

LA TRANSFORMADA DE FOURIER EN LA TEORIA DE LA DIFRACCION DE FRAUNHOFER

Omar Paredes Ch.

INTRODUCCION

La difracción es un efecto característico del fenómeno ondulatorio, ocurre cuando una porción del frente de onda emitido por una fuente es obstruido de alguna manera, mediante la interposición de un cuerpo cuyas dimensiones son comparables con la longitud de onda emitida.

Los efectos de difracción tienen gran significancia cuando se trabaja con instrumentos ópticos, ya que estos utilizan porciones del frente de onda incidente. Si todos los defectos en un sistema de lentes fueran eliminados, la nitidez final de la imagen estaría limitada por la difracción. Para explicar en primera aproximación este fenómeno debemos utilizar el principio de Huygens-Fresnell, el cual establece que cada punto sin obstrucción de un frente de onda, en un instante de tiempo dado, sirve como una fuente de onditas secundarias esféricas (de la misma frecuencia de la onda primaria). La amplitud del campo óptico en cualquier punto adelante, es la superposición de todas estas onditas (considerando sus amplitudes y fases relativas).

De una manera más amplia, podríamos decir que la difracción óptica se puede apreciar como si apareciera de la interacción de ondas electromagnéticas con algún tipo de obstrucción física.

DIFRACCIÓN DE FRAUNHOFER Y FRESNELL

Imaginemos que tenemos un cuerpo opaco Σ que contiene una abertura pequeña iluminada por ondas planas de una fuente puntual muy lejana S . El plano donde observamos lo constituye una pantalla σ paralela y muy cercana a Σ . Al incidir la luz sobre la abertura, se proyecta sobre la pantalla una imagen de la abertura con unas pequeñas franjas formadas alrededor de su periferia. Si movemos el plano de observación alejándolo de Σ la imagen de la abertura adquiere una mayor estructura (más definida) y las franjas son más grandes y delineadas. Este fenómeno se conoce como *Difracción de Fresnell o de Campo Cercano*.

Si movemos aún más lejos el plano de observación resulta un cambio continuo de las franjas. A una gran distancia de Σ el patrón proyectado se habrá esparcido considerablemente teniendo muy poco o nada de parecido con la abertura real; de ahí en adelante el movimiento de σ cambia esencialmente sólo el tamaño del patrón y no su forma, esta es la *Difracción de Fraunhofer o de Campo Lejano*. Podríamos volver de esta parte a la difracción de Fresnell disminuyendo la longitud de onda de la radiación incidente; si esta longitud de onda la disminuimos de tal forma que la acercamos a cero, las franjas desaparecerían y en el límite la imagen tomará la forma de la abertura como lo predice la óptica geométrica.

De otra parte si la fuente puntual se moviera ahora hacia Σ , las ondas no serían planas sino esféricas, las cuales incidirían sobre la abertura produciendo un patrón de Fresnell aún en un plano de observación distante. Existen otros criterios para distinguir entre difracción de Fraunhofer y Fresnell, los cuales no mencionaremos por el momento ya que no es el propósito del presente artículo.

Un montaje experimental práctico para obtener la difracción de Fraunhofer donde la fuente y la pantalla de observación están muy alejadas se logra usando el arreglo mostrado en la Fig. 1, con la condición de que el plano de la fuente y el de la pantalla de observación sean planos conjugados.

Estudiaremos esta difracción debido a sus importantes consideraciones prácticas y a su simplicidad.

