

Uso de vectores en su propio contexto. Parte I

S. Flores-García¹, M. D. González-Quezada², L. L. Alfaro-Avena¹, A. A. Hernández-Palacios¹, J. V. Barrón-López¹, J. E. Chávez-Pierce¹

Resumen

Un entendimiento de las propiedades básicas de los vectores es fundamental para el entendimiento de las operaciones entre estas cantidades físicas. Muchos estudiantes en los cursos introductorios de física no desarrollan un aprendizaje significativo de la naturaleza vectorial de las cantidades físicas como *fuerza* y *aceleración*. Para promover el entendimiento conceptual de estas cantidades, es necesaria una exploración de los problemas de orden cognitivo que los estudiantes presentan a través de una enseñanza tradicional o por medio de una modificación en la instrucción. Esta investigación muestra las dificultades de los alumnos que fueron detectadas y caracterizadas durante el proceso de aprendizaje de la operación de suma de vectores en su contexto. Las fuentes de información son la Universidad Estatal de Nuevo México (NMSU) y la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez (UACJ).

1. Introducción

Según Flores, González y Herrera (2006) “en el caso ideal, los estudiantes entienden del concepto de vector, que son ideas poderosas que tienen amplia aplicabilidad”. En varias ocasiones, los estudiantes fallan al encontrar las conexiones entre las ideas que son presentadas. En lugar de ver a las cantidades vectoriales como un objeto de conocimientos cimentado en un conjunto de ideas fundamentales, ellos adquieren la impresión que estas cantidades forman una colección de ecuaciones de contexto específico (Redish, 1998) que deben ser memorizadas.

Según Flores, Kanim y Kautz (2004) “un entendimiento de la mecánica Newtoniana como un campo de

conocimientos coherentes requiere un entendimiento de la suma de vectores (para encontrar la fuerza neta), resta de vectores (para encontrar una aceleración), y el reconocimiento que la segunda ley de Newton requiere estas dos cantidades independientemente determinables”.

Esperamos que una investigación del entendimiento del estudiante de las operaciones fundamentales entre vectores (suma y resta) promueva el desarrollo de currículo que sea más efectivo para fortalecer la visión de la física por parte de los estudiantes como un campo de estudio coherente, más que como una colección de hechos individuales. En este artículo se presentaran resultados de una investigación acerca del entendimiento por parte del estudiante de las operaciones de suma y resta entre vectores. Las preguntas de investigación que esperamos responder son: 1) Pueden los estudiantes sumar y restar vectores? 2) Pueden los estudiantes desarrollar un aprendizaje significativo de

¹ Universidad Autónoma de Ciudad Juárez.
sergiflo@hotmail.com

² Instituto Tecnológico de Ciudad Juárez.

los vectores dentro de su propio contexto gráfico a través de una instrucción tradicional?, y 3) Es posible que los estudiantes entiendan las operaciones de suma y resta entre vectores modificando su instrucción en base a un énfasis gráfico?

2. Investigación previa

Knight (1995) exploró la habilidad de los estudiantes para: 1) reconocer y utilizar las componentes de un vector; 2) evaluar la magnitud y dirección de un vector; 3) sumar dos vectores gráficamente; y 4) sumar dos vectores utilizando componentes. El *Vector Knowledge Test* se aplicó a 286 estudiantes inscritos en el primer cuarto de un curso introductorio de física basada en cálculo. Estos alumnos pertenecían al primer semestre de varias carreras de ingeniería. El nivel del académico es equivalente a los cursos ordinarios de física introductorio (mecánica clásica) que se imparten durante los primeros semestres en la mayoría de las universidades de México. El examen se administró antes de cualquier instrucción relacionada con el estudio de vectores. Solamente el 30% de los estudiantes pudieron escribir una breve definición de un vector, y solamente 43% de los estudiantes pudieron sumar dos vectores gráficamente. Cerca del 15% pudieron expresar un vector dado como una magnitud y un ángulo. Knight concluyó que los estudiantes que comienzan en física necesitan una explícita instrucción y práctica con el uso de vectores. La mayoría de los estudiantes no comienzan los cursos introductorios con el suficiente conocimiento de vectores para entender las bases principales de la mecánica Newtoniana.

