«¡Tenemos un problema...!» Propuesta de un programa para enseñar a resolver problemas de matemáticas

José Orrantia, M. Carmen Morán, Ana Delia Gracia y Lucía González

Uno de los objetivos fundamentales del área de matemáticas, y sobre el que posiblemente los profesores demanden más ayuda para su enseñanza, es la resolución de problemas. Por ello, los autores de estas páginas proponen una serie de ayudas orientadas a los procesos y estrategias implicados en la resolución de esta tarea, con la finalidad de que se puedan convertir en práctica educativa.

Con el trabajo que presentamos en este artículo pretendemos ofrecer una nueva metodología de enseñanza en el área de las matemáticas, y más concretamente en uno de sus objetivos fundamentales: la resolución de problemas. La metodología está centrada en los primeros niveles de la Educación Primaria, donde se comienza con la enseñanza formal de las matemáticas, puesto que pensamos que este es un momento crítico en el proceso de enseñanza-aprendizaje en este área. En este sentido, cuando hablamos de resolución de problemas nos estamos refiriendo a los problemas más sencillos que implican una única operación de suma o resta.

Son tres las razones fundamentales que nos han llevado a trabajar en la enseñanza de la resolución de problemas de matemáticas. La primera de las razones se refiere al alto porcentaje de alumnos que acaba la escolaridad obligatoria sin haber adquirido las habilidades matemáticas mínimas para desenvolverse en la sociedad; concretamente, Lapointe, Mead y Philips (1989) han mostrado que en torno al cincuenta por ciento de los alumnos españoles de 13 años no han alcanzado el nivel de «alfabetización funcional» mínimo en matemáticas requerido en una socieda moderna. Otra de las razones se debe a que la resolución de problemas de matemáticas representa un componente prioritario dentro del currículo de matemáticas, siendo, como se plantea en el D.C.B. de Educación Primaria, el método más conveniente para aprender matemáticas, puesto que da un sentido de aplicación y por tanto considerado uno de los ejes vertebradores del área a lo largo de la escolaridad. Estas dos razones han dado lugar a que cada vez sean más los profesionales de la educación que demandan ayudas concretas en este campo para convertirlas en prácticas educativas, dado que muchas de las dificultades de los alumnos para resolver problemas radican, generalmente, en unos planteamientos metodológicos inadecuados. La tercera razón por la que consideramos importante trabajar en este campo se debe a que la resolución de problemas verbales es un dominio bien definido, existiendo un amplio cuerpo de investigación desde la Psicología de la Instrucción centrado en el estudio de los procesos y estrategias implicados en la resolución de esta tarea.

Es precisamente esta última razón la que utilizaremos como marco teórico para justificar nuestra propuesta y en el que anclar la metodología que presentamos en este artículo. Así, antes de pasar a desarrollar la propuesta metodológica, comenzaremos exponiendo cómo se entiende desde la Psicología de la Instrucción la resolución de problemas, esto es, qué procesos, estrategias y estructuras de conocimientos se ponen en juego para resolver un problema de matemáticas. Desde aquí plantearemos un programa de instrucción que ha demostrado su efectividad (Orrantia, Morán, Gracia y González, 1993 y en preparación) para mejorar las habilidades en la resolución de problemas de los alumnos del primer ciclo de la Educación Primaria. Por último, consideraremos la posibilidad de «diluir» las ayudas del programa de instrucción en la actividad docente cotidiana de las aulas.

LA RESOLUCION DE PROBLEMAS DESDE LA PSICOLOGIA DE LA INSTRUCCION

Como ya hemos argumentado en otro lugar (Orrantia y cols., 1993), la mayoría de los autores que han estudiado este tema coinciden en afirmar que en la solución de problemas verbales se pueden diferenciar dos grandes procesos: la representación del problema y la resolución del problema (Mayer, 1985, 1989; Schoenfeld, 1985; Kintsch y Greeno, 1985; Greeno, 1980; Riley y Greeno, 1988; Carpenter y Moser, 1982; de Corte y Verschaffel, 1987). Estos dos procesos se pueden dividir a su vez en otros dos subprocesos.

Así, Mayer (1985) plantea que la representación del problema implica, por un lado, un subproceso de traslación, donde cada frase del problema se traslada a una representación interna; y un subproceso de integración, donde la información del problema se integra dentro de una representación coherente. Y por lo que se refiere al proceso de resolución, también se puede dividir, de forma similar al anterior, en otros subprocesos. De esta manera, la resolución implicaría, por un lado, procesos heurísticos de planificación y supervisión, lo que conllevaría una serie de conocimientos estratégicos, tal como dividir el problema en diferentes pasos y aplicar las operaciones apropiadas y en el orden apropiado, estrategias de resolución hacia atrás, etc. Lógicamente este tipo de planificación tan elaborada no sería necesaria aquí, puesto que los problemas que vamos a considerar son muy simples, en los que se requiere una única operación; en este sentido, la planificación implicaría decidir, en base a la representación creada del problema, que operación hay que realizar. Por último, existiría un proceso de ejecución, en el que se aplicarían las estrategias y algoritmos de solución de las operaciones incluídas en el problema.

Podemos considerar, entonces, que para resolver un problema de matemáticas no sólo se requiere el dominio de las operaciones aritméticas básicas, sino también otros aspectos relacionados con la representación del problema. Sin embargo, este planteamiento contrasta con la práctica actual dentro de las aulas, donde la enseñanza se centra básicamente en la aplicación de algoritmos formales (de Corte, 1993), prestando poca o ninguna atención a los aspectos relacionados con la representación. Dentro de este contexto, vamos a centrar la exposición en el proceso de representación del problema, o lo que en otro lugar hemos denominado la comprensión del problema (Orrantia, 1993).

