Eugenio M. Fedriani Martel *Universidad de Pablo Olavide*

Paradojas: Entre el lenguaje y la ciencia

1. Aproximación a las paradojas

Como matemático, debería comenzar dando una definición de paradoja, probando la existencia de las mismas y, dado que no será posible demostrar su unicidad, debería dar una clasificación.

Etimológicamente, paradoja significa contrario a la opinión o, lo que es lo mismo, contrario a la opinión recibida y común. Se puede definir paradoja como una idea extraña, opuesta a lo que se considera verdadero o a la opinión general.

No obstante, ésta es una de esas definiciones en las que no nos hacemos una idea muy exacta del objeto definido hasta toparnos con algunos ejemplos que la clarifiquen. Por esto, vamos a hacer un recorrido por la historia de la Matemática (y de la Filosofía y de la Ciencia...), descubriendo cómo han surgido las diferentes paradojas existentes y cuáles han sido sus efectos.

Hace más de 2.500 años (en el s.VI a.C.), según cuenta la tradición griega, un poeta, filósofo y legislador, llamado Epiménides de Cnosos y oriundo de Creta, despertaba después de haber dormido 57 años en una caverna. Justo desde ese momento, los que lo consideraron un personaje casi fabuloso, cuentan que se puso a profetizar. Entre las cosas que decía, ha quedado algo para la posteridad: la primera paradoja de la historia de la humanidad: -"Todos los cretenses son unos mentirosos"- decía.

A juzgar por su historia personal, nada nos hace dudar de su aseveración, pero, si la analizamos con cuidado, algo puede sorprendernos... Epiménides es cretense, luego miente; pero si miente, no puede decir que miente, porque estaría diciendo la verdad.

Epiménides miente $\Leftrightarrow$ dice la verdad.

Enseguida, sus coetáneos, calificaron este juego de palabras como paradoja, pero cuando los griegos usaban la expresión paradoja, se referían solo a cosas que maravillan.

Poco tiempo después, sobre el año 460 a.C., Zenón de Elea propone varias paradojas (transmitidas hasta nuestros días por Aristóteles); entre las más conocidas, arremete contra el movimiento.

Hay quien dice que Zenón pretendía, demostrando la imposibilidad del movimiento y de la multiplicidad, poner en crisis la doctrina pitagórica del número como principio de la realidad. ¿Por qué? Posiblemente, Zenón había sido discípulo de Parménides y éste sostenía que el movimiento era pura apariencia. Ya se sabe, sostenía la "unidad y permanencia del Ser frente a la multiplicidad y cambio". Recordemos brevemente algunas paradojas de Zenón:

1. La de la Dicotomía: "Un objeto, antes de recorrer una distancia, debe recorrer la mitad de la misma; y, antes, la mitad de la mitad... Así, considerando un número infinito de subdivisiones, un corredor, antes de comenzar a correr, debe realizar un número infinito de etapas, lo cual es imposible".
2. La de Aquiles y la tortuga: "Si Aquiles, en una carrera, le da una ventaja a una tortuga, nunca podrá alcanzarla. La razón es que (por muy rápido que vaya Aquiles y por muy despacio que vaya la tortuga), cuando Aquiles alcanza el lugar donde se encontraba inicialmente la tortuga, ésta ya ha avanzado algo (aunque sea muy poco); y Aquiles deberá repetir este proceso indefinidamente, por lo que nunca la alcanza."
3. La de la flecha: "Una flecha en el aire ocupa siempre un espacio igual a sí mismo y lo que siempre ocupa un espacio igual a sí mismo no puede estar en movimiento".
4. La del estadio o de las filas en movimiento (en el que "demuestra" que si existe movimiento, lo indivisible es divisible), etc.

Las dos primeras paradojas de Zenón demuestran que el movimiento es imposible si postulamos que espacio y tiempo son continuos (es decir, podemos subdividir espacio y tiempo indefinidamente). Sin embargo, las dos últimas, lo prueban bajo la hipótesis contraria: espacio y tiempo están compuestos de indivisibles. Lo que no queda muy claro en una primera aproximación a Zenón es si es posible demostrar algo aparentemente tan extraño.

Según Carl Boyer, en su Historia de la Matemática, "los argumentos de Zenón parecen haber tenido una profunda influencia en el desarrollo de la Matemática griega, comparable a la del descubrimiento de los inconmensurables, con el cual pueden haber estado relacionados".

