

UN MANUSCRITO INÉDITO DE BEPPO LEVI

LUCIO R. BERRONE

Universidad Nacional de Rosario (Argentina)

RESUMEN

Damos a conocer en versión española un documento elaborado por Beppo Levi durante los primeros años de su permanencia en Bolonia. Con formato de conferencia y elaborando en torno al concepto de curva, el manuscrito de Levi se interna en cuestiones topológicas, una rareza en el ambiente matemático italiano de la poca.

ABSTRACT

A Spanish version is offered of an unpublished manuscript by Beppo Levi. Judging by its stile a sort of conference, it may be dated in the first years of Levi's permanence at the Bologna University. The document consists of a nice discussion on the concept of curve, a concept submitted to a profound process of revision in the times of his author. The interest of the document increases after observing, on one hand, the scarce insertion of Topology in the italian mathematic of the epoch, and the particularities of Levi's scientific formation on the other.

Palabras clave: Matemáticas, Italia, Siglos XIX-XX, Beppo Levi.

Key words: Mathematics, Italy, 19-20th Centuries, Beppo Levi.

1. Introducción

Hasta hace un tiempo, una abigarrada colección de documentos podía encontrarse dentro de alguno de los cajones del añoso mobiliario de la hemeroteca del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario (Argentina). Convenía el adjetivo a la colección menos por la variedad en el color de los papeles —la mayo-

ría declinaba en la quebradiza gama del amarillo— que por la diversidad de asuntos que trataban: correspondencia manuscrita o mecanografiada, cincuentonas separatas de los *Fundamenta Mathematicae* junto a otras de los *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* atravesando la decrepitud de sus ochenta, apilándose desparejamente sobre ejemplares sueltos de las *Publicaciones del Instituto de Matemática* o sobre los pliegos sin cubierta de un libro inacabado de Mecánica Racional. Un nombre italiano seguido de apellido de raíz judía encabezaba muchos de aquellos documentos: Beppo Levi.

Nacido en Turín, capital del Piemonte, en 1875, Beppo Levi se contaba entre aquellos matemáticos judeo-italianos impulsados a emigrar luego de la imposición en 1938 de las leyes raciales en la Italia fascista. Acompañado por su esposa y dos de sus hijos, había desembarcado en el puerto de Buenos Aires el 6 de noviembre de 1939 para asumir —dos días después— la dirección del Instituto de Matemática de la Facultad de Ingeniería perteneciente, por entonces, a la Universidad Nacional del Litoral con sede central en la ciudad de Santa Fe, capital de la provincia homónima. Atrás quedaban sus años de formación en la Universidad de Turín, donde había asistido a las lecciones de los profesores G. Peano, C. Segre y V. Volterra, lo mismo que su carrera académica sucesivamente desarrollada en Cagliari, Parma y Bolonia. En estas universidades había enseñado y profundizado en la Geometría Algebraica, en cuestiones vinculadas con los Fundamentos de la Matemática, con la teoría de integración y el principio de Dirichlet, áreas estas en donde ahora se reconocen sus contribuciones más originales. Cuando, finalizada la 2da. Guerra Mundial, le es restituida su cátedra en Bolonia, Levi decide permanecer en Rosario. Muere en 1961 y su tumba se encuentra dentro del predio del Cementerio Israelita de la ciudad.

La labor de Levi en Rosario, de sorprendente intensidad para un hombre de su edad, se repartió entre el dictado de cursos de Análisis, Geometría Proyectiva y Ecuaciones Diferenciales (entre otros), la dirección del Instituto de Matemática y la fundación de la colección *Publicaciones del Instituto de Matemática* (de la Fac. de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional del Litoral) y del periódico *Mathematicae Notae*. A lo largo del período, de unos veinte años de duración, despliega además una importante producción escrita: artículos científicos, monografías y también una correspondencia científica que en buena parte permanece inexplorada. De particular relevancia entre esta última parece el *corpus* integrado por la correspondencia mantenida con quienes, matemáticos jóvenes muchos de ellos, intentaban publicar sus contribuciones en alguna de las colecciones cuidadas por Levi.

Sirvan los apretados párrafos últimos como presentación abreviadísima de nuestro autor. El lector interesado puede ampliarla leyendo el artículo [coen0] o el libro [Levi Laura], ambos de edición relativamente reciente. Ocurre que la

impresión impulsada por la Unione Matematica Italiana (UMI) de los dos primeros volúmenes [8] de la obra completa de Levi (1999) y la constante labor de difusión de su editor, Salvatore Coen (Bologna), sumadas a la aparición en *journals* de gran circulación de artículos (v.g. [13]) que rescatan y revalorizan momentos específicos de la producción Leviana, han atraído nuevo interés sobre obra y figura del matemático judeo-italiano. La Universidad Nacional de Rosario congregó en el año 2000 a la quincuagésima Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina (UMA). Los sesenta años transcurridos desde la fundación del Instituto de Matemática Beppo Levi fueron evocados en una de las sesiones de la Reunión. Así pues, no parece desacertado pensar que, si la etapa italiana de Levi ha sido idóneamente documentada ya, el fruto de su labor en Argentina ha sobrevivido y se continúa hasta el presente. En cuanto al estudio de la obra de Levi, este no parece haber alcanzado un estadio satisfactorio y mucho menos final. Como señalamos arriba, su correspondencia, particularmente aquella del período argentino, todavía espera a por una lectura crítica.