Para llevar a cabo el proceso de representación, el alumno requiere cierto tipo de conocimiento esquemático, entendiendo el término esquema de la misma manera que se considera en la comprensión lectora el esquema o superestructura del texto[1] (van Dijk, 1980). Decimos esto puesto que pensamos, al igual que otros autores (van Dijk y Kintsch, 1983; Kintsch y Greeno, 1985; Cummins y cols., 1988) que los enunciados de los problemas aditivos se pueden considerar un tipo característico de texto. De esta forma, si para comprender un texto, o lo que es lo mismo, para crear una representación coherente del texto, necesitamos desentramar la estructura lógica que pone en relación unas ideas con otras, para resolver un problema antes tenemos que crear una representación coherente del enunciado, lo que implicaría establecer una relación entre las distintas proposiciones del enunciado, esto es, desentramar la estructura semántica del problema.

Podríamos argumentar, entonces, que para comprender y representar los problemas adecuadamente el alumno tiene que haber adquirido el conocimiento sobre los esquemas de los distintos tipos de problemas. Esta cuestión ha sido ampliamente estudiada. Así, autores como Greeno y sus colaboradores (Greeno, 1980; Greeno y Johnson, 1984; Riley, Greeno y Heller, 1982), Vergnaud (1983), Carpenter y Moser (1982) o Nesher (1982) han desarrollado la idea de que existen ciertas formas básicas que vertebran los enunciados y, por tanto, las relaciones numéricas contenidas en ellos. Veamos, por ejemplo, la propuesta de Greeno y sus colaboradores, puesto que es la que hemos venido utilizando en nuestras investigaciones. Estos autores han distinguido tres tipos de problemas aditivos que corresponderían a tres tipos de esquemas diferentes:

— problemas de *combinación*, donde se plantea una situación estática;

ej: «Luis tiene 5 canicas; Pedro tiene 3 canicas; ¿cuántas canicas tienen entre los dos?»; en estos problemas hay dos cantidades, las canicas de Luis y de Pedro, y su combinación.

— problemas de *cambio*, donde se plantea una situación dinámica;

ej: «Luis tiene 5 canicas; entonces Pedro le da 3 canicas más a Luis; ¿cuántas tiene Luis ahora?»; aquí hay una cantidad o estado inicial, las canicas de Luis, un cambio o transformación en esta cantidad, el número de canicas que Pedro le da a Luis, y una cantidad resultante del cambio o estado final.

— problemas de *comparación*, donde se plantea una situación comparativa;

ej: «Luis tiene 5 canicas; Pedro tiene 3 canicas más que Luis; ¿Cuántas canicas tiene Pedro?»; En este caso tenemos dos cantidades, las canicas de Luis y de Pedro, y una diferencia entre estas dos cantidades.

Y este es un aspecto crucial, pues es ampliamente compartida la idea de que las dificultades de los alumnos se producen en este proceso de representación, que como hemos comentado, implica la comprensión de la estructura semántica del problema. Así se explica, por ejemplo, que los tres problemas anteriores de combinación, cambio y comparación que presentan distinta estructura semántica, aunque puedan ser resueltos con la misma operación aritmética ($5 + 3 = 8$), muestran niveles de dificultad muy diferentes, siendo el problema de comparación el más difícil de resolver. Más aún, un problema de comparación puede ser incluso más difícil si modificamos su estructura semántica, aunque la operación aritmática sigua siendo la misma (e.g. «Luis tiene 5 canicas; El tiene 3 canicas menos que Pedro; ¿Cuántas canicas tiene Pedro?»).

Desde lo que venimos planteando, entonces, hay una cuestión que es fundamental en la resolución de problemas: ¿cómo se lleva a cabo el proceso de representación y posterior resolución del problema?. Existen varios modelos que intentan responder a esta cuestión (Riley, Greeno y Heller, 1983; Riley y Greeno, 1988; Briars y Larkin, 1984) aunque nosotros consideraremos el propuesto por Kintsch y Greeno

(1985) ya que el aspecto fundamental de este modelo es que resuelve los problemas verbales a través de la interacción entre procesos de comprensión textual y estrategias de resolución de problemas, o dicho de otra manera, la habilidad de resolución depende de la integración de estos dos tipos de conocimientos.

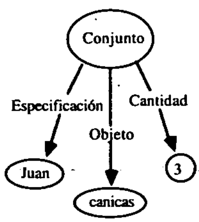
El modelo que presentan Kintsch y Greeno está basado en la teoría general sobre la comprensión de textos de Kintsch y van Dijk (1978; van Dijk y Kintsch, 1983; Kintsch, 1988) junto a la teoría de Riley y cols. (1983; Riley y Greeno, 1988) sobre el conocimiento semántico que se requiere para representar los problemas y las operaciones para encontrar la respuesta. De acuerdo con van Dijk y Kintsch (1983), la representación del texto en la memoria tiene dos componentes: una estructura proposicional de la información descrita en el texto, donde se representan sus aspectos superficiales y semánticos, y un modelo de la situación que se deriva del texto y que tiene que ver con la situación o mundo que el texto evoca. La estructura proposicional, también llamada base del texto (text base), se obtiene mediante la construcción de una representación conceptual del texto, denominada microestructura, desde la que se deriva una macroestructura jerárquica que se correspondería con las ideas esenciales expresadas en el texto. En el modelo de la situación se incluirían las distintas inferencias que el lector realiza utilizando sus conocimientos sobre la información incluída en el texto.

Siguiendo estos prosupuestos, Kintsch y Greeno (1985) también proponen para la comprensión de los enunciados matemáticos verbales una representación «dual», en la que se incluye una base del texto proposicional y un modelo de la situación, que ellos llaman *modelo del problema,* en el que se incluiría la información que se infiere desde la base de conocimientos que el lector posee sobre los problemas aritméticos. Veamos entonces el funcionamiento del modelo.