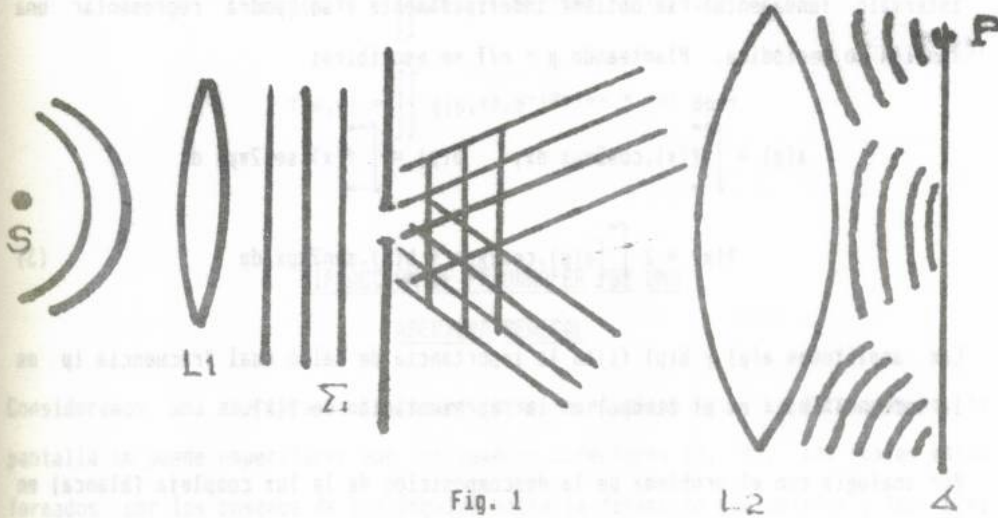


Fig. 1

TRANSFORMADA DE FOURIER

Abordaremos rápida y brevemente aquellas definiciones y propiedades de las series e integrales de Fourier para la aplicación que es objeto del presente artículo.

a) Representación de una función periódica por una serie de Fourier. Toda función periódica $f(x)$ puede ser representada por una suma de funciones sinusoidales de periodos $T, T/2, T/3, \dots$

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi x}{T} + b_1 \sin \frac{2\pi x}{T} + a_2 \cos 2 \frac{2\pi x}{T} + b_2 \sin 2 \frac{2\pi x}{T} + \dots + a_n \cos n \frac{2\pi x}{T} + b_n \sin n \frac{2\pi x}{T} + \dots \quad (1)$$

Como $f(x)$ es una función periódica, los valores para los coeficientes a_n y b_n vienen dados por:

$$a_n = \frac{2}{T} \int f(x) \cdot \cos \frac{2\pi n x}{T} dx, \quad b_n = \frac{2}{T} \int f(x) \cdot \sin \frac{2\pi n x}{T} dx \quad (2)$$

b) Representación de una función cualquiera por una integral de Fourier. Transformada de Fourier.

Cuando la función no admite periodicidad se puede llevar a T hasta el ∞ , el

intervalo fundamental se obtiene indefinidamente y se podrá representar una función no periódica. Planteando $\mu = n/T$ se escribirá:

$$a(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \cos 2\pi\mu x \, dx; \quad b(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \text{sen} 2\pi\mu x \, dx$$

$$f(x) = 2 \int_0^{\infty} [a(\mu) \cdot \cos 2\pi\mu x + b(\mu) \cdot \text{sen} 2\pi\mu x] d\mu \quad (3)$$

Las amplitudes $a(\mu)$ y $b(\mu)$ fijan la importancia de tal o cual frecuencia (μ es la frecuencia si x es el tiempo) en la representación de $f(x)$.

Por analogía con el problema de la descomposición de la luz compleja (blanca) en componentes monocromáticas, se dice que el conjunto $\{a(\mu), b(\mu)\}$ representa el "espectro" de la función $f(x)$.

En el cálculo de fenómenos relacionados con la óptica, el empleo de notaciones complejas es más práctico. Por tanto, las funciones trigonométricas de las fórmulas anteriores deben ser reemplazadas por los valores expresados en las fórmulas de Euler. Es decir:

$$g(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{i2\pi\mu x} \, dx = a(\mu) + ib(\mu)$$

$$g(-\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-i2\pi\mu x} \, dx = a(\mu) - ib(\mu)$$

variando convenientemente la frecuencia μ desde $-\infty$ a $+\infty$. Podremos finalmente escribir:

$$g(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{i2\pi\mu x} \, dx, \quad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\mu) \cdot e^{-i2\pi\mu x} \, d\mu \quad (4)$$

Las dos ecuaciones definen La Transformada de Fourier; ellas juegan papeles simétricos. Una de las funciones es el espectro de la otra.