Regresemos ahora la atención a los documentos mencionados en el párrafo inicial. Pronto hará quince años separé de entre ellos unas pocas hojas de papel cuadriculado. Su contenido —un manuscrito italiano de grafía diminuta pero clara, reconociblemente Leviana— se internaba en argumentos de naturaleza topológica; i.e., se alejaba de los principales intereses matemáticos que Levi desarrolló a la largo de su vida. Las invocaciones y los giros retóricos, la organización misma del material, se ajustaban todos al estilo de la conferencia: un texto de carácter expositivo para ser leído frente a una audiencia integrada principalmente por no matemáticos; por estudiantes y también, quizás, por cultores de otras ramas del saber. Sabemos que durante sus primeros años de permanencia en Bologna, Levi había elaborado para el *Periodico di Matematiche* los reportes de unos importantes textos de Topología. Así el *Topology*, de S. Lefschetz, el *Analysis Situs* de O. Veblen y el *Foundations of Point Set Theory* escrito por R. L. Moore. Aunque el estudio de esas obras debió abonar la escritura de la conferencia destinada acaso a ser leída como lección inaugural en Bologna, no hay indicios de que fuera leída alguna vez.

De manera sintética, el manuscrito elabora alrededor del concepto matemático de *curva*, una idea que fuera objeto de asombrosas transformaciones en la época de Levi. El equilibrio logrado en la exposición del tema hace de su lectura una ocupación amena y me ha animado a verterla al Español. En la Sección 3 del presente trabajo encontrará el lector la traducción. Antes, en la Sección 2, dejo constancia de las características generales del manuscrito identificando aquellos elementos que permiten datarlo con alguna precisión. En la final sección 4 reúno en una serie de notas las observaciones que hacía al leerlo. Las figuras que muestro las he levantado digitalmente del original.

2. «Circa 60 anni...»

El documento consta de seis páginas manuscritas en papel block cuadrículado tamaño carta. Los folios se encuentran escritos a una faz con excepción del tercero que contiene dos figuras que ilustran un paso en la construcción de la curva de Peano. Una de las figuras está incompleta y aparece con tachaduras; el evidente error cometido en su trazado lo salva Levi ensayando nuevamente el dibujo (véase la fig. 7 debajo). Cada uno de los folios aparece numerado en el ángulo superior derecho. Levi utiliza tinta negra para escribir, pero los números de página están trazados con tinta de color rojo y responden a una grafía de apariencia diferente de la de Levi. Presumiblemente, alguien distinto del autor se ocupó de la numeración de las páginas unas vez arrancadas estas del block. La primera página lleva el número 2, pero el documento nos parece íntegro. Portando un título para el escrito, suponemos que la primera página faltante podía servir de carátula.

En el documento la cursiva es de trazo minucioso, generalmente redondo y sólo excepcionalmente anguloso; de disposición vertical, se ajusta bien a los estrechos renglones del papel cuadrículado. Existen tachaduras y adendas. Al respecto recordemos cómo Roland Barthes distingue en [1] tres tipos principales entre las correcciones de las que suele valerse en sus manuscritos un escritor «clásico»: las de tipo sustitutivo, las de tipo aumentativo y las de tipo diminutivo. Los tres se encuentran representados en el manuscrito de Levi quien, cuando corrige, lo hace suprimiendo —generalmente con un simple trazo horizontal— la palabra o la secuencia de palabras para luego añadir sobre la tachadura y en letra todavía más pequeña la palabra o el texto sustituto. Las expansiones las suele indicar mediante un trazo curvo que con un extremo busca soportar al añadido mientras que con el otro señala el punto de inserción en el texto principal. Sobra observar que estos rasgos de la escritura de Levi resultan inexpresivos porque tipificados.

El manuscrito no está fechado, pero encontramos en la primera página (numerada como pág. 2) la siguiente línea:

È ciò che accade quando, circa 60 anni fa, Weiertrass diede l'esempio di una curva che non ammette direzione in nessun punto.

La referencia permite datar aproximadamente el manuscrito de Levi. En efecto, la cuestión de la existencia de derivadas de una función continua general había emergido entre los analistas hacia finales del siglo XVIII, pero la mayoría de los tratados de Análisis aparecidos hasta 1870 enunciaban sin restricciones su diferenciabilidad. En 1861, tanto Karl Weiertrass (1815-1897) como Bernhard Riemann (1826-1866) enseñaban durante sus lecciones que la diferenciabilidad

no es consecuencia de la derivabilidad. El 18 de Julio de 1872, Weiertrass presentó ante la Academia de Berlín su ejemplo de función continua sin derivada en ningún punto; el ejemplo recurría a la representación en serie trigonométrica:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x);$$

si $0 < a < 1$, b es un entero impar y $ab > 1 + 3\pi/2$, la derivada f' no existe en ningún punto. Durante dicha conferencia (cfr. [15]), menciona el ejemplo de Riemann

