de 38 problemas de 52 del capítulo 2 de los *Principia Mathematica* (por el algoritmo de Hao Wang se tarda 1/2 minuto).

Beth estudia la aportación de sus tablas semánticas al problema de la mecanización de las pruebas, como una investigación sobre la deducción formal. Se inclina más por los métodos algorítmicos que por los heurísticos, opinando que van más de acuerdo con la línea histórica de la lógica.

Sobre la base de la obra de Kanger y la de Beth, D. Prawitz y N. Voghera *(A Mechanical Proof Procedure and its Realization in an Electronic Computer, Journal of ACM,* vol. 7, n. 2, Abril, 1960, págs. 102-128) realizaron un programa para una computadora electrónica (Facit EDB de la AB Atvidabergs Industrier de Stockholm) por el que es posible instruir a esta máquina para que realice deducciones del cálculo de predicados. La máquina realiza un número simple de deducciones. Lo importante es que ha simplificado bastante los métodos de deducción, que pueden ser continuados con máquinas más potentes. Una investigación similar es la de

P.C. Gilmore *(A program for the production of proofs of theorems derivable within the first order predicate calculus from axioms, Proceed. of the First Intern. Conf. on Inform. processing,* Unesco House, París, 1959, págs. 265-273), que tiene en cuenta también los métodos de Hintikka y la aplicación a teoremas de la geometría euclidiana de la investigación de Gelernter y Rochester *(Intelligent behavior in problem-solving machines, IBM Journal of Research and Development,* vol. 2, n. 4, Oct., 1958. Págs. 336-345).

Beth señala que las tablas semánticas cumplen el principio de las subfórmulas: todas las fórmulas que aparecen en una deducción de una tesis U son subfórmulas de U. Principios que satisfacen de una forma muy débil los sistemas de deducción axiomática tipo Hilbert (que usaron Newel y Simon), donde las sustituciones se multiplican enormemente (a pesar de recursos como el de Lyndon, que distingue entre subfórmulas positivas y negativas) y los sistemas de deducción natural tipo Gentzen (NK), que incluyen, en la deducción de una fórmula, además de sus subfórmulas, las negaciones de éstas.

Parece claro que el método de las tablas semánticas tiene ventajas sobre los indicados, pero la complicación principal se relaciona con el teorema de Church (1937): no hay procedimiento de decisión para la lógica elemental. Beth razona entonces así:

Está claro que el número n (U) de parámetros individuales a, b, c, ... que tiene que ser introducido al intentar deducir una fórmula dada U es aquí el factor crucial. Una vez que ha sido fijado n (U), la construcción de una tabla semántica se reduce a un procedimiento finito. Por tanto, el problema de simplificar esta construcción (o, en cualquier caso, de evitar complicaciones innecesarias) nos lleva a dos problemas parciales:

1) Minimizar o fijar el valor de n(U).

2) Dado n(U), simplificar la construcción de la tabla.

Por consiguiente, si fijamos, de una vez por todas, n (U), de tal manera que, siempre que una fórmula U sea deducible, puede acabarse su deducción introduciendo a lo más n (U) parámetros individuales. Sin embargo, ésto implicaría la existencia de un procedimiento de decisión efectivo, cosa excluída por el teorema de Church.

La única solución es hacer una selección inteligente del orden relativo en que hay que hacer las operaciones, de modo que se simplifique la construcción.

La aplicación mecánica (no sistemática) del método de las tablas hará que introduzcamos demasiados parámetros y que se agote la capacidad de la máquina, si la tabla no cierra. Por tanto, hay que evitar operaciones inútiles (problema 2). Para ello deben tenerse en cuenta los diferentes tipos de problemas que tiene que manejar la teoría lógica de la máquina.

a) Inspeccionar una prueba dada.

b) Probar un teorema dado sobre la base de supuestos dados.

c) Descubrir teoremas deducibles de los supuestos dados.

Respecto a (a): tenemos que estimar el número y tipo de los parámetros individuales que tienen que ser introducidos. Respecto a (b): tenemos que proporcionar a la máquina recursos heurísticos. Hay casos de problemas de decisión que son solubles: para ciertas clases de fórmulas U pueden ser efectivamente computado un número n (U). Es preciso ayudarse de un análisis estadístico de la distribución de las operaciones, proporcionándole a la máquina las más adecuadas de cara al éxito. Y lo mismo para el caso (c): evitar los resultados triviales.

Beth opina que lo mejor es comenzar por (a). Se sabe que si una fórmula U es probable, existe una prueba de tal o cual forma (en éso se basan las tablas). Esto instruye a la máquina para otros casos. Por lo demás, piensa que los recursos heurísticos deben ser más bien los del análisis estadístico de las operaciones, cosa que han tenido en cuenta investigadores posteriores.

Los trabajos de Hao Wang *(Toward Mechanical Mathematics, IBM Journal,* Jan., 1960, págs. 2-22; *Mechanical mathematics and inferential analysis,* en *Computer Programmaing,* págs. 1-20; *Proving Theorems by Pattern Recognition I, Comm. of the ACM,* vol. 3, 1960, págs. 220-234, y II, *The Bell System Technical Journal,* vol. XL. n. 1, Jan. 1961, págs. 1-41) han dado predominancia definitiva a los procedimientos algorítmicos, a pesar de las críticas a las bases lógicas usadas (por ej., Davis).

Los programas para la prueba automática de teoremas lógicos posteriores a los de Hao Wang son, en gran medida, una continuación de la investigación sobre los procedimientos de decisión en la teoría cuantificacional realizada desde mediados de la década de los años cincuenta hasta mediados los sesenta (Quine, Hintikka, Davis & Putnam, Gilmore, J. Friedman).