Los teoremas de Gauss y de Stokes en un contexto electromagnético

Antonio Antolín Fonseca[1]

RESUMEN. El objetivo principal de la enseñanza de las matemáticas en escuelas de ingeniería es preparar al estudiante para tener acceso a la literatura de su área, que hace un uso extenso de las herramientas que proporciona la mencionada disciplina. Si se es ambicioso, se pretenderá también capacitar al estudiante a hacer, como profesionista, un uso independiente de las herramientas matemáticas en contextos concretos. En cualquier caso, se espera que los cursos de matemáticas que recibe basten para que el estudiante, o el egresado pueda reconocer los conceptos matemáticos cuando están inmersos en un contexto específico. Sin embargo, poco se hace en los cursos usuales para asegurar que tal cosa ocurra: se suelen enseñar las matemáticas fuera de contexto y dejar a la Fortuna que el estudiante aprenda a usarlas. El presente escrito ilustra algo que por desgracia está casi siempre ausente de los salones de clase, a saber, el empleo del contexto en el que se quiere aplicar las matemáticas, no sólo para mostrar la utilidad de las mismas, sino como material para construír los conceptos matemáticos. Se logra así una unión orgánica entre las matemáticas y sus aplicaciones, en este caso, entre el Análisis Vectorial y la Teoría Electromagnética.

Ley de Gauss.

Afirma esta Ley que el flujo del campo eléctrico $\vec{E}$ (más precisamente: intensidad del campo eléctrico) a través de una superficie cerrada es igual a la carga que S encierra. En símbolos,

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = Q \tag{1}$$

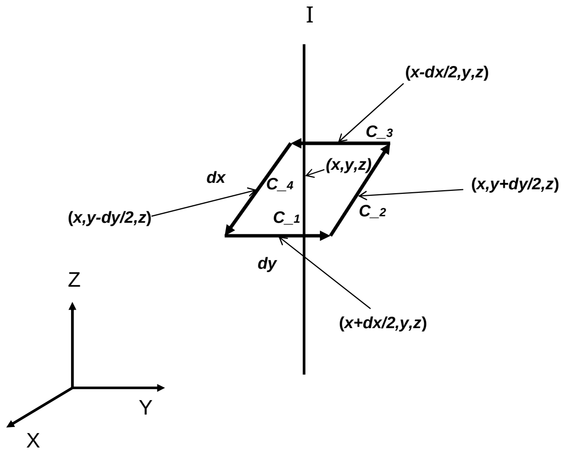
Se puede tener una versión puntal de esta ley aplicándola a la superficie S de un paralelepípedo de aristas infinitesimales y paralelas a los ejes coordenados, de longitudes *dx,dy,dz* respectivamente. En cada cara de las seis que componen a S , $\vec{E}$ puede considerarse constante; evaluaremos $\vec{E}$ en el punto medio de cada cara (P es el centro del paralelepípedo). Llamaremos S_1 a la cara del frente; su normal es *i*, su área *dydz*, luego su contribución al flujo total es:

$$\int_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \vec{E}\left(x+\frac{dx}{2}, y, z\right)\cdot idydz = E_x\left(x+\frac{dx}{2}, y, z\right)dydz =$$
$$\left[E_X(x,y,z)+\frac{\partial E_x}{\partial x}\frac{dx}{2}\right]dydz$$

[1] Departamento de Ciencias Básicas Exactas. Instituto de Ingeniería y Tecnología. Universidad Autónoma de Ciudad Juárez. aantolin@uacj.mx

La cara opuesta a ésta, cuya normal es $-i$ y que llamaremos S_2 contribuye

$$\int_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \vec{E}\left(x-\frac{dx}{2},y,z\right)\cdot\left(-idydx\right) = -E_x\left(x-\frac{dx}{2},y,z\right)dydz =$$
$$-\left[E_x(x,y,z)-\frac{\partial E_x}{\partial x}\frac{dx}{2}\right]dydz$$



Sumando estas dos contribuciones se tiene

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}dxdydz$$

De la misma manera, los otros dos pares de caras opuestas contribuyen, respectivamente,

$$\frac{\partial E_y}{\partial y}dxdydz \quad \text{y} \quad \frac{\partial E_z}{\partial z}dxdydz$$

Así pues, el flujo total a través de S será

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)dxdydz$$

Si la densidad de carga en el punto P es ρ , y como ésta puede también considerarse constante en todo el paralelepípedo por ser éste infinitamente pequeño, la carga contenida en él será ρ *dxdydz,* ya que el volumen del sólido es *dxdydz*. Por la ley de Gauss, la carga contenida en el paralelepípedo es igual al flujo del campo $\vec{E}$ a través de su superficie, de donde

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=\rho \qquad (2)$$

ésta es la versión puntual de la ley de Gauss y nos dice cómo calcular la densidad de carga apartir de la intesidad del campo eléctrico $\vec{E}$. La operación que produce el miembro izquierdo de (2) a partir de $\vec{E}$ merece un nombre; se llama, en efecto, *divergencia* y se abrevia *div*. La ecuación (2) se escribe entonces

$$div\,\vec{E} = \rho$$

Si introducimos el operador $\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$ e interpretamos el producto escalar de ∇ con un vector simbólicamente, es fácil ver que

$$div\vec{E} = \nabla \cdot \vec{E}$$

donde $\frac{\partial}{\partial x} \cdot E_x$ se lee como $\frac{\partial E_x}{\partial x}$, etc. Escribamos pues, (2) como $\nabla \cdot \vec{E} = \rho$ e integremos ambos lados sobre un volumen *V:*