El modelo incluye tres conjuntos de estructuras de conocimiento para representar y resolver el problema. Los primeros están compuestos por un conjunto de marcos proposicionales que trasladan las frases a las proposiciones. Estas proposiciones se organizan dentro de unos esquemas llamados *esquemas de conjunto* (set schema), que están compuestos por unos emplazamientos donde se incluyen las proposiciones. Por ejemplo, ante la frase «Juan tiene 3 canicas» se crearía la representación de este conjunto mediante el siguiente esquema de conjunto:

FIGURA 1

Representación hipotética de un esquema de conjunto (Adaptado de Riley y Greeno, 1988).



y las proposiciones «Juan», «canicas» y «3» se asignan a los emplazamientos de *especificación, objeto* y *cantidad* respectivamente. De la misma manera, en el modelo del problema se crearía un conjunto con tres elementos. Además de estos tres emplazamientos existe otro en el esquema de conjunto llamado *rol,* que hace alusión a la función que este conjunto tendría en el esquema de alto orden o superesquema que pasamos a describir.

El segundo conjunto de estructuras de conocimiento que se incluyen en el modelo se refieren a los esquemas que representan las relaciones entre conjuntos, llamados esquemas de alto orden o superesquemas. Hay tres tipos básicos de superesquemas: esquema de «transferencia», esquema «parte-todo» y esquema «más que o menos que», que corresponderían con los tres tipos básicos de problemas descritos más arriba: problemas de cambio, de combinación y de comparación respectivamente. En el esquema de transferencia hay un conjunto *inicial* de objetos al que se le transfiere un conjunto *cambio*, bien añadiendo o bien quitando, dando lugar a un conjunto *resultado*. Los objetos, cantidades y especificaciones de estos conjuntos se derivan desde las proposiciones de la base del texto creando un esquema de conjunto, al que ahora se le añade, como ya anunciábamos, un nuevo emplazamiento, el rol que juega ese conjunto (inicial, cambio o resultado) dentro del superesquema.

El superesquema parte-todo también incluye tres conjuntos; dos que tienen el rol de *subconjunto* y uno que tiene el rol de conjunto *total*. Y por lo que se refiere a los problemas de comparación, el superesquema contiene un conjunto que juega el papel conjunto *mayor*, otro de conjunto *menor* y un tercero que tiene el rol de conjunto *diferencia*.

Ahora bien, ¿cómo se activan cada uno de estos superesquemas?. Según los autores esto se hace poniendo en juego una serie de estrategias desencadenadas por las proposiciones que se encuentran en la base del texto. Así, la estrategia «transferencia» asigna roles a los conjuntos de acuerdo con el superesquema de transferencia y es inducida por la proposición «da». Por ejemplo, si la base del texto contiene la siguiente proposición (DAR (PEDRO, JUAN, 5 CANICAS)), y ya existe un conjunto perteneciente a JUAN, al conjunto existente se le asigna el rol de conjunto inicial y al conjunto referido a la proposición se le asigna el rol de conjunto de cambio. La existencia de estos dos conjuntos y la proposición de transferencia (DAR) activan la creación de un superesquema de transferencia.

Otras dos estrategias descritas por los autores son la estrategia de «diferencia» y la estrategia «conjunto principal». La primera asigna roles a los conjuntos de acuerdo con el superesquema más que y menos que y es indicada mediante las proposiciones «tiene más que» o «tiene menos que», asignando el rol de diferencia al conjunto especificado por dichas proposiciones. Y la segunda asigna los roles al superesquema parte-todo, y es inducida por la proposición «Tienen entre los dos», donde el conjunto especificado por ella se le asigna el rol de conjunto total.

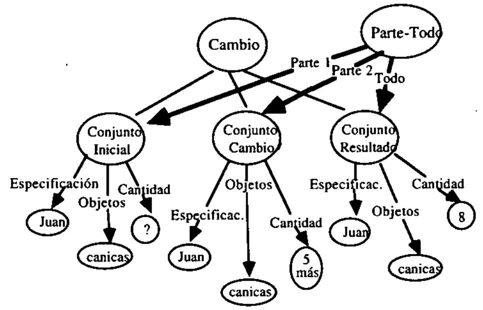
Por último añadir que la estrategia «conjunto principal» también se utiliza para formar representaciones con un esquema parte-todo cuando no son suficientes las representaciones con otros esquemas para resolver el problema, aspecto este muy importante dentro del modelo y que ha sido considerado también por otros autores (Resnick, 1989; Riley y cols., 1983; Riley y Greeno, 1988). Hay que tener en cuenta que los esquemas están restringidos a reflejar directamente las acciones de la base del texto, habiendo problemas que no se prestan fácilmente a esta situación. Por ejemplo los problemas de cambio más difíciles (e.g. «Juan tiene algunas canicas; Después gana 5 canicas más en una partida; Al final tiene 8 canicas; ¿Cuántas canicas tenía el principio?») comienzan con una cantidad no conocida y, lógicamente, la transferencia no se puede hacer sobre una cantidad desconocida. Como resultado, se debe inferir, desde el modelo del problema, la asignación de los roles de sobconjuntos y conjunto principal, como se muestra en la Figura 2:

El tercer conjunto de estructuras de conocimiento incluídos en el modelo hace referencia a los procedimientos utilizados para calcular la solución del problema. Son los procedimientos para sumar y restar números. Se basan en las estrategias que Carpenter y Moser (1983) identificaron en un estudio sobre la ejecución en la resolución de problemas de alumnos de primero y segundo curso.