Los resultados pueden ser generalizados al caso de funciones de dos variables x , y y la transformada de Fourier se escribirá:

$$g(\mu, \tau) = \iint f(x, y) \cdot e^{i2\pi(\mu x + \tau y)} dx dy \quad (5)$$

$$f(x, y) = \iint g(\mu, \tau) \cdot e^{-i2\pi(\mu x + \tau y)} d\mu d\tau$$

DIFRACCION DE FRAUNHOFER POR UNA ABERTURA GENERAL

Consideremos una abertura de cualquier forma en el plano xy . La dirección de la pantalla se puede especificar por los cosenos directores (α, β) , los cuales están formados por los cosenos de los ángulos entre la dirección que definen y los ejes de coordenadas.

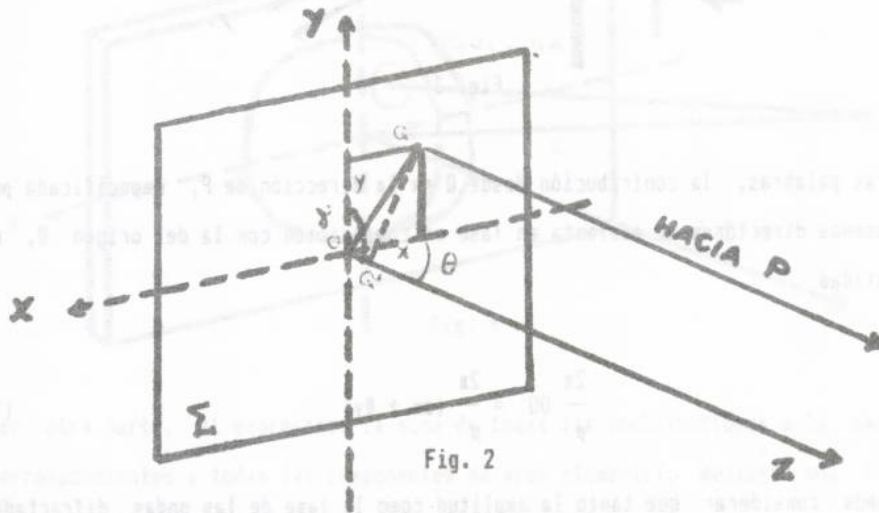


Fig. 2

Consideraremos además una fuente puntual monocromática S , muy alejada, con el fin de que el frente de onda que incide perpendicularmente a la abertura sea plano. Sea O el origen de coordenadas y Q , un punto general en la abertura.

Desde los puntos O y Q , salen dos rayos paralelos y sea QQ' la perpendicular trazada desde el rayo Q hasta el rayo O .

Los cosenos directores (α, β) son los cosenos de los ángulos formados con los ejes x, y respectivamente por los rayos considerados.

La distancia desde Q al punto distante P es más corta que desde O por OQ' . De la Fig. 2:

$$OQ' = ax + \beta y \quad (6)$$

(OQ' es la suma de las proyecciones de los vectores componentes sobre el rayo O).

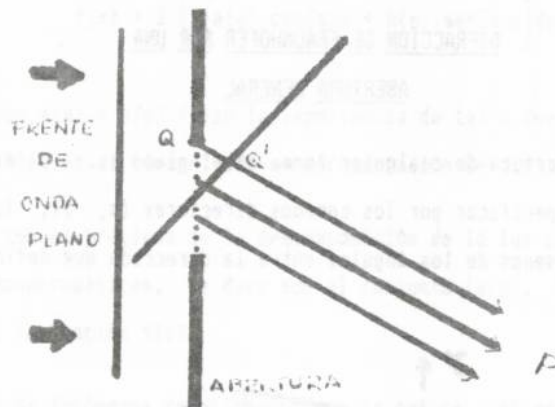


Fig. 3

En otras palabras, la contribución desde Q en la dirección de P , especificada por los cosenos directores se adelanta en fase en comparación con la del origen O , en la cantidad

$$\frac{2\pi}{\mu} OQ' = \frac{2\pi}{\mu} (ax + \beta y) \quad (7)$$

Podríamos considerar que tanto la amplitud como la fase de las ondas difractadas son invariantes en la abertura, sin embargo este no es necesariamente el caso; por ejemplo: si en la abertura colocamos un sistema óptico cualquiera, si se quiere un vidrio de forma irregular, el campo emanado por cada área elemental del mismo diferirá relativamente en fase y amplitud con otras. Así, existirá una absorción no uniforme, e igualmente una diferencia en la longitud de camino óptico que dependerá de la posición a través del vidrio, lo cual afectará la distribución en el campo difractado.