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi} \cos(n^2 \pi x),$$

pero no acierta a probar su no diferenciabilidad en todo punto (la cuestión, abordada por G. H. Hardy en 1916, será finalmente zanjada en dos trabajos de J. Gerver aparecidos en 1970/71 en el *American Journal of Mathematics*; cfr. [4]). Weiertrass mantuvo asidua correspondencia con el matemático francés P. du Bois Reymond (1831-1889). La función fue dada a conocer en 1875 por este último a través del artículo [3] publicado en el *Journal de Crelle*. En Italia es Ulisse Dini (1845-1918) quien se interesa vivamente en el ejemplo de Weiertrass y, en una sucesión de trabajos aparecidos en 1877, consigue una amplia generalización del mismo.

Contemos los «alrededor de 60 años» indicados por Levi a partir de 1875, la fecha de publicación del artículo de du Bois Reymond, o iniciemos la cuenta en 1872, cuando la conferencia de Weiertrass ante la Academia. Resulta en cualquier caso que el manuscrito debe datarse alrededor de 1930: debió de haber sido escrito durante sus primeros años en Bolonia (su traslado había ocurrido a principios del año académico 1928/29). En comunicación personal, S. Coen (Bolonia) confirma el interés de Levi en cuestiones ligadas a la Topología. Concretamente, en 1931 Levi había escrito para el *Periodico di Matematiche* las reseñas de dos libros de la colección de los Coloquios editada por la American Mathematical Society: una de *Topology*, de S. Lefschetz (Vol. XII de la colección), y la otra del volumen sobre *Analysis Situs* (Vol. 5 de la colección) de O. Veblen. Se publica dos años después en el mismo periódico la reseña de otro volumen (Vol. XIII) de la colección: el *Foundations of Point Set Theory* de R. L. Moore (cf. [2], págs. CIV y CV). Coen añade la observación de que ni la formación científica de Levi ni el ambiente matemático italiano de entonces contribuían positivamente al desarrollo de intereses en el campo (ello, creo, agrega algún valor al documento). A

comienzos de la página 5, luego de discutir las objeciones al concepto de curva según Jordan levantadas por el hallazgo de la curva que llena un cuadrado, Levi da cuenta del tiempo pasado desde el descubrimiento de Peano y pregunta retóricamente por la opinión de la «*geometría moderna*» a este respecto. De hecho, responde, desde la época de Peano,

si è costruita la teoria degli insiemi, è nata la topologia, ed entrambe hanno riesaminato e discusso la questione.

Destacable en la cita es la mención explícita de la Topología. Más adelante (pág. 7 del manuscrito), Levi menciona a K. Menger, cuya *Dimensions-Theorie* había aparecido en 1928.

Menciono por último que Coen señala la posibilidad de que la conferencia hubiese sido escrita para ser leída como *discorso di inaugurazione* en Bolonia. La intervención de las autoridades académicas adictas al régimen fascista —conjetura Coen— habría exonerado a Levi y eventualmente concedido el honor a algún matemático que fuese «*anche un patriota*». Todo esto, claro está, cae en un plano conjetural y no agrega valor alguno al manuscrito.

3. Una versión española del manuscrito

La traducción en símbolos matemáticos de los problemas geométricos o físicos y su consiguiente resolución analítica constituyen el motivo principal del nacimiento de las matemáticas y una de sus tareas fundamentales en todo momento de su desarrollo. Naturalmente, para efectuar esta traducción, primeramente es necesario transformar en objetos matemáticos a aquellos entes a los que el problema mismo refiere, asunto este nada sencillo. La dificultad fundamental radica en el hecho de que a menudo ocurre la ilusión de que los sentidos y la intuición nos definen al ente de manera completa y no contradictoria, sin la posibilidad de casos dudosos; encontramos así una representación analítica que traduce perfectamente la propiedad intuitiva, planteamos el problema y después, con los ojos cerrados echamos a andar los engranajes de los mecanismos matemáticos, que trabajando bajo la guía de operarios escrupulosos y seguros, nos conducen con exactitud al resultado deseado¹.

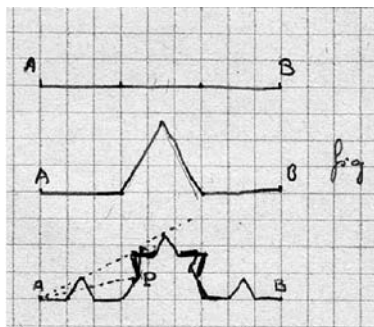
Con el correr del tiempo «el» analista, el geómetra, el físico, olvidan que el ente sobre el que trabajan es una definición científica, por necesidad de rigor sustitución del término de uso corriente en la vida práctica: la identificación es hecha automáticamente y pasa, pues, inadvertida. Pero un día, después de años y años, surge un espíritu crítico que escruta, indaga, duda, y pone su signo de interrogación junto a los conceptos admitidos por la mayoría. Se da cuenta de

que el ente matemático, de menor plasticidad que el original, se presta a interpretaciones que parecen en abierto contraste con el concepto común. Y cuando revela su descubrimiento, el mundo científico se sorprende, no cree, reacciona frente a la paradoja².