En definitiva, la meta que se propusieron Kintsch y Greeno fue desarrollar un modelo mediante el que se pudiera representar los problemas verbales con la infor-

FIGURA 2

Representación hipotética de un problema de cambio donde se pone en juego la estructura parte-todo junto a otra estructura, en este caso de cambio (adaptado de Riley y Greeno, 1988).



mación necesaria para resolverlos utilizando un modelo general de procesamiento del texto. Para ello, consideraron tanto el conocimiento sobre procesamiento textual (van Dijk y Kintsch, 1983) como el conocimiento sobre las estructuras y operaciones implicadas en la resolución de problemas (Riley y cols., 1983).

LA INSTRUCCION EN RESOLUCION DE PROBLEMAS

Desde los planteamientos teóricos descritos más atrás podríamos argumentar que la instrucción en resolución de problemas debería centrarse en ofrecer al alumno las estrategias necesarias para llegar a una representación coherente de los enunciados, para, a partir de ella, poder razonar la resolución del problema. Sin embargo esto contrasta con la enseñanza habitual en la resolución de problemas, centrada principalmente en la solución, especialmente en los algoritmos de las operaciones, prestando poca o ninguna atención a los aspectos relacionados con la comprensión. En este sentido, nosotros hemos desarrollado en una de nuestras investigaciones un programa de instrucción que intenta recoger todos los aspectos relacionados con la resolución, especialmente aquellos que tienen que ver con la representación del problema.

Componentes del programa de instrucción (tomado de Orrantia y cols., 1993)

1. Ayudas textuales (reescritura)
2. Representación lingüística del problema (base del texto)
3. Representación figurativa del problema (modelo de la situación)
4. Razonamiento (planificación de la solución)
5. Revisión/evaluación/supervisión (ayudas metacognitivas)

Ayudas textuales

La primera ayuda del programa de instrucción no se da directamente al alumno, sino que consiste en reescribir el problema de manera que sea más *comprensible.* Como ya hemos indicado en otro lugar (Orrantia y cols., 1993), existen investigaciones que han demostrado que cuando se presentan los problemas con una serie de ayudas lingüísticas que hacen explícita la relación entre los conjuntos, esto es, su estructura semántica, la ejecución mejora.

Problemas de *combinación*

Solamente hemos modificamos los problemas más difíciles de combinación, es decir, aquellos en los que se pregunta por una de las partes. Para ello, nos basamos en el trabajo de de Corte y cols. (1985) que plantean la siguiente modificación:

normal	reescrito
Juan y Pedro tienen 9 canicas entre los dos	Juan y Pedro tienen 9 canicas entre los dos
Juan tiene 3 canicas	**3 de estas canicas pertenecen a Juan**
¿Cuántas canicas tiene Pedro?	**El resto pertenecen a Pedro**
	¿Cuántas canicas tiene Pedro?

En negrita aparecen las modificaciones, que están orientadas a hacer más patente la estructura parte-todo.

Problemas de *cambio*

En esta categoría de problemas introdugimos señales en todos los problemas, incluídos los más fáciles. A diferencia de otras investigaciones, estas señales consisten en añadir a cada una de las categorías de la estructura de cambio (inicial, transformación y resultado) apoyos lingüísticos que resaltaran dichas categorías; además destacan la *acción* temporal, elemento característico de este tipo de problemas. Veamos, por ejemplo, un problema de cambio donde se pregunta por el estado inicial:

normal	reescrito
Juan gana 5 canicas en una partida	**Al principio** Juan tiene algunas canicas
Ahora tiene 8 canicas	**Después** gana 5 canicas en una partida
¿Cuántas canicas tenía al principio?	**Al final** tiene 8 canicas
	¿Cuántas canicas tenía al principio?

Como se puede apreciar, hemos introducido, además de la frase primera propuesta por otros investigadores (por ejemplo Corte y cols., 1985), las partículas, «al principio», «después» y «al final», ya que, además de diferenciar las distintas categorías de la relación, hacen referencia a la acción temporal.

Problemas de *comparación*

El tipo de reescritura que se ha propuesto para esta categoría de problemas se han centrado únicamente en aquellos en que se pregunta por la diferencia (véase el trabajo de Hudson, 1983). Nosotros, además de mantener esta modificación, también incluímos otra para los restantes problemas. Para ello, tuvimos en cuenta que lo que hace difícil a estos problemas, sobre todo a los inconsistentes, es considerar cuál de las categorías hace referencia al conjunto mayor o menor. En este sentido, la reescritura consistió en añadir una frase que desvelara esta cuestión al comienzo del enunciado. Veamos el siguiente ejemplo:

normal	reescrito
Juan tiene 8 canicas	**Juan tiene más canicas que Pedro**
El tiene 5 más que Pedro	Juan tiene 8 canicas
¿Cuántas canicas tiene Pedro?	El tiene 5 más que Pedro
	¿Cuántas canicas tiene Pedro?

Como se puede apreciar, la primera frase indica cuál de los dos términos pertenece al conjunto mayor y cuál al menor. También podríamos haber propuesto como primera frase «Pedro tiene menos canicas que Juan», pero en este caso podría ocurrir que el alumno solamente se fijara en esa frase para responder sin atender al resto del problema, puesto que la pregunta hece referencia a Pedro. En este sentido, el primer término de la comparación de la frase introductoria siempre es el contrario al que se refiere la pregunta.

Representación lingüística del problema

Esta ayuda se relaciona, según el modelo de Kintsch y Greeno (1985), con la representación de la base del texto. Consiste en articular el enunciado del problema en función de lo que se conoce y no se conoce.