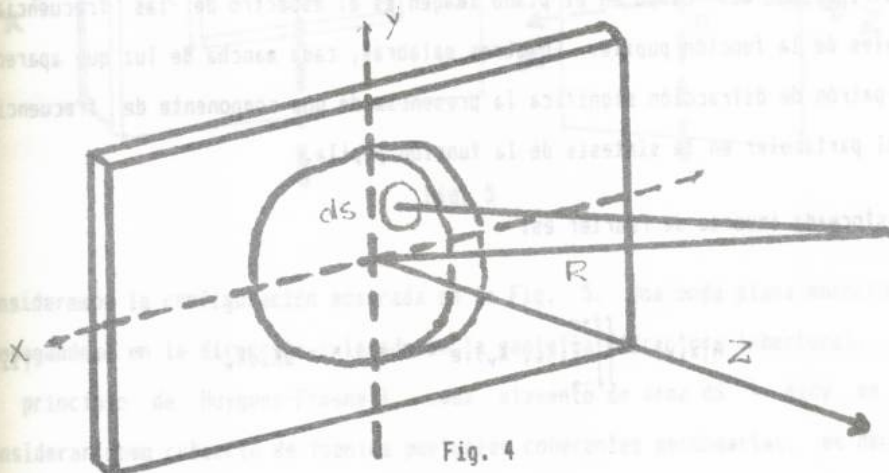
Las variaciones de la amplitud como de la fase se pueden condensar en una cantidad

compleja:

$$A(x,y) = A_0(x,y) \cdot e^{i\phi(x,y)} \quad (8)$$

Esta función es conocida como la función pupila. La amplitud del campo sobre la abertura viene descrita por A_0 mientras que la variación de la fase de punto a punto está dada por $e^{i\phi(x,y)}$.

Por lo tanto si consideramos un elemento de área $dx dy$ en x,y , este contribuirá a la amplitud en el punto P en la cantidad $A_0(x,y) dx dy$ pero girada en la fase (desfasada) en la cantidad $2\pi/\mu (\alpha x + \beta y)$ debido a la diferencia QQ' de camino óptico.



Por otra parte, si expresamos la suma de todas las contribuciones a la amplitud, correspondientes a todas las componentes de área elemental, mediante una integral doble escrita más generalmente así:

$$E(\alpha, \beta) = \iint A(x,y) \cdot e^{i(2\pi/\mu)(\alpha x + \beta y)} dx dy \quad (9)$$

Definiendo las frecuencias espaciales así: $(2\pi/\mu)\alpha = K_x$; $(2\pi/\mu)\beta = K_y$, el campo difractado puede escribirse como:

$$E(K_x, K_y) = \iint A(x,y) \cdot e^{i(K_x x + K_y y)} dx dy \quad (10)$$

Es importante ver que los límites sobre la integral pueden extenderse desde $-\infty$ a $+\infty$ porque la función pupila es diferente de cero únicamente sobre la región de la abertura. Con esto hemos llegado al punto más importante; como se constata, la ecuación (10) es idéntica a la transformada de Fourier en dos dimensiones (5).

La distribución del campo en el patrón de difracción de Fraunhofer es la transformada de Fourier de la distribución de campo sobre la abertura (es decir la función pupila). Simbólicamente podemos escribir así:

$$E(K_x, K_y) = F\{A(x, y)\} \quad (11)$$

La distribución del campo en el plano imagen es el espectro de las frecuencias espaciales de la función pupila. En otras palabras, cada mancha de luz que aparece en el patrón de difracción significa la presencia de una componente de frecuencia espacial particular en la síntesis de la función pupila.

La transformada inversa de Fourier es:

$$A(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} E(K_x, K_y) \cdot e^{-i(K_x x + K_y y)} dK_x dK_y \quad (12)$$

o sea

$$A(x, y) = F^{-1}\{E(K_x, K_y)\} \quad (13)$$

De una manera más general podemos decir que si conocemos una cierta repartición compleja dada por el objetivo, podemos mediante la transformada de Fourier (11) conocer la estructura del fenómeno de difracción en P ó si conocemos la estructura del fenómeno de difracción podemos conocer la distribución de amplitud compleja en el objetivo y por tanto el frente de onda que le dió origen, mediante la transformada inversa (13).