Es lo que sucedió cuando, cerca de 60 años atrás, Weierstrass dió el ejemplo de una curva que no admite dirección en ningún punto³.

El ejemplo de Weierstrass era analítico y consistía en una función continua sin derivada en ningún punto. Desde los inicios del cálculo infinitesimal, los matemáticos se habían habituado a traducir el concepto geométrico de curva mediante el de función continua y el concepto de dirección de la curva mediante aquel de derivada; he aquí la razón por la que una función continua sin derivada correspondía, en el campo geométrico, a una curva sin dirección.

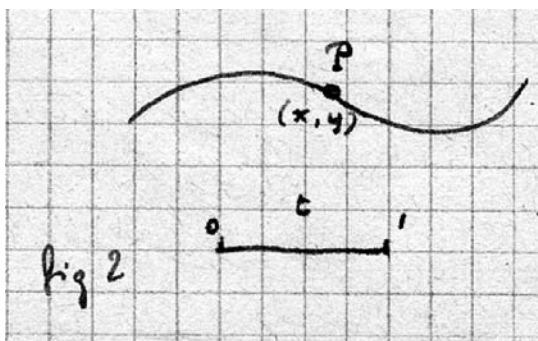
¿Estuviera quizá la paradoja en la forma analítica del ejemplo, el cual no se correspondiera propiamente con un ente geométrico real? No, absolutamente: en 1904 Helge von Koch consiguió construir directamente una curva en estas condiciones⁴.



La construcción es muy simple: partimos de un segmento AB ; lo dividimos en tres partes iguales y suprimimos la central, parte esta que sustituiremos con una punta formada por los dos lados restantes de un triángulo equilátero. Obtenemos así una poligonal con cuatro lados iguales. A cada uno de éstos lo dividimos a su vez en tres partes iguales, suprimiremos la central y procederemos como antes añadiéndole una punta (v. fig. 1); y así sucesivamente, proseguiremos ilimitadamente nuestra construcción. Obtendremos así una curva continua, pero sin dirección en ningún punto. Que la curva sea continua es claro, pues cada una de las sucesivas transformaciones a las cuales sometimos el segmento primitivo la preserva⁵. Se observa también sin mucha dificultad que la curva no tiene tangente en ningún punto. Tomemos como ejemplo el punto A : la tangente en A

sería, como es conocido, la posición límite a la cual tiende una recta que pasa por A y por un punto P que, siguiendo la curva, se mueva hacia A . Pero es fácil observar que dicha recta a veces desciende hasta la horizontal, a veces se eleva hasta formar con AB un ángulo máximo de 30° . Y como la construcción de las puntitas en nuestra figura ha sido continuada indefinidamente, es claro que en todo entorno de A , por pequeño que sea, la semirrecta AP deberá oscilar entre la dirección a 0° y la dirección a 30° , sin alcanzar nunca una posición definida. Lo mismo sucede en todo otro punto de la curva de Helge von Koch que no posee, por tanto, dirección en ningún punto.

Antes de Weierstrass se creía que una función continua fuese derivable en todas partes a excepción de un número finito de puntos⁶ o, con otras palabras, que una curva, eliminados de ella un cierto número de nodos, cúspides y singularidades del género, tuviese en todo otro punto dirección bien definida. El descubrimiento de Weierstrass demostró que la intuición era engañosa y cuando, después de muchas discusiones, todos quedaron convencidos de que el gran matemático alemán tenía completa razón, se nos preguntó: «¿Pero qué cosa debemos entonces entender por curva?».

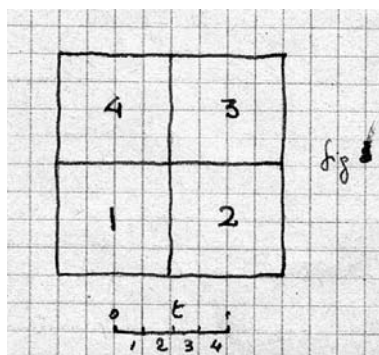


Jordan dió una respuesta que por entonces pareció del todo satisfactoria: «una curva es aquello que viene descrito por un punto con movimiento continuo». Analicemos este concepto: el movimiento será continuo respecto al tiempo t ; es decir, las coordenadas (x, y) de cada punto de la curva (v. fig. 2) deberán expresarse en la forma $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, siendo φ , ψ funciones continuas y unívocas de t . Si el punto P se moviese sobre la curva tan rápido como para recorrerla en un minuto, la variable t variará en el intervalo $(0, 1)$. La continuidad de x, y respecto del tiempo traduce precisamente el hecho de que P no salta de un punto a otro de la curva. De aquí que, conceptualmente, la definición de Jordan significa lo siguiente: «se entiende por curva toda figura que representa el segmento unitario

de manera unívoca y continua». Ignorantes de la tormenta que estaba próxima y que no tardaría en desatarse, acogieron todos con favor a esta solución.