Nguyen y Meltzer (2003) diseñaron un quiz con siete problemas, la mayoría de

ellos fueron de carácter gráfico. Es importante mencionar que un quiz es un examen pequeño donde el alumno tiene en promedio diez o quince minutos para contestarlo. Se utiliza como elemento didáctico para fines de investigación o ambos. Esta quiz se administró a estudiantes en todos los cursos de introductoria física general en Iowa State University. Estos cursos equivalen a los cursos normales de física impartidos durante los primeros semestres en escuelas de nivel profesional en México donde los contenidos son relacionados a la mecánica clásica. Los resultados se obtuvieron de 2031 estudiantes. 721 de los cursos basados en álgebra y 1310 estudiantes de los cursos basados en cálculo. Cerca del 60% de los estudiantes de la base con cálculo contestaron correctamente un problema en dos dimensiones acerca de suma de vectores. El error más común fue el uso de un algoritmo “cola-con-cola” para encontrar un vector suma. Una descripción mas detallada del algoritmo *cola-con-cola* se encuentra en Knight (op.cit.).

3. Metodología de Investigación.

La fuente de datos primaria de esta investigación son las preguntas escritas. Estas preguntas se aplicaron en tareas (clases y laboratorio), pre-exámenes de laboratorio, y en quizes y exámenes de clase. Debido al interés en el entendimiento conceptual de la física, las preguntas son más de carácter cualitativo que cuantitativo. Las respuestas son analizadas y caracterizadas en base a la propia respuesta y al razonamiento dado.

Diversos investigadores en el campo de la física educativa han encontrado que ciertos formatos de preguntas escritas son útiles para *detonar*

errores sobre las ideas y el razonamiento de los estudiantes. Por ejemplo, preguntas de *orden*, donde los estudiantes tienen que ordenar la magnitud de una cantidad física en una situación dada. Las preguntas de *comparación*, son similares a las de orden excepto que los estudiantes tienen que comparar dos situaciones solamente, posiblemente antes o después de un cambio físico. Otro tipo de situación es la llamada de *razonamientos en conflicto*, donde los estudiantes se enfrentan a enunciados acerca de una situación física y se les pregunta si están de acuerdo con ellos. Un conjunto importante de estos tipos de problemas se puede encontrar en el *E&M TIPERs* workbook (Hieggelke et al., 2006).

4. Contexto de investigación

Los datos presentados en este artículo se recolectaron en la Universidad Estatal de Nuevo México (NMSU) y en la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez (UACJ).

Los cursos utilizados como fuente de esta investigación fueron:

- NMSU: Física 215 (Introducción a la mecánica basada en cálculo).
- NMSU: Física 211 (Introducción a la mecánica basada en álgebra).
- NMSU: Laboratorio de Física 211 y 215.
- UACJ: Física general I (Mecánica basada en cálculo).

El curso de Física 215 está dirigido principalmente a estudiantes de ingeniería. La instrucción en los cursos introductorios basados en cálculo en NMSU consiste en tres clases de 30 minutos a la semana. La secuencia de los temas es la misma que la secuencia en el libro de texto. No hay

sección de solución de problemas (recitation section).

Los cursos de Física 211, que es física basada en álgebra, cubre más tópicos que los cubiertos en la física 215, pero a un nivel más bajo. Laboratorios para las físicas 211 y 215 son obligatorios para ciertas carreras. Cerca de la mitad de los estudiantes inscritos en clases regular también se inscriben en el laboratorio. El laboratorio se evalúa de manera separada de la clase normal. Todas las sesiones de laboratorio están a cargo de estudiantes de graduado. En el laboratorio, los estudiantes trabajan en grupos utilizando materiales para fortalecer la conexión entre los fenómenos observados y el formalismo matemático, para promover las habilidades de razonamiento científico, y para promover el entendimiento conceptual. En lugar de reportes de laboratorio, se asignan tareas de laboratorio para reforzar y extender el entendimiento conceptual. La mayoría de las sesiones de laboratorio para ambos, los cursos basados en álgebra y en cálculo fueron diseñados con base a los *Tutoriales para física introductoria* (McDermott et al., 2002)

La instrucción en la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez (Física General I) se basa en tópicos de estática abordados de manera tradicional. Los estudiantes asisten con el instructor a dos sesiones de 90 minutos. Además, una sesión de laboratorio de 60 minutos obligatoria.

5. Identificación de las dificultades

Se han hecho preguntas a los estudiantes para explorar el entendimiento de los estudiantes de la suma de vectores en su propio contexto.