Refiriéndonos a la ecuación (13) podemos inferir que entre más localizada esté la señal, más ancha será su transformada; o sea, entre más pequeña sea la abertura difractora más grande será el ancho angular del haz difractado.

ABERTURAS RECTANGULARES

Con la ayuda de la ecuación (10), podemos encontrar la figura de difracción de campo lejano asociado a una abertura rectangular simple.

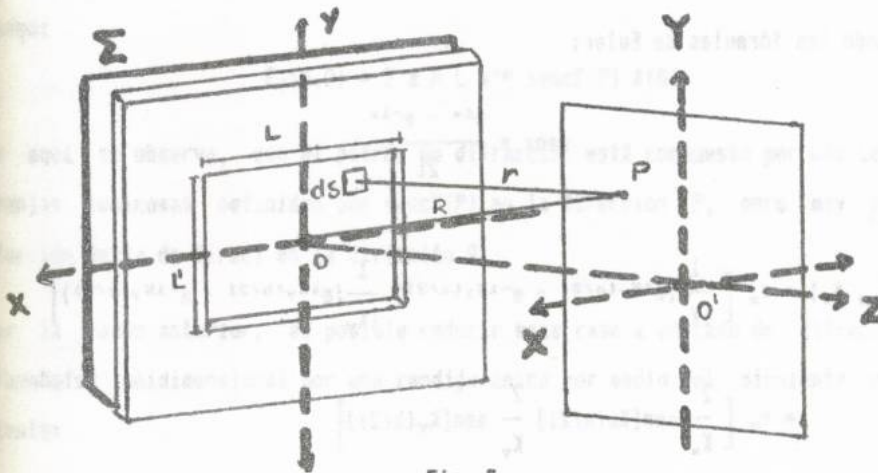


Fig. 5

Consideremos la configuración mostrada en la Fig. 5. Una onda plana monocromática propagándose en la dirección z incide en la pantalla difractora (abertura). Según el principio de Huygens-Fresnell, cada elemento de área $dS = dx dy$ se puede considerar como cubierto de fuentes puntuales coherentes secundarias, es decir que dS emite una onda esférica.

Si ϵ_0 es la potencia de la fuente por unidad de área (intensidad). Suponiéndola constante sobre la abertura completa.

De manera que:

$$A(x, y) = \begin{cases} \epsilon_0 & \text{para } -a/2 \leq x \leq a/2 \text{ y } -b/2 \leq y \leq b/2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por tanto el campo difractado vendrá dado por:

$$E(K_x, K_y) = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \epsilon_0 \cdot e^{i(K_x x + K_y y)} dx dy \quad (14)$$

$$= \epsilon_0 \left[\int_{-a/2}^{a/2} e^{iK_x x} dx \int_{-b/2}^{b/2} e^{iK_y y} dy \right]$$

$$E(K_x, K_y) = \epsilon_0 \left[\frac{1}{iK_x} e^{iK_x x} \Big|_{-a/2}^{a/2} \quad \frac{1}{iK_y} e^{iK_y y} \Big|_{-b/2}^{b/2} \right]$$

Utilizando las fórmulas de Euler:

$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

resulta:

$$E(K_x, K_y) = \epsilon_0 \left[\frac{1}{iK_x} (e^{iK_x(a/2)} - e^{-iK_x(a/2)}) \quad \frac{1}{iK_y} (e^{iK_y(b/2)} - e^{-iK_y(b/2)}) \right]$$

$$= \epsilon_0 \left[\frac{2}{K_x} \operatorname{sen}[K_x(a/2)] \quad \frac{2}{K_y} \operatorname{sen}[K_y(b/2)] \right]$$

escribiendo $\frac{2}{K_x} = \frac{1}{K_x(a/2)} a$

Entonces,

$$E(K_x, K_y) = \epsilon_0 ab \frac{\operatorname{sen}[K_x(a/2)]}{[K_x(a/2)]} \frac{\operatorname{sen}[K_y(b/2)]}{[K_y(b/2)]}$$

donde ab es el área de la abertura.

$$E(K_x, K_y) = \epsilon_0 ab \operatorname{senc}[K_x(a/2)] \operatorname{senc}[K_y(b/2)] \quad (15)$$

lo cual nos expresa la distribución de amplitud del campo difractado por una abertura rectangular.