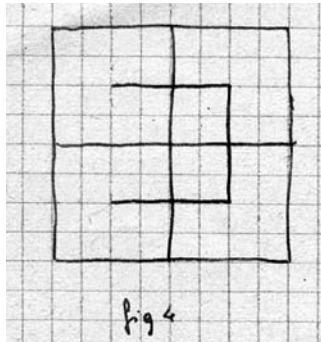
En Turín, cuando cursaba el primer año de Universidad, por las escaleras aquellas que conducían hasta la Facultad de Matemática, situada en el cuarto piso del histórico edificio, y que nosotros subíamos de a dos escalones por vez, descendía todavía para dictar voluntariamente sus lecciones un viejo docente: el profesor Peano. Su nombre era pronunciado con respeto y veneración; quienes lo veían hablaban de él y del descubrimiento que había hecho en su juventud. Y entre todos ellos, uno nos llenaba de maravilla y estupor a nosotros, que apenas nos asomábamos a los misterios del mundo matemático: la construcción de la «curva que llena un cuadrado». Si señores, una curva que circula dentro del cuadrado pasando por todos sus puntos; de modo que, para dibujarla sobre una hoja de papel, deberemos sombrear todo un cuadrado⁷.

El hecho había causado gran maravilla ya en 1890 cuando Peano, que entonces tenía treinta años, había publicado su resultado por primera vez. Su curva era perfectamente acorde con la definición de Jordan que tan bien parecía traducir el concepto intuitivo; muy opuestamente, sin embargo, no era una curva sino verdadera superficie. La mente se pierde ante esta paradoja; y para que se me crea debo indicar, aunque sea rápidamente, de qué se trata. Ruego sin embargo a los presentes meditar sobre todo cuanto diré a continuación, de modo que cada uno pueda convencerse a sí mismo, puesto que, tratándose de algo tan contrastante con la intuición, no resulta su verdad si no es de la percepción del completo rigor lógico del procedimiento seguido.

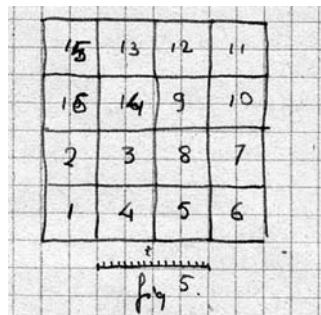


La curva que construiremos repitiendo consideraciones de Hilbert⁸, recae en la definición de Jordan; es decir, es una figura que representa de modo unívoco y continuo el segmento unitario. Dibujemos (v. fig. 3) un cuadrado y el segmen-

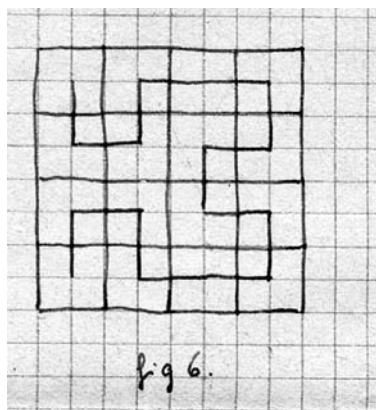
to unitario. Dividamos en cuatro partes iguales al segmento unitario y en cuatro al cuadrado, imponiendo la correspondencia entre el primer punto del segmento y el primero del cuadrado, el segundo del segmento y el segundo del cuadrado y así sucesivamente. En otras palabras, debiendo nuestra curva recorrer en un minuto todo el cuadrado, le imponemos que recorra en el primer cuarto de minuto todo el primer cuarto del cuadrado, en el segundo cuarto de minuto el segundo cuarto del cuadrado, en el tercero el tercero, en el cuarto el cuarto⁹. Esquemáticamente, este movimiento es aquel que resulta de la fig. 4. Naturalmente, por ahora se supone que el punto no recorre todos los cuadrados pequeños sino sólo una quebrada que une los centros.



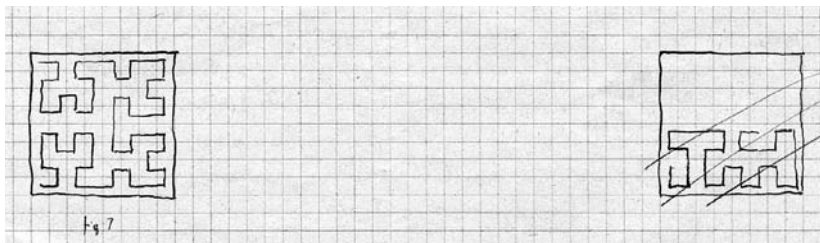
Repitamos ahora la misma operación en cada uno de los cuatro cuadraditos parciales (v. fig. 5): cada uno se dividirá en cuatro cuadraditos que numeraremos en orden, siempre de modo que resulten contiguos dos cuadrados pequeños con números sucesivos, a fin de que el punto pueda pasar sin saltos de uno a otro. El primer cuadrado corresponderá al primer dieciseisavo del segmento unitario, el segundo al segundo, y así sucesivamente. La curva recorrida es aquella de la fig. 6.