Las dificultades más importantes que hemos identificado en esta investigación son:

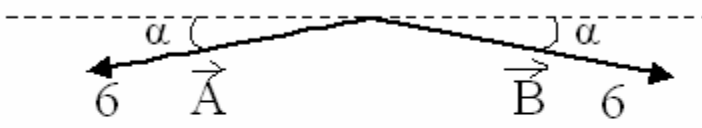
- Uso incorrecto del Teorema de Pitágoras.
- Suma de vectores utilizando el procedimiento llamado “cerrando el ciclo” (cerrando el ciclo).
- Suma de vectores colocando los vectores *cola-con-cola*.
- Suma de vectores como *escalares*.

La suma de vectores por lo general se enseñan utilizando métodos gráficos y a través de la suma algebraica de componentes rectangulares. Mientras que las tareas y las preguntas de los exámenes involucran vectores en dos dimensiones que típicamente requieren que los estudiantes descompongan los vectores en componentes para después sumarlos algebraicamente, es común que los

métodos gráficos de suma de vectores sean introducidos en las clases.

6. Pregunta de suma de vectores

Como parte de un examen parcial en NMSU, se les hizo a 120 estudiantes la pregunta mostrada en la figura 1. Este instrumento de evaluación se utilizó en el semestre de otoño del 2002. La respuesta correcta es que la magnitud de la resultante es *menor* que 6. Se esperaba que los estudiantes sumaran gráficamente los vectores \vec{A} y \vec{B} utilizando el método *cabeza-cola* o utilizando el método del paralelogramo la cual es la técnica más común utilizada en las clases de física. Algunos estudiantes tienden a sumar vectores conectando las colas de ambos.



La figura muestra dos vectores, \vec{A} y \vec{B} , cada uno de magnitud 6. Los vectores forman un ángulo pequeño con la línea horizontal punteada.

1) Sea $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$. Es la magnitud de \vec{C} *mayor que, menor que, o igual a* 6? Explica tu razonamiento.

2) Muestra la dirección de \vec{C} .

Figura 1 Pregunta que requiere la suma de dos vectores.

7. Resultados después de la instrucción tradicional

Cerca del 50% de los 120 estudiantes resolvieron la parte 1 de esta pregunta correctamente. Como se muestra en la tabla 1, cerca del 60% contestaron la parte 2 correctamente. Solamente el 30% de los estudiantes tuvieron la habilidad para encontrar ambas, la magnitud y la dirección.

a. Sumando vectores como escalares

Los resultados de la tabla 2 muestran que después de una instrucción tradicional en la Universidad de Nuevo México, algunos estudiantes trataron a los vectores como escalares, y sumaron las magnitudes de los vectores. Cerca del 10% de los estudiantes respondieron que la magnitud de la resultante es mayor que 6 porque la magnitud de cada vector es igual a 6. La figura 2 muestra que algunos estudiantes quienes entienden el procedimiento para sumar vectores, aún determinan la magnitud a través de la suma de escalares.





| | Instrucción tradicional NMSU N=120 |
|---|--|
|  (Correcta) | 61% |
|  | 16% |
|  | 17% |
|  | 6% |
| Sin respuesta | 0% |

Tabla 1 Resultados para la dirección de la suma de los vectores \vec{A} y \vec{B} .

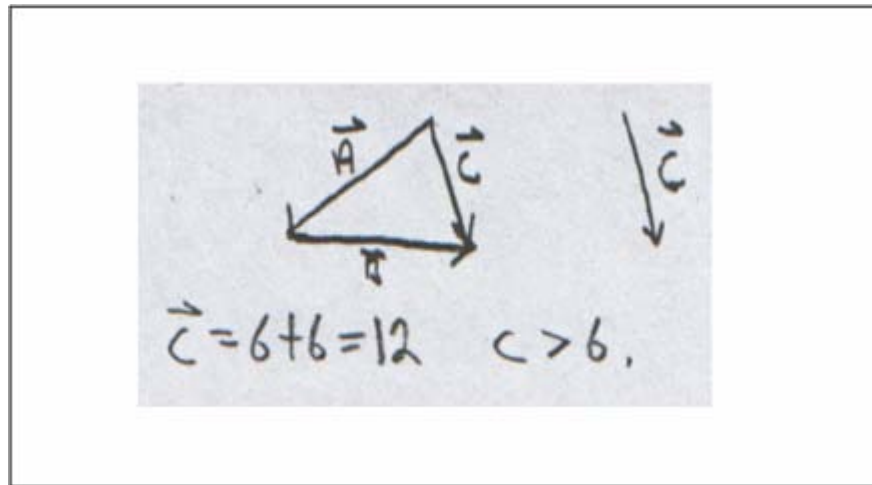


Figura 2 Ejemplo que muestra la suma de vectores como escalares.