Por ejemplo, ante un problema de cambio donde se pregunta por el estado inicial, se articularía el enunciado de la siguiente manera:

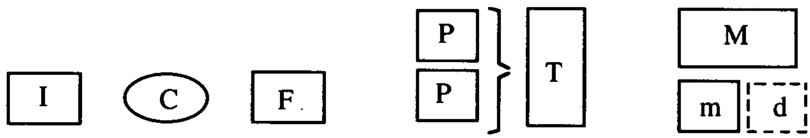
lo que sé	lo que no sé
al principio Juan algunas *después* gana 5 *al final* tiene 8	¿cuántas canicas tiene *al principio*?

Con esta ayuda pretendemos que el alumno se enfrente a una primera representación del problema desde lo más elemental, considerando los datos por un lado y la pregunta por otro. Además, esta articulación del problema va a servir de puente entre el enunciado del problema, donde los conjuntos están más o menos aislados, y el modelo del problema, donde los conjuntos se relacionan entre sí desde la estructura que los organiza. En este sentido, la articulación lo que sé/lo que no sé podría ser considerada como la «macroestructura» (van Dijk, 1980) del problema, donde se recoge lo más elemental del mismo. Quizás esto se entendería mejor si el problema fuera presentado con un formato contextualizado en una historia (e.g. «Juan fue a jugar una partida de canicas el sábado. Al principio comenzó la partida con algunas canicas ...»).

Por otro lado, y como se puede apreciar en el ejemplo, hemos puesto las señales que especifican las categorías de la estructura en cursiva, puesto que este es un aspecto fundamental a utilizar en el modelo del problema, que pasamos a comentar.

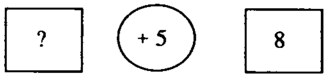
Representación figurativa

Esta ayuda sirve para crear el modelo de la situación descrito en el problema. En concreto, lo que se pretende es enseñar al alumno los distintos esquemas de alto orden o superesquemas de la teoría de Kintsch y Greeno (1985), que recordemos eran el esquema «parte-todo» para los problemas de combinación (en la figura se recoge cada una de las partes y el todo), esquema «transferencia» para los problemas de cambio (en este se recoge el estado inicial, el cambio o transformación y el estado final) y esquema «más qué y menos qué» para los problemas de comparación (en el que representamos la cantidad mayor, la menor y la diferencia). Para ello, y basados en investigaciones anteriores (Willis y Fuson, 1988; Fuson y Willis, 1989; Vergnaud, 1982) diseñamos los siguientes esquemas figurativos:



cambio combinación comparación

El sentido de esta ayuda que representa con un dibujo el problema sirve para que el alumno «rellene» cada uno de las categorías del esquema que se refieren a cada conjunto conocido y al desconocido. Para ello, y desde la la articulación «lo que sé/lo que no sé» junto con las señales textuales se colocan los números desde *lo que sé* en sus categorías correspondientes, y la categoría que queda vacía se rellena con una interrogación (?), que correspondería a la pregunta de *lo que no sé*. Por ejemplo, y siguiendo con el problema de cambio, desde la articulación lo que sé/lo que no sé se crearía la siguiente representación figurativa:



Razonamiento

Esta ayuda se relaciona con la decisión que hay que tomar sobre la operación que ejecutar. Respondería a la pregunta *¿tengo que sumar o restar?*. Esta ayuda tiene sentido sobre todo con los problemas más difíciles donde no se reflejan directamente las acciones desde el texto. Tendría que ver con la estrategia «conjunto principal» de la teoría de Kintsch y Greeno (1985), mediante la que se forman representaciones parte-todo cuando cuando no son suficientes las representaciones con otros esquemas.

Tomemos, por ejemplo, el problema de cambio que estamos comentando. Desde el modelo de la situación, esto es, desde la representación figurativa, no se puede decidir directamente la operación que hay que realizar. Por ello, se puede «razonar» con el alumno si el conjunto desconocido, en este caso el conjunto inicial será *más grande o más pequeño* que el conjunto final. En este sentido, tenemos que inferir desde el modelo del problema la asignación de los roles de subconjunto y conjunto principal, convirtiendo la estructura de cambio en una estructura parte-todo. En el caso que nos acupa deberíamos razonar que el número desconocido es más pequeño, y de esta manera le damos el rol de subconjunto y podemos tomar la decisión de hacer una resta.

Ayudas metacognitivas

Por último, hemos introducido en el programa de instrucción una serie de ayudas más generales de carácter metacognitivo, mediante las cuales se revisa, evalúa y supervisa la aplicación de las ayudas anteriores. Por ejemplo, una vez decidida la operación a realizar y ejecutada se puede introducir el resultado en el conjunto vacío del esquema y comprobar si es correcto. También se puede ir supervisando la ejecución de las restantes ayudas; por ejemplo ¿cómo sé si he articulado correctamente las distintas frases del problema? ¿he rellenado bien el esquema? si no ¿en qué me tengo que fijar para hacerlo correctamente?. Todas estas estrategias más generales tienen la función de que el alumno se autorregule a sí mismo en la aplicación de todo el proceso de resolución del problema.

En este programa de instrucción se recogen, como se puede apreciar, todas las estrategias y procesos implicados en la resolución de problemas. Y estas son las estrategias que un alumno debería poner en juego cuando se enfrenta a la resolución de un problema. En este sentido, este programa de instrucción ha demostrado su utilidad, especialmente cuando el alumno presenta dificultades con las matemáticas.

DE LA INSTRUCCION AL CURRICULUM

Sin embargo, hay una cuestión que nos gustaría plantear en relación a la utilización de estas ayudas por parte de los profesores. ¿Por qué esperar a un momento determinado, por ejemplo cuando un alumno presenta dificultades, para enseñar estas estrategias? aunque reconocemos que en muchas ocasiones es necesario obrar así, ¿por qué no incluir la enseñanza de estas estrategias en la actividad docente cotidiana de las aulas?. O por plantearlo de otra manera, ¿es posible adaptar el programa de instrucción a la idiosincracia particular de un aula?