Se trata ahora de dividir de nuevo cada cuadrado en cuatro, numerarlos y recorrerlos como antes (v. fig. 7), y así sucesivamente hasta el infinito. Ya que el límite al cual tiende el cuadradito de más en más pequeño es un punto y, además, la curva está compuesta por puntos, se comprende así cómo es posible recorrer ordenadamente este conjunto de cuadraditos infinitesimales; es decir, de puntos. El juego está todo aquí; en el poner orden en este recorrido.



La curva es continua, como se comprende pensando detenidamente en el método seguido de considerar contiguos a cada par de cuadraditos numerados en sucesión; pero ciertamente no es diferenciable, por el mismo motivo que no lo es la curva de Helga von Koch¹⁰.



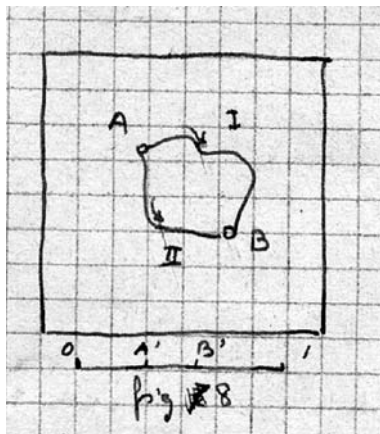
Con la curva de Peano parece desaparecer una de las distinciones más fundamentales de la geometría: la distinción entre curva y superficie. ¡De cuántas discusiones fue causa este descubrimiento, fuera en el ambiente matemático como en el filosófico! «La intuición nos engaña», «la intuición está en crisis», se decía. La intuición no nos sugiere curvas que no tengan dirección, y mucho

menos curvas que cubran toda una superficie. En realidad ha ocurrido lo siguiente: la definición de Jordan, que a primera vista parecía traducir exactamente el concepto intuitivo de curva, tenía un calibre mayor que el concepto intuitivo mismo, y conducía a clasificar como curvas a ciertas figuras dudosas para las que el sentido común no sabe decidir adecuadamente el género al que pertenecen.

Ahora se me preguntará: «Desde 1890, año del descubrimiento de Peano, mucho tiempo ha pasado. ¿Cuál es la opinión de la geometría moderna al respecto?».

Es verdad: la teoría de conjuntos ha sido construida, ha nacido la topología, y entre ambas han vuelto a examinar y discutir el problema. Un examen profundo de la curva de Peano nos demuestra que si bien la correspondencia entre puntos del cuadrado y puntos de la recta es unívoca, no es sin embargo biunívoca. Existen puntos del cuadrado a los cuales corresponden infinitos puntos del segmento unitario. De hecho, consideremos en la fig. 5 un vértice de un cuadradito; en todas las sucesivas subdivisiones, este será siempre vértice de un cuadradito; e infinitos cuadraditos se irán adensando alrededor de este punto no sólo desde un único lado, sino desde los cuatro diferentes lados. Corresponderán a estos cuatro series distintas de puntos del segmento unitario, que tienden a cuatro puntos distintos. A este punto del cuadrado corresponderán pues cuatro puntos del segmento. No existe biunivocidad.

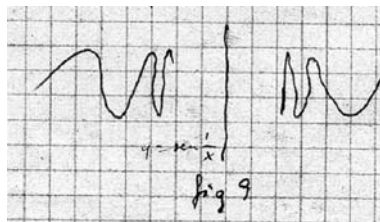
Por otra parte, Cantor demostró que este obstáculo se podía superar, e indicó el modo de establecer una correspondencia efectivamente biunívoca entre puntos del cuadrado y puntos del segmento. ¿Pero a qué precio? Se debía renunciar a la continuidad de la correspondencia. Recorriendo regularmente el segmento, se recorre el cuadrado a saltos: no se puede más hablar de una curva dentro del cuadrado.



Y que no sea posible conciliar las dos cosas, biunivocidad y continuidad, lo prueba una demostración muy simple debida a Jürgens. Sean (v. fig. 8) dos puntos A, B en el cuadrado, a los cuales les corresponden los puntos A', B' en el segmento unitario. Si la correspondencia es continua; si se va de A a B a lo largo de una curva I contenida por el cuadrado, se deberá recorrer sobre la recta el segmento $A' B'$. Pero si se va de A a B a lo largo de otra curva II, nuevamente por continuidad se deberá recorrer el mismo segmento $A' B'$ sobre la recta. Por consiguiente al segmento $A' B'$ corresponden infinitos arcos de curva, y la correspondencia ya no es biunívoca.

Es así que en 1911 Brouwer demostró un teorema fundamental, que parece concluir este período de dudas y de investigaciones: un trozo de curva puede representarse de modo biunívoco y continuo sólo en un trozo de curva; si se la representase sobre una superficie, la representación resulta o bien no biunívoca, o bien no continua.