Una cuarta parte de 186 estudiantes de la UACJ contestaron la parte 1 correctamente. Como se muestra en la tabla 2, casi el 40% de los estudiantes en la UACJ trataron los vectores como escalares, los cuales corresponden al 60% de estudiantes quienes respondieron que la magnitud del vector suma era mayor que 6.

| | Instrucción tradicional NMSU N=120 | Instrucción tradicional UACJ N=186 |
|-----------------------------|--|--|
| Magnitud incorrecta | 50% | 75% |
| Teorema de Pitágoras | 25% | 13% |
| Suma como escalares | 8% | 38% |
| Dirección incorrecta | 40% | 55% |
| Cerrando el ciclo | 10% | 16% |
| Cola-con-cola | 11% | 15% |

Tabla 2 Errores más comunes en la dificultades de los estudiantes con la suma de vectores.

b. Uso inapropiado del Teorema de Pitágoras

Cerca del 25% de los estudiantes de NMSU respondieron esta pregunta diciendo que la magnitud del vector suma era mayor que 6, utilizando el *Teorema de Pitágoras* como parte de la respuesta. Aparentemente muchos estudiantes no reconocen que el este teorema se puede utilizar para triángulos rectángulos únicamente. Un ejemplo se muestra en la figura 3. Cerca del 50% de los estudiantes quienes respondieron incorrectamente tuvieron esta dificultad en su procedimiento.

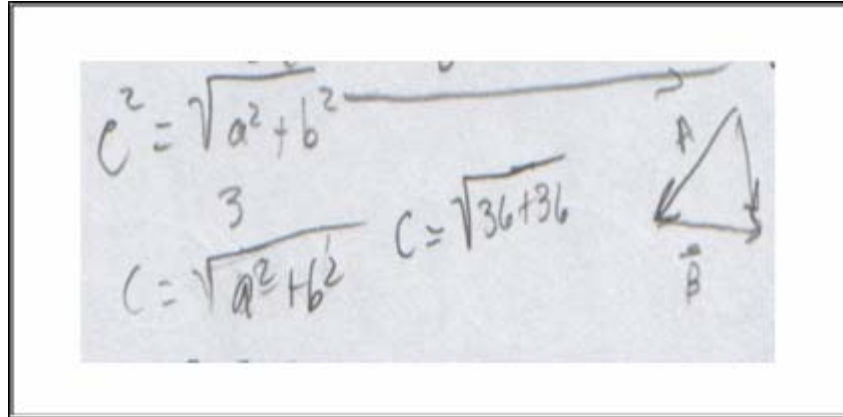


Figura 3. Ejemplo del uso del Teorema de Pitágoras para encontrar la magnitud de la resultante de dos vectores.

c. Sumando cola-con-cola

Algunos de los estudiantes conectaron las colas de los vectores \vec{A} y \vec{B} cuando los sumaron gráficamente. El vector resultante \vec{C} conectaba las cabezas de \vec{A} y \vec{B} . Como se muestra en la tabla 2, cerca del 10% de los estudiantes de NMSU sumaron los vectores utilizando el procedimiento *cola-con-cola*.

Como se muestra en la tabla 2, cerca de un cuarto de los estudiantes de NMSU, quienes dieron la respuesta

incorrecta para la magnitud del vector \vec{C} utilizaron el procedimiento *cola-con-cola*. Cerca de la mitad de los estudiantes quienes dieron la dirección hacia la derecha también incorporaron el procedimiento *cola-con-cola*. Tal parece que este error fue la causa para la dirección incorrecta de la suma de vectores. Aunque estos estudiantes utilizaron *cola-con-cola*, algunos de ellos mostraron la dirección correcta. La figura 4 muestra un ejemplo del procedimiento “cola-con-cola”.



Figura 4 Ejemplo de suma de vectores usando *cola-con-cola*.

d. Cerrando el ciclo

Aproximadamente el 15% de los estudiantes en NMSU (tabla1) respondieron con un vector apuntando hacia arriba en lugar de hacia abajo. De acuerdo a la tabla 2, el 10% de todos los estudiantes utilizaron un procedimiento incorrecto que llamamos “cerrando el ciclo”. Estos estudiantes conectaron la cola del vector resultante con la cabeza del

segundo vector y la cabeza de la resultante con la cola del primer vector. La pregunta acerca de la dirección fue contestada correctamente por el 45% de los 186 estudiantes de la UACJ. Mientras que, cerca del 15% de todos estos estudiantes dijeron que la dirección era hacia arriba. Todos ellos utilizaron “cerrando el ciclo” para sumar los dos vectores. La figura 5 muestra un ejemplo del procedimiento “cerrando el ciclo”.