2. Clasificación y análisis formal

Aunque no pueda tratarse de algo reconocido universalmente, ya podemos dar una primera clasificación de las paradojas, según las que han sido nuestras reacciones ante Epiménides y Zenón:

- Algunos de nosotros, puede que porque ya conociésemos esas historias o porque somos mucho más inteligentes que los griegos de los ss. VI al IV a.C. (o más "pasotas"), no nos parece una cosa que extrañe. Si es así, hablaremos de paradojas refutadas.
- A otros puede habernos causado cierta extrañeza, pero albergamos la confianza de que nuestra lógica interna resista a Epiménides y podamos seguir viviendo sin conocer cuál es la solución. Estamos ante lo que llamaremos paradojas asumibles.
- Puede que alguno siga pensando en estas paradojas durante horas (ahora, esta noche,...) y no pueda seguir viviendo tranquilo. Se encuentra ante las paradojas de crisis.

A estas últimas paradojas es a las que comúnmente se las denomina antinomias.

Según el filósofo español José Ferrater Mora, a veces se usa el término paradoja como equivalente a antinomia; "más propiamente se estima que las antinomias son una clase especial de paradojas, a saber, las que engendran contradicciones no obstante haberse usado para defender las formas de razonamiento aceptadas como válidas."

Para este mismo autor y para muchos otros estudiosos de ellas, las paradojas se deben clasificar según su naturaleza en: paradojas lógicas y paradojas semánticas.

- Entre las paradojas lógicas más difundidas podemos citar las que formuló Bertrand Russell en su obra *Principia Mathematica* (más tarde hablaremos de ellas).
- Las paradojas semánticas reciben también el nombre de paradojas metalógicas o epistemológicas. Dos de las más conocidas paradojas semánticas son:
    - La paradoja de Epiménides.
    - La paradoja de P. E. B. Jourdain (1879-1919). Esta paradoja consiste en dar una tarjeta que, por un lado lleva escrito: "Al dorso de esta tarjeta hay un enunciado verdadero". Al otro lado de la tarjeta, se encuentra la frase: "Al dorso de esta tarjeta hay un enunciado falso".

Las soluciones propuestas para las paradojas son muy diferentes según se trate de lógicas o de semánticas:

- Una de las soluciones más reconocidas a las paradojas lógicas la dio B. Russell en la Teoría de los tipos.
- Para las paradojas semánticas, los intentos de solución han sido más numerosos; la solución más universalmente aceptada es la que se basa en la teoría de los lenguajes

y de los metalenguajes, sobre la que volveremos más adelante. En ella, se establecen varios niveles de lenguaje. Así, (supongamos la paradoja "*miento*") "es verdadero" o "es falso" no pertenecen al mismo lenguaje que "*miento*", sino al metalenguaje de este lenguaje y estas paradojas quedarían eliminadas.

Según P. F. Strawson y G. Ryle (filósofos del grupo de Oxford), las paradojas semánticas no son paradojas propiamente dichas. Para ellos, decir "Miento" es como decir "Yo también" cuando no se ha dicho anteriormente nada. En cierto sentido, las expresiones como "Miento" permiten ver que hay construcciones del lenguaje cuyo significado es artificial y que pueden generar paradojas.

3. Paradojas en la evolución de la Matemática

Como lo que más me ha interesado siempre ha sido el aspecto matemático, sigamos con un breve estudio de las principales paradojas que les han aparecido a grandes matemáticos. Éstas han servido tanto para hacer evolucionar el lenguaje formal como, en ocasiones, para abrir nuevas vías en el desarrollo conceptual.

Conocidas las primeras, las bases procedentes de la Matemática Griega, comentemos algo sobre situaciones muy posteriores:

En 1725, los hermanos Daniel y Nicolaus Bernoulli son profesores de Matemáticas en la Universidad de San Petesburgo; de sus discusiones, surge la Paradoja de San Petesburgo (publicada en el Comentarii Academiae Scientiarum Imperialis Metropolitanae de San Petesburgo). Tal paradoja se enuncia: Supongamos que Pedro y Pablo se ponen de acuerdo para jugar a un juego que se basa en el lanzamiento de una moneda; si en la primera tirada sale cara, Pablo pagará a Pedro una corona; si sale cruz y en la segunda sale cara, Pablo pagará a Pedro dos coronas; si aparece cara por primera vez en la tercera tirada, Pablo pagará a Pedro cuatro coronas, y así sucesivamente, de manera que la cantidad a pagar por Pablo a Pedro si aparece una cara por primera vez en la n-ésima tirada será de 2^{n-1} coronas. Ahora bien, ¿cuánto debería pagar Pedro a Pablo por el privilegio de jugar contra él?" La esperanza matemática de Pedro, dada por $\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2^2}\cdot 2+\frac{1}{2^3}\cdot 2^2+\Lambda+\frac{1}{2^n}\cdot 2^{n-1}+\Lambda$, es evidentemente infinita, a pesar de que el sentido común sugiere una suma finita, y bastante modesta por cierto. Cuando Georges Louis Leclerc, conde de Buffon (1707-1788), hizo un estudio empírico de la cuestión, halló que en 2.084 partidas del juego mencionado, Pablo tendría que pagar a Pedro 10.057 coronas, lo cual indica que, para una única partida, la esperanza de Pablo, en vez de ser infinita es en realidad ¡algo menor que 5 coronas! La paradoja que encierra el problema de San Petesburgo fue muy discutida a lo largo del s.

XVIII, dándosele diferentes explicaciones. Puede consultarse, por ejemplo, el texto de Todhunter (1861).

En 1847, August De Morgan publica Lógica formal o el cálculo de inferencia y demuestra que 2=1:

Sea x=1. Entonces, x^2=x. Así x^2-1=x-1. Dividiendo ambos miembros por x-1, concluimos que x+1=1. Es decir, puesto que x=1, 2=1. Evidentemente, el engaño o falacia está en dividir por x-1=0. A estas paradojas en las que algo extraño se sostiene por una falsa demostración, se las suele llamar paradojas falsídicas.

Poco después, empieza a haber problemas al hablarse de correspondencias del todo con la parte en conjuntos infinitos (1-10, 2-20...); es decir, se abarcan conjuntos completos relacionándolos con los miembros de un subconjunto suyo. Esta paradoja deja de serlo entre los matemáticos, pues deja de producir extrañeza (es normal que suceda esto con las paradojas verídicas).

Cantor (1845-1918), con su demostración de las vacas, convierte en paradoja verídica el hecho antinómico de que existan siempre más clases de cosas de una clase dada que cosas de aquella clase:

"Si cada vaca se pone en correspondencia arbitrariamente con una clase (de la que puede ser miembro y puede no serlo), quedará una clase que no está en correspondencia con ninguna vaca."

No debemos olvidar que este gran matemático, víctima de la incomprensión de sus contemporáneos, murió en un hospital psiquiátrico acusado de estar como un cencerro.

Según Bertrand Russell (1901), la siguiente gran paradoja se debe a Berry, el bibliotecario. Es una antinomia que trata de números y sílabas; traducida al Español, queda: "*10* tiene un nombre de 1 sílaba. *77* tiene un nombre de 6 sílabas. La *séptima potencia de 777* tiene un nombre que, si lo fuéramos a escribir completamente, alcanzaría hacia las 100 sílabas. Pero este número puede ser, también, especificado más brevemente en otros términos. Aquí, lo he especificado en 18 sílabas. Sin embargo, podemos estar seguros de que existe una infinidad de números que resiste toda especificación, por nombre o por descripción, con menos de 23 sílabas. Existe solamente una cantidad finita de sílabas en total, y por tanto, solamente un número finito de nombres o frases de menos de 23 sílabas, mientras que existe un número infinito de enteros positivos. Entonces podemos proceder de la siguiente forma. De entre aquellos números no definibles en menos de 23 sílabas, debe haber uno que sea el menor y he aquí nuestra antinomia: *el mínimo número no definible en menos de 23 sílabas* es definible en 22 sílabas. Lo acabo de definir así."

"Una paradoja verídica lleva consigo una sorpresa, pero la sorpresa se disipa rápidamente cuando consideramos su demostración. Una paradoja falsídica lleva consigo una sorpresa, pero se revela como una falsa alarma cuando resolvemos la falacia subyacente. Sin embargo, una antinomia lleva consigo una sorpresa que solamente puede ser afrontada mediante el repudio de una parte de nuestra herencia conceptual." (W.V.Quine).

Esto es, hay antinomias que se convierten en paradojas verídicas (como la relación de los números naturales con los múltiplos de 10) o en falsídicas (ejemplos son las de Zenón). Incluso, hay paradojas verídicas o falsídicas que pueden dejar de ser paradojas.

Entre las paradojas lógicas más conocidas están las que formuló Bertrand Russell en su obra Principia Mathematica:

- Paradoja de las clases: según ella, la clase de todas las clases que no pertenecen a sí mismas pertenecen a sí misma si y solo si no pertenece a sí misma.
- Paradoja de las propiedades: la propiedad de ser impredicable (o propiedad que no se aplica a sí misma) es predicable (o se aplica a sí misma).
- Paradoja de las realidades: la relación de todas las relaciones relaciona a todas las relaciones si y solo si la relación de todas las relaciones no relaciona a todas las relaciones.

Cuando Russell le envió a Gottlob Frege algunas de sus antinomias, éste entró en crisis, le contestó con la célebre "la aritmética tartamudea" y escribió:

"Un científico apenas puede encontrarse con algo más indeseable que el ver derrumbarse los fundamentos de su obra precisamente cuando su obra ha sido acabada. Yo he sido puesto en esta situación por una carta de Bertrand Russell."

No obstante, los matemáticos debemos estar preparados para las nuevas paradojas y, sobre todo, las nuevas antinomias que vayan apareciendo. De hecho, muchos estamos acostumbrados a encontrárnoslas en exámenes de nuestros alumnos, aunque no se hagan nunca tan famosas como algunas de las siguientes:

En 1908, Grelling propone la paradoja de los adjetivos heterológicos, una antinomia semántica. Es posterior la paradoja verídica del barbero, que aparece anónimamente en 1918: En un cierto pueblo hay un hombre que es un barbero. Este barbero afeita a todos y solo a aquellos hombres del pueblo que no se afeitan a sí mismos. ¿Se afeita el barbero a sí mismo?" (aunque yo prefiero preguntar: ¿cómo se llama el pueblo?).

Creo que no se debe terminar este recorrido sin un último comentario, relativo a un acontecimiento decisivo para el pensamiento del siglo XX. Gödel, en 1931, prueba la incompletitud de la Teoría de Números. No deja de ser una paradoja verídica que revolucionó completamente la Matemática. El Teorema de Incompletitud dice que en todo sistema axiomático suficientemente poderoso como para contener a la Teoría de Números deben existir afirmaciones "indecidibles"; es decir, afirmaciones que tienen sentido en el sistema (dicen algo coherente) pero tales que no se puede demostrar su veracidad ni su falsedad. El ejemplo más conocido es, en la Teoría de Conjuntos, la Hipótesis del Continuo.

4. Paradojas en la Literatura

También existen paradojas en otras disciplinas: en Física (la paradoja de Olbers, la paradoja de los relojes, la paradoja de hidrostática...), en Medicina (paradoja de Kretz, de Weber, sexual...), en Mecánica (paradoja de Ferguson...), incluso en los lenguajes administrativo y jurídico abundan las paradojas semánticas. Estamos ante un tema que no solo relaciona diferentes ramas de la Matemática, como se ha apuntado, sino que relaciona las Matemáticas con otras ramas del saber.

En particular, en literatura, la paradoja es una figura retórica y se suele identificar en contraste con paradoja semántica. Pero es posible encontrar situaciones paradójicas en numerosas novelas, como por ejemplo en la famosa ópera "Los piratas de Penzance" (1879); en ella, el protagonista, Frederic, tiene 21 años pero como solo ha vivido cinco cumpleaños no lo pueden maltratar...

Recientemente, destaca la importancia de las paradojas en obras como la de Borges. De su literatura nos interesa ahora la ficcionalidad: se inventan otros mundos y tiempos, y se plantean enigmas y paradojas. Prácticamente desde 1930, su campo era el de lo simbólico, el campo de la filosofía del lenguaje, en el que no se puede decidir dónde está la relación del lenguaje con la verdad y el sentido. La ficción en Borges significa algo más allá de lo verdadero o lo falso: "es una máquina generadora de enigmas que gira alrededor de la descomposición verbal de la verdad legítima y de la ambivalencia perpetua, del texto indescifrable y de la forma misma del secreto en Literatura".

Actualmente, todos estamos muy familiarizados con las paradojas procedentes del lenguaje publicitario y otras situaciones en las que se pretende aprovechar la sorpresa del receptor del mensaje. Para terminar, vamos a analizarlas un poco más.

Como se comentó sobre los tipos de paradojas, Frank Ramsey (1903-1930) clasificó en 1926 las paradojas en lógicas (o matemáticas) y semánticas (o epistemológicas). Básicamente, las primeras se resuelven con la Teoría de Tipos y las segundas distinguiendo entre lenguaje y metalenguaje. Para explicar mejor esto del lenguaje y del metalenguaje, la distinción entre "uso" y "mención" o entre "metalenguaje" y "lenguaje objeto", podemos usar el siguiente ejemplo:

¿Puede una persona escribir letras rojas con un bolígrafo de tinta negra? Obviamente sí, y también es posible escribir letras rojas con un bolígrafo de tinta de cualquier otro color. La aparente paradoja podría resolverse enunciando la pregunta de otro modo menos ambiguo: ¿Puede una persona escribir *letras rojas* (o "letras rojas" o **letras rojas**) con un bolígrafo de tinta negra? Destacando un par de palabras de la pregunta, es claro que ésta se refiere a las palabras “letras rojas” y no a la realidad a la cual remite el signo lingüístico “letras rojas”. Las letras rojas (letras escritas de color rojo) no pueden ser sino rojas; en cambio, el conjunto de palabras “letras rojas” no conllevan ningún color; puede escribirse con un bolígrafo de tinta de cualquier color.

La paradoja del acertijo (reforzada por la falta de relieve gráfico