Desde nuestro punto de vista, lo ideal sería «diluir» la enseñanza de estas estrategias en la actividad cotidiana de las aulas, de tal manera que el interés de profesor se centrara no tanto en la aplicación de distintos algoritmos en el contexto de un problema, sino en la comprensión misma del problema. Para ello, se podría partir de uno de los criterios de evaluación del área de matemáticas y modificarlo en función de los planteamientos desarrollados en este artículo:

«Resolver problemas sencillos *de combinación, cambio y comparación* relacionados con objetos, hechos y situaciones de la vida cotidiana, seleccionando las operaciones de suma y resta, utilizando los algoritmos básicos correspondientes *y aplicando las estrategias específicas implicadas en la comprensión y resolución de los problemas»*.

Como se puede apreciar, en el criterio de evaluación hemos incluído los tres tipos de problemas, lo cual contrasta, como indica de Corte (1993) con la práctica actual en la que suelen enseñar únicamente los problemas más rutinarios; además añadimos al criterio la enseñanza explícita de las estrategias, que también contrasta con las prácticas habituales, más centrada en la ejecución del problema.

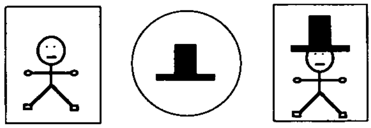
Desde este planteamiento, vamos a exponer una posible secuencia de presentación de los distintos tipos de problemas, así como se las ayudas relacionadas con las distintas estrategias implicadas en su resolución. Aunque no está comprobada su bondad, creemos que puede servir de orientación a los profesores para incorporar al aula la enseñanza de las estrategias de resolución de problemas[2].

Una primera aproximación puede ser la familiarización de los alumnos con las estructuras gráficas que proponemos para representar los distintos tipos de problemas. Lógicamente, la estructura de los problemas de comparación la dejamos para el final por ser estos los problemas más dificíles. Se podría comenzar por la estructura de cambio, puesto que estos problemas y los de combinación pueden tener una dificultad similar, por lo menos los más simples de estas categorías. Así, se puede familiarizar al alumno con lo que suponen las formas geométricas de la estructura de cambio; por ejemplo, *el círculo rueda (representa los aspectos dinámicos del problema —dar, quitar, añadir, perder...—) y el cuadrado no puede rodar (representa los datos estáticos del problema);* o también *pintar en el suelo estas formas geométricas y cuando suene una música los alumnos se colocan en los círculos y bailan y cuando para la música se van al cuadrado y se quedan quietos.*

Una vez que los alumnos estén familiarizados con estas formas se pueden plantear historias que representen la estructura de cambio; por ejemplo, *había una vez un niño que vivía en el cuadrado del principio; era un día de mucho calor y decidió irse al círculo que era el lugar donde se podía cambiar o quitar la ropa para no pasar calor; Se trasladó al cír-*

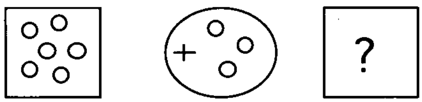
culo y se quitó el jersey; como ya no podía irse otra vez al cuadrado del principio, porque se había quitado el jersey, decidió irse al cuadrado del final. Además, se pueden ir introduciendo, como así hemos hecho, las claves textuales correspondientes a la estructura de cambio (*al principio*..., *al final*...), las cuales se siguen manteniendo en los pasos siguentes.

El siguiente paso podría ser la representación de la dramatización mediante dibujos que pueden realizar los alumnos, como se muestra en la figura:



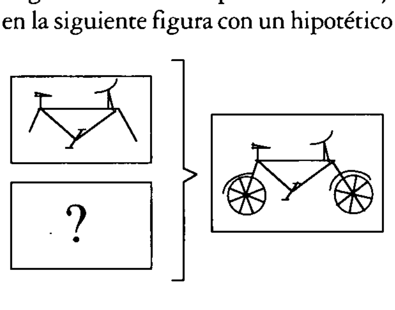
En este punto se pueden empezar a presentar las historias como una situación problemática en la que se desconoce alguna de las categorías de la estructura, comenzando lógicamente por desconocer el estado final, seguido de la transformación o cambio y por último el estado inicial.

Posteriormente, y una vez que los alumnos estén familiarizados con esta estructura puede ser el momento de comenzar con las historias/problema pero ahora utilizando datos numéricos que el alumno puede representar utilizando objetos concretos en cartulinas recortadas que representen las distintas categorías de la estructura de cambio (pueden ser cartulizas de diferente color para cada una de las categorías), como se muestra en la siguiente figura:



Los problemas se pueden presentar oralmente, puesto que es posible que los alumnos en este punto aun no hayan desarrollado todavía las estrategias de decodificación para enfrentarse a enunciados escritos; esta presentación oral de los problemas puede ir acompañada de las ayudas textuales utilizadas en el programa de instrucción para hacer más explícita la estructura del problema. Lógicamente, también se puede variar la localización de la incógnita en cada una de las categorías de la estructura. En este paso también es pertinente la introducción de las ayudas de representación lingüística («lo que sé y que no sé») y de razonamiento descritas en el programa de instrucción, al principio de forma inductiva, esto es, a través de preguntas que el profesor puede ir introduciendo (e.g. *«entonces, ¿qué cosas sabemos y qué nos preguntan?» «el número que buscamos cómo será, ¿más grande o más pequeño que este?»*)

De la misma manera que hemos obrado con la estructura correspondiente a los problemas de cambio se puede hacer con la estructura de combinación. Así, se puede comenzar dramatizando historias para pasar después a la representación en dibujos, variando también la categoría desconocida pasando del conjunto total a una de las partes, como se recoge en la siguiente figura con un hipotético ejemplo:



Y de la misma manera que comentábamos anteriormente, pasar de este tipo de representaciones a la utilización de objetos concretos planteando historias con datos numéricos, y añadiendo las ayudas de representación lingüística y razonamiento.