LA RENDIJA ÚNICA

La rendija única la constituye una rendija rectangular con una de sus dimensiones muy grande (infinita en el límite). De tal manera que de lo visto anteriormente tenemos para la distribución de amplitud en el patrón de difracción:

$$E_T(P, Q) = A L e^{i\phi} \text{senc}\Gamma(P) \lim_{L \rightarrow \infty} [L' \text{senc}\Gamma'(Q)]$$

Es conocido que

$$\lim_{L \rightarrow \infty} [L' \text{senc}\Gamma'(Q)] = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L'/2}^{L'/2} e^{i\theta y} dy = 2\pi \delta(Q)$$

luego:

$$E_T(P, Q) = 2\pi A L e^{i\phi} \text{senc}\Gamma(P) \delta(Q)$$

De aquí se observa, que el patrón de difracción está compuesto por una serie de franjas luminosas definidas por $\text{senc}\Gamma(P)$ en la dirección P , pero muy angostas (función Delta de Dirac) en la dirección Q .

Por la razón anterior, es posible reducir este caso a un caso de difracción de Fraunhofer unidimensional por una rendija única por medio del siguiente procedimiento:

$$E_T = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(P, Q) dQ = A L e^{i\phi} \text{senc}\Gamma(P) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(Q) dQ$$

Por definición el valor de la integral en la expresión anterior es la unidad y

$$E_T(P) = A L e^{i\phi} \text{senc}\Gamma(P)$$

de donde,

$$I_T(P) = A^2 L^2 \text{senc}^2\Gamma(P)$$

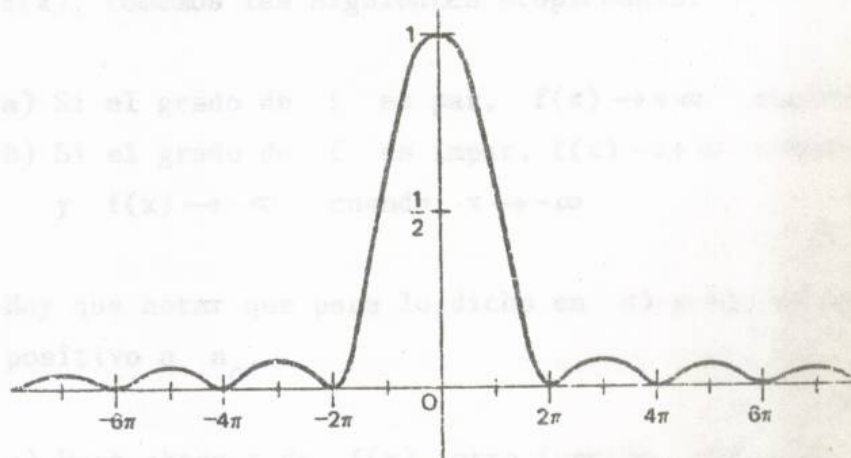


Fig. 6

BIBLIOGRAFIA

- [1]. HECHT-ZAJAC, Optica, Fondo Educativo Interamericano
- [2]. SMITH-THOMPSON, Optica, Editorial Limusa
- [3]. ROSSI BRUNO, Optics, Editorial Reverté
- [4]. CASTAÑEDA ROMAN, Fourier Methods Applied to the Fraunhofer. Diffraction Theory for any bidimensional regular array of identical apertures, Revista Mexicana de Física 31 No. 4, 1985, pág. 611-622
- [5]. HSU H.P., Análisis de Fourier, Fondo Educativo Interamericano.
- [6]. HANDBOOK DER PHYSICS, Optics Fundaments, Editorial Springer Verlag, Tomo XIX
- [7]. BUTKOV, Mathematical Physics, Editorial Addison Wesley
- [8]. SCHWARTZ, Mathematical for Physics Sciences, Editorial Hermann.

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

UNIVERSIDAD DE NARIÑO

PASTO