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E} dv = \int_V \rho dv$$

El miembro derecho es igual a *Q* , la carga contenida en *V*, pues ρ es la densidad de carga y por lo tanto, $\rho\, dv=dQ$. Entonces por la ley Gauss (1), tenemos

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_v \nabla \cdot \vec{E} dv \qquad (3)$$

donde *S* es la superficie que encierra a *V* . La ecuación (3) es conocida como el teorema de Gauss. Nótese que el teorema no hace mención de la carga, por lo cual podemos olvidarnos de que $\vec{E}$ es un campo eléctrico y podemos considerarlo como un campo vectorial cualquiera.

La ley del circuito de Ampère dice que si calculamos la circulación del campo magnético $\vec{H}$ (más precisamente intensidad del campo magnético) sobre una curva *C* que rodea a un conductor, el resultado será precisamente la corriente que fluye por este conductor (o por la parte de él que quede encerrado por *C*. En símbolos:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \qquad (4)$$

Al igual que en el caso de la ley de Gauss, se puede obtener una versión puntual de la ley del circuito de Ampère (para abreviar, llamaremos a ésta ley, ley de Ampère). Para ello, tenemos como *C* el perímetro de un rectángulo infinitesimal de lados paralelos a los ejes x, y, perpendicular al eje z. Su representación vectorial será *kdxdy.* Sea *P*(x,*y,z*) el centro del rectángulo. Al igual que en el caso del campo $\vec{E}$ y el paralelepípedo infinitesimal, consideraremos aquí que el campo magnético $\vec{H}$ es constante en cada lado de *C* e igual a su valor en el punto medio de dicho lado. La contribución de los dos lados paralelos al eje *y* , que llamamos C_1 y C_3 , será

$$\int_{C_1C_3} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{C_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_{C_2} \vec{H} \cdot d\vec{l} =$$

$$\vec{H}\left(x + \frac{dx}{2}, y, z\right) \cdot jdy + \vec{H}\left(x - \frac{dx}{2}, y, z\right) \cdot (-jdy) =$$

$$H_y\left(x + \frac{dx}{2}, y, z\right)dy - H_y\left(x - \frac{dx}{2}, y, z\right)dy = \frac{\partial H_y}{\partial x} \cdot dxdy$$

A los otros dos lados, C_2 y C_4 , contribuyen, análogamente, considerando la orientación de *C*,

$$-\frac{\partial H_x}{\partial y} dxdy$$

La circulación total es entonces

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right) dxdy$$

Por la ley de Ampère esto es igual a la corriente que cruza la superficie del rectángulo-cuya área es *dxdy*. Resulta así que le densidad de corriente, es decir, la corriente por unidad de área que atraviesa esta superficie es

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \tag{5}$$

Ahora bien, la corriente fluye en determinada dirección y sentido formando un ángulo cualquiera con la normal a un elemento de superficie dado. Esto quiere decir que la densidad de corriente varía con la posición de la superficie considerada y que se trata en definitiva de una cantidad vectorial. La expresión (5) representa entonces la <u>componente</u> de la densidad de corriente-llamémosla $\vec{J}$ - en la dirección de la normal de rectángulo que tomamos, es decir, $J_z = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}$

Si procedemos de la misma manera con rectángulos de lados infinitesimales paralelos a un par de ejes coordenados, obtendremos las otras dos componentes cartesianas de $\vec{J}$. El resultado de todo ésto es:

$$\vec{J} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) k$$

Esto puede escribirse simbólicamente en forma de determinante:

$$\vec{J} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \nabla \times \vec{H} \tag{6}$$

Esta es la forma puntal de la ley de Ampère, válida para un campo magnético estable (que no varía en el tiempo).

Puesto que $\vec{J}$ es la densidad de corriente, $\vec{J} \cdot d\vec{S}$ es la corriente que atraviesa el elemento $d\vec{S}$ de superficie ($d\vec{S} = \vec{n} dS$, donde $\vec{n}$ es la normal unitaria al elemento y *dS* su área). La corriente *I* que atraviesa una superficie *S* será

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_S \nabla \times \vec{H} \cdot d\vec{S} \tag{7}$$

donde *C* es la frontera u orilla de *S*. En (7), sin embargo, no se hacen mención de la corriente; esto permite interpretar $\vec{H}$ como un campo vectorial cualquiera, sin restringirlo a representar la intensidad de un campo magnético. Así entendida, la igualdad (7) se denomina teorema de Stokes.

Las presentaciones usuales de los teoremas de Gauss y Stokes se ubican en un contexto puramente matemático y no sólo no orientan al estudiante a aplicar fructíferamente el análisis vectorial a problemas físicos, sino que lo hacen conceptual y psicológicamente difícil.

La anterior presentación trata de remediar ese defecto, al menos en lo que se refiere al electromagnetismo. Nótese que no sólo se interpretan en ese contexto los dos teoremas citados, sino que se integran a él de manera oragánica y los dos operadores principales del análisis vectorial son no sólo motivados, sino obtenidos a partir del contexto. Me refiero, por supuesto, a la divergencia $\nabla \cdot$ y al rotacional $\nabla \times$ que se requieren en el enunciado de los teoremas.