El siguiente paso lógico será la presentación de problemas en formato escrito utilizando las ayudas textuales del primer componente del programa de instrucción. En este punto se puede hacer explícita la utilización sistemática de las distintas ayudas incluídas en el programa de instrucción, de tal manera que cuando el alumno se enfrente a un problema siga los distintos pasos a realizar para llegar a su solución. La secuencia finalizaría sustituyendo los objetos concretos por su representación simbólica, esto es, por números.

Una vez que los alumnos hayan trabajado con estos dos tipos de problemas se pueden introducir los de comparación que son los más complejos. Dado que a estas alturas los alumnos ya están familiarizado con las estrategias de resolución, estos problemas se pueden incorporar a partir de enunciados escritos representando la estructura con objetos concretos, para posteriormente pasar a representarla con números.

A partir de este momento se pueden presentar indistintamente problemas mezclados de las tres categorías para que el alumno ponga en juego las distintas estrategias (ayudas) para resolverlos. Así, primero articulará el problema a partir de lo que sabe y no sabe; después eligirá cual es la estructura (cambio, combinación o comparación) que organiza los conjuntos del enunciado y realizará un dibujo que represente dicha estructura; rellenará las categorías correspondientes con los datos del problema (los cuales tiene articulados en «lo que sé y no sé») y a partir de aquí razonará cual es la operación que tiene que realizar.

Como podemos observar, la idea básica que se plantea con este procedimiento es la utilización del programa de instrucción (no olvidemos que ha demostrado su utilidad para resolver mejor los problemas en alumnos que ya habían comenzado con la enseñanza formal de las matemáticas) en el contexto habitual del aula. En este sentido, el procedimiento debería finalizar con la retirada progresiva de las ayudas, o por plantearlo de otra manera, con la interiorización progresiva de las ayudas hasta utilizarlas sin su apoyo externo, de tal manera que cuando el alumno se enfrente a un problema tenga interiorizados todos los pasos implicados en su resolución.

Nos gustaría terminar este artículo considerando una última cuestión: ¿qué ofrece de nuevo este planteamiento a los profesores? Desde nuestro punto de vista la novedad más importante se encuentra en la enseñanza explícita de las estrategias que intervienen en la resolución de problemas. Pero hay otros benefición añadidos que se complementan con este.

El primero de ellos tiene que ver con la evaluación de los alumnos que tienen más o menos dificultades, ya que desde este planteamiento podemos comprobar en qué parte del proceso puede estar el error. Esta cuestión es importante ya que es habitual que cuando un alumno resuelve mal un problema nos limitemos a repetir la resolución una y otra vez sin tener una idea clara de dónde se encuentra su dificultad. En este sentido, la dificultad puede estar en que no articula bien lo que le dan y lo que le piden en el anunciado; o no ha creado una correcta representación del problema o no ha planificado la operación que tiene que realizar en función de la representación. Y esto sólo se puede comprobar si se ha enseñado explícitamente a operar con cada uno de estos pasos, es decir, si se exteriorizan las estrategias implicadas en la resolución de la tarea es posible visualizar cuál de ellas no se lleva a cabo correctamente. De esta forma se puede pasar de afirmaciones como «no resuelve el problema correctamente» a «no representa el problema correctamente» o «sus estrategias de razonamiento no son las más adecuadas». Afirmaciones de este tipo nos llevan a focalizar las ayudas con estos alumnos solamante en aquellos procesos que no se realizan correctamente, y lo que es más importante, que son compartidos por alumnos y profesor.

Otro beneficio se encuentra en la posibilidad de adaptar la enseñanza a las necesidades particulares de los alumnos sin tener que eliminar uno de los objetivos fundamentales del área de matemáticas: la resolución de problemas, lo cual tiene un enorme interés en el contexto de la actual reforma del sistema educativo. Así, con la enseñanza explícita de las estrategias de resolución de problemas, y con la posible secuencia que proponíamos más arriba nos podemos encontrar con alumnos que terminan, por ejemplo, un ciclo resolviendo problemas sin ayudas (las han interiorizado) que medien entre ellos y la tarea, o que necesiten algunas ayudas para resolverlos; o que el paso de la representación con objetos concretos a la representación con números sea más lento en unos alumnos que en otros. Pero todos ellos hacen algo que es muy importante: de una manera u otra resuelven problemas.

Notas

[1] La noción de superestructura hace alusión a la organización de las ideas en un texto, esto es, a su «forma»; responde a la idea de que hay distintos tipos de textos con un patrón organizativo característico en el que se aprecian ciertas categorías bajo una trama invariante de relaciones.

[2] Alguna de las actividades que se plantean son fruto de una experiencia que desarrollamos con algunos de los profesores del colegio San Estanislao de Kostka de Salamanca.

Referencias

BRIARS, D. J., y LARKIN, J. H. (1984). An integrated model of skill in solving elementary word problems. *Cognition and instruction 1,* 245-296.

CARPENTER, T. P., y MOSER J. M. (1982). The development of adittion and subtraction problem solving skills. En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. A. Romberg (Ed), *Adition and subtraction: A cognitive perspective.* Hillsdale, N. J.:Erlbaum.

CARPENTER, T. P., y MOSER J. M. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes.* San Diego, CA: Academis Press.

CUMMINS, D. D.; KINTSCH, W.; REUSSER, K., y WEIMER, R. (1988). The rol of understanding in solving word problems. *Cognitive Psychology, 20,* 405-438.

DE CORTE, E. (1993). La mejora de las habilidades de resolución de problemas matemáticos: hacia un modelode intervención basado en la investigación. En J. A. Beltrán, V. Bermejo, M. D. Prieto, D. Vence, *Intervención Psicopedagógica.* Madrid: Pirámide.

DE CORTE, E., y VERSCHAFFEL, L. (1987). The effec of semantic structure on first graders strategies for solving addition and subtraction word problem. *Journal for researcch in Mathematics education, 18,* 363-381.

DE CORTE, E.; VERSCHAFFEL, L., y DE WIN, L. (1985). Influence of rewording verbal problems on children's problem representations and solutions. *Journal of Educational Psychology, 77,* 460-470.

FUSON, K. C., y WILLIS, G. B. (1989). Second graders' use of schematic drawings in solving addition and subtraction word problems. *Journal of Educational Psychology, 81,* 514-520.

GREENO, J. (1980). Some examples of cognitive task analisys with intructional implication. En R. Snow, P. A. Federico y W. E. Montage (Ed), *Aptitude learning and instruction: Vol II, Cognitive process analisys of learning and problem solving.* Hillsdale, N. J.:Erlbaum.

GREENO, J., y JHONSON, W. (1984). *Competance for solving understanding problem.* Pittsburg. PA: Learning Research and Development Center.

HUDSON, T. (1983). Correspondences and numerical differences between disjoint sets. *Child Develodpment, 54,* 84-90.

KINTSCH, W. (1988). The role of knowledge in discourse comprehension: A construction-integration model. *Psychological Reiew, 95,* 163-182.

KINTSCH, W., y GREENO, J. (1985). Undertanding and solving word arirmetic problem. *Psychological Rewiev, 92,* 109-129.

KINTSCH, W., y VAN DIJK, T. A. (1978). Towardas a model of text comprehension and production. *Psychological Review, 85,* 363-394.

LAPOINTE, A. E:; MEAD, N. A., y PHILIPS, G. V. (1989). *Un mundo de diferencias.* Madrid: CIDE.

MAYER, R. E. (1985). Mathematical ability. En R. J. Sternberg (Ed), *Human abilities: An information processing approach.* Nueva York: Freeman.

MAYER, R. E. (1989). Cognition and instruction in mathematics. *Journal of Educational Psychology, 81* (special issue).

NESHER, P. (1982). Levels of description in the analysis of adition and substraction word problems. En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. A. Romberg (Ed), *Adition and subtraction: A cognitive perspective.* Hillsdale, N. J.:Erlbaum.

ORRANTIA, J. (1993). Comprensión y razonamiento matemático: Donde las matemáticas necesitan del lenguaje. *Conferencia inaugural del curso 1993-94 de las ESU de Psicología del Lenguaje y Logopedia.* Universidad Pontificia de Salamanca.

ORRANTIA, J.; GRACIA, A. D.; MORÁN, M. C., y GONZÁLEZ, L. (1993). *La resolución de problemas de matemáticas en el Primer Ciclo de Educación Primaria.* CIDE. Memoria de investigación.

RESNICK, L. B. (1989). Developing mathematical Knowledge. *American Psychologist, 44,* 162-169.

RILEY, M. S., y GREENO, J. G. (1988). Developmental analysis of undestanding language abaut quantities and solving problems. *Cognition and instruction, 5,* 49-101.

RILEY, N. S.; GREENO, J.; HELLER, J. I. (1983). Development os children's problem solving ability in aritmetic. En H. P. Ginsburg (Ed), *The development of mathematical thinking.* Nueva York: Academic Press.

SCHOENFELD, A. (1985). *Mathematical problem solving.* Orlando: Academic Press.

VAN DIJK, T. A. (1980). *Macroestructures.* Hillsdale, N. J.:Erlbaum.

VAN DIJK, T. A., y KITSCH, W. (1983). *Strategies of discourse comprehension.* Nueva York. Academic Press.

VERGNAUD, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thougt involvedin addition and substration problem. En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. A. Romberg (Ed), *Adition and subtraction: A cognitive perspective.* Hillsdale, N. J.:Erlbaum.

WILLIS, G. B., y FUSON, K. C. (1988). Teaching children to use schematic drawings to solve addition and substraction word problems. *Journal of Educational Psychology, 80,* 192-201.

«¡Tenemos un problema...!» Propuesta de un programa para enseñar a resolver problemas de matemáticas.

José Orrantia, M.ª Carmen Morán, Ana Delia Gracia y Lucía González

CL&E, 1995, 28, pp. 15-28

Resumen: En el presente artículo se presenta una metodología para la enseñanza de las matemáticas en uno de sus objetivos fundamentales: la resolución de problemas. Para ello, se parte de los presupuestos teóricos de la resolución de problemas desde la Psicología de la Instrucción, en los que se plantea los procesos, estrategias y estructuras de conocimientos implicados en esta tarea. Desde este marco teórico se desarrolla un programa de instrucción para ayudar a los alumnos que comienzan con el aprendizaje de las matemáticas a resolver problemas sencillos. El artículo termina con algunas reflexiones sobre cómo llevar al aula las ayudas del programa de instrucción.

Datos sobre los autores: José Orrantia es profesor del Departamento de Psicología de la Universidad de Salamanca. M. Carmen Morán, Ana Delia Gracia y Lucía González fueron colaboradoras, cuando realizaban sus estudios de Doctorado, del primer autor en un proyecto de investigación sobre la resolución de problemas de matemáticas.

Dirección: José Orrantia. Departamento de Psicología. Universidad de Salamanca. Avda. de la Merced 109-131. 37005 Salamanca. (tfno: 923-294610 ext:3309).

Agradecimientos: Este trabajo ha sido realizado gracias a que el primer autor ha contado con una beca de ayuda a la investigación educativa del Centro de Investigación, Documentación y Evaluación (CIDE, convocatoria de 1992) del Ministerio de Educación y Ciencia.