¿Qué cosa es, pues, una curva? La teoría de conjuntos ha derribado la idea analítica de que la distinción entre curva y superficie radica sólo en el hecho de que, a fin de individualizar una curva, una coordenada sea necesaria, mientras que para individualizar una superficie se precisen dos. Se puede muy bien individualizar los puntos de una curva con dos coordenadas y los de una superficie con una sola. Tampoco es conveniente afirmar: «por curva se entiende la representación biunívoca y continua de un segmento», como parece sugerirnos el teorema de Brouwer. Porque, por ejemplo, una circunferencia no sería una curva, puesto que vuelve sobre sí misma y haría entonces corresponder un mismo punto a los dos extremos del segmento. [Y esta dificultad fuera quizá todavía despreciable. Además sería necesario excluir de la definición de curva, por ejemplo, a $y = \sin(1/x)$, curva que oscilando indefinidamente entre los valores -1 y $+1$ en las cercanías del punto $x=0$, tendiendo al origen en ondas que van estrechándose siempre, no alcanza en $x=0$ ningún valor definido.]¹¹



Para caracterizar el concepto de curva, desde no hace mucho tiempo parece necesario regresar al concepto de dimensión, clarificarlo, para poder declarar: la curva es

aquella figura que posee una sola dimensión¹². ¿Pero qué cosa significa poseer una sola dimensión? La respuesta fue dada por Menger: “así como para aislar un trozo de hilo debemos cortar en dos puntas, igualmente un conjunto se dirá unidimensional en un punto si existen entornos arbitrariamente pequeños de este punto contenidos en el conjunto y limitados por un contorno formado únicamente por puntos aislados». De este modo se consigue excluir de las curvas la curva de Peano, en tanto que serían curvas la de ecuación $y=\sin(1/x)$ y la curva de Helge von Koch, quedando así satisfecha la intuición. Esta solución parece ahora el huevo de Colón; ¡pero cuánto trabajo para alcanzarla! ¡Cuántos años, cuántas discusiones en este alternante pasar de lo simple a lo complicado, de lo complicado a lo simple, a través de visiones planteadas por la experiencia pasada y que van sucesivamente ampliándose! Fue sin embargo un progreso; un verdadero gran progreso dirigido hacia aquel ideal de perfección que es quizás el más noble fin de la investigación matemática.

NOTAS

1. Obsérvese la metáfora maquinaal que emplea Levi para expresar la idea del método matemático (o mejor, la idea del «método científico» en general): imposible no pensar en la línea de montaje de Henry Ford (1908). Muy distinta, en todo caso, de la que emplea posteriormente Th. Kuhn, quien habla del desarrollo de un «juego», de jugadores y no de operarios.
2. Los dos párrafos iniciales sitúan a la *representación* matemática (de los problemas físicos y geométricos) tanto en el origen como en la evolución de la ciencia Matemática. Levi considera que el problema de estas representaciones reside no tanto en cierta engañosa univocidad adjudicable a una grosera ilusión generada por los sentidos y la intuición, sino mas bien en la estereotipia con la que son utilizadas por analistas, geómetras y físicos (sustitución del objeto por su representación). Felizmente, surge cada tanto *‘uno spirito critico’* que, percibiendo las inconsistencias de la representación, cuestiona su validez. En general, la epistemología a la que Levi adhiere es de corte dualista, de influencia Kantiana. Vaya el comentario a modo de curiosa observación, pues es claro que, conduciendo como lo hacen al abordaje del tema central, los párrafos tienen principalmente un valor estilístico. Observo, sin embargo, que Levi había mostrado verdadero interés en las cuestiones de fundamento de la ciencia y que una elaboración precedente al fragmento es su lección inaugural en la Universidad de Cagliari [9].
3. Como hemos señalado en la sección 2, la referencia a los aproximadamente sesenta años transcurridos desde el ejemplo de curva sin tangente de Weierstrass permite datar aproximadamente el manuscrito de Levi.
4. Compárese el pasaje con este otro de Klein:

It is to be noticed that we have here an example of a curve with indeterminate derivatives arising out of purely geometrical considerations, while it might be supposed from the usual treatment of such curves that they can only be defined by artificial analytic series. ([7], pgs. 44-45).

El Congreso de Matemática celebrado en Chicago en agosto de 1893 había tenido entre sus participantes al alemán F. Klein. Luego del Congreso, el profesor Klein organizó un coloquio al que asistieron muchos de los representantes más destacados de la matemática norteamericana de la época. El contenido de las conferencias ofrecidas por Klein, recogido por Alexander Ziwet —por entonces ‘assistant professor’ en la Universidad de Michigan—, fue compilado y publicado en 1894 bajo el título *Lectures on Mathematics*. Las *Lectures* de Klein conocieron amplia difusión y sabemos que Beppo Levi las había leído (son citadas en la nota 6 de [Levialcune], por ejemplo). En cuanto al ejemplo de curva con «indeterminate derivatives» mencionado por Klein, digamos que su construcción es bien más compleja que la de la curva que von Koch había presentado en el artículo [14] en 1904.