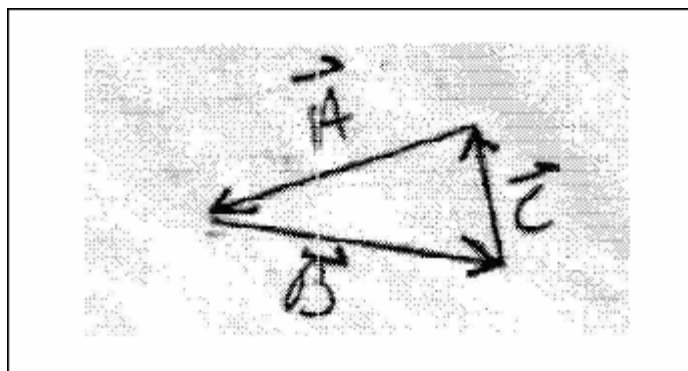


Figure 5 Ejemplo de la suma de vectores utilizando *cerrando el ciclo*.

8. Conclusiones

Como se observa en los ejemplos mostrados anteriormente, después de la instrucción tradicional muchos estudiantes tienen dificultades con las operaciones entre vectores. Cerca de dos tercios de los estudiantes cometieron uno o más errores con las preguntas cualitativas relacionadas con la suma de vectores. Hemos encontrado que muchos estudiantes no consideran la naturaleza vectorial de estas cantidades, o lo consideran cuando encuentran la dirección pero no la magnitud. Además, de acuerdo con la tabla 2, cerca de un 25% de los estudiantes de NMSU y 15% de la UACJ incorrectamente utilizan el Teorema de Pitágoras para calcular la magnitud del vector resultante. Parece ser que muchos estudiantes consideran el Teorema de Pitágoras como una regla para encontrar la suma de cualquier par de vectores independientemente de sus direcciones relativas.

Finalmente, los resultados mostrados en esta investigación están de acuerdo con Flores (2006). Según el, "la mayoría de los estudiantes de nivel superior, presentan dificultades de entendimiento de los conceptos fundamentales de física, fundamentalmente con las operaciones entre vectores. El desarrollo conceptual de los distintos objetos matemáticos que representan a los conceptos físicos determina, en gran medida, una evolución cognitiva en las estructuras matemáticas del alumno. Varios investigadores del área de la enseñanza y aprendizaje de las ciencias han monitoreado las dificultades del proceso cognitivo del desarrollo del entendimiento de la física. La mayoría de estos investigadores concluye, que el

estudiante promedio desarrolla un entendimiento aproximado del 5% al 10% de toda la gama de conocimiento del que es capaz de construir. Una de las principales causas de estos resultados es el gran reto del entendimiento conceptual, que implican los diversos cambios de una representación de un fenómeno físico a otra representación durante el proceso de entendimiento. Sin embargo, la versatilidad del alumno para pasar de una representación a otra puede estar influenciada por las características del contexto de la situación de aprendizaje".

Referencias

- Flores S. 2006. *Student use of vectors in mechanics*. Tesis para obtener el grado doctorado en física, Universidad Estatal de Nuevo México.
- Flores S., S. Kanim and H. Kautz. 2004. *Students use of vectors in introductory mechanics*. Am. J. Phys. **72** (4), 460-460.
- Flores S., M. D. González y A. Herrera. 2006. *Dificultades de entendimiento en el uso de vectores en cursos introductorios de mecánica*. Rev. Mex. Fis. **53** (2), 178-185.
- Hieggelke C.J., D. P. Maloney, S. E. Kanim y T. L. O'Kuma. 2006. *E&M TIPERs: Electricity and magnetism tasks*. USA: Pearson Prentice Hall, New Jersey.
- Knight, R.D. 1995. *The vector knowledge of beginning physics students*. Phys. Teach. **33**, 74-78.
- McDermott L.C., P. Shaffer and the Physics Education Group at the University of Washington. 2002. *Tutorials in Introductory Physics*. USA: Prentice-Hall, New Jersey
- Nguyen N. y D. E. Meltzer. 2003. *Initial understanding of vector concepts in introductory physics courses*. Am. J. of Phys. **71** (6), 630-638.
- Redish E.F., J. M. Saul and R. N. Steinberg. 1998. *Student expectations in introductory physics*. Am. J. Phys. **66** (3), 212-224.