5. Levi desea exponer rápida y convincentemente la idea de que la curva de Von Koch es continua. Sin embargo, el argumento que invoca es incompleto, pues no se prueba que la convergencia de la sucesión de poligonales sea uniforme (cosa por lo demás fácilmente visualizable en el procedimiento constructivo de la curva de von Koch). La impresión es que Levi preparaba el material para leerlo frente a una audiencia integrada principalmente por inexpertos; por estudiantes y expertos en otras ramas del saber.
6. La afirmación no es, sabemos hoy, correcta: Bernhard Bolzano había construido alrededor del año 1834 una función continua sin derivada en ningún punto. Sin duda es el ejemplo de Weierstrass y no el de Bolzano el que alcanzó debida difusión.
7. El párrafo es ciertamente singular. El contraste entre la juventud reflejada por los «due gradini per volta», manera en que Beppo y sus compañeros estudiantes subían por la escalera, y la respetable y descendente figura del viejo profesor Peano le confiere una calidez normalmente ajena al estilo de Levi, quien aún en el texto de sus conferencias ejercita una expresión neutra y muchas veces retórica.
8. En [11] Peano definía aritméticamente su célebre curva. Poco después, D. Hilbert (cfr. [6]) exhibe una construcción similar en términos más intuitivos. Puede consultarse el libro [12] para ampliar este punto.
9. La descripción de Levi se vuelve aquí algo imprecisa. No deja claro cuál de los puntos de un cuadrado es el «primero». Además, el argumento se vuelve claramente circular si la correspondencia cuya existencia se propone probar para el intervalo unitario se asume como dada para cada uno de los cuartos de intervalo. Unas líneas más abajo, cuando completa su explicación, salva la cuestión de manera elegante.
10. El punto parece menos claro que lo que sugiere la observación de Levi. De hecho, para la curva de Peano la comprobación de la indefinida oscilación de la secante en un entorno del punto de tangencia es menos simple que para la curva de von Koch.
11. Este párrafo que encerramos entre corchetes aparece al final del documento: Levi lo inserta en el texto principal valiéndose de una llamada (véase la reproducción de aquella página).
12. Levi habla de «regreso» a la idea de dimensión pensando seguramente en las definiciones de punto, línea y superficie dadas por Euclides en sus *Elementos*.

AGRADECIMIENTOS

Una versión española preliminar del manuscrito fue preparada siguiendo mi indicación por Jorge Flamini. Corregí y completé aquella primera versión, de manera que es a mí a quien debe cargarse con la responsabilidad de la traducción. Salvatore Coen respondió con solicitud a mi consulta cuando buscaba aclarar el origen del manuscrito. Expreso aquí mi sincero agradecimiento hacia ambos.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] BARTHES, R. (1997) *El Grado Cero de la Escritura; seguido de nuevos ensayos críticos*. Madrid, Siglo XXI.
- [2] COEN, S. (1999) *Beppo Levi: una biografía*. En: *Levi, Opere 1897/1926*, (S. Coen, Ed.), Edizioni Cremonese, pp. XII-LIV.
- [3] DU BOIS REYMOND, P. (1875) «Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente nach ihren Aenderungen in den kleinsten Intervallen». *Journal für Math*, 79, 21-37.
- [4] DUISTERMAAT, J.J. (1997) «Selfsimilarity of 'Riemann's Nondifferentiable Function». *Nieuw Arch. Voor Wiskunde, Deel 15*, 303-337.
- [5] HAWKINS, TH. (1979) *Lebesgue's Theory of Integration. Its origins and development*. New York, Chelsea.
- [6] HILBERT, D. (1891) «Ueber die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück». *Math. Ann.*, 38, 459-460.
- [7] KLEIN, F. (1911) *Lectures on Mathematics*. AMS Chelsea (reprinted by the AMS from the 1911 edition), Providence, 2000.
- [8] LEVI, B. (1999) *Opere 1897/1926*. S. Coen, Ed., Bologna, Edizioni Cremonese.
- [9] LEVI, B. (1908) *Alcune considerazioni sulle idee scientifiche primordiali*, Discorso per l'inaugurazione dell'anno accademico 1907-1908 nella R. Università di Cagliari, Tip. Pietro Valdès, Cagliari, 1-53. También en: LEVI, B. (1999) *Opere 1897/1926*, (S. Coen, Ed.), Edizioni Cremonese, Vol. I, pp. 673-722.
- [10] LEVI, L. (2000) *Beppo Levi, Italia y Argentina en la Vida de un Matemático*. Buenos Aires, Libros del Zorzal.
- [11] PEANO, G. (1890) «Sur une curbe qui remplit toute une aire plane». *Math. Ann.*, 36, 157-160.
- [12] SAGAN, H. (1994) *Space-Filling Curves*. New York, Springer.
- [13] N. SCHAPPACHER & R. SCHOFF (1996) «Beppo Levi and the arithmetic of elliptic curves». *Math. Intelligencer 18(1)*, 57-69.

- [14] VON KOCH, H. (1904) «Sur une courbe continue sans tangente obtenue par une construction géométrique élémentaire». *Archiv. för Matemat. Astron. och Fys., 1*, 681-702.
- [15] WEIERSTRASS, K. (1895) «Über continuierliche Functionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen». En: *Mathematische Werke II*. Berlin, Mayer u. Müller, 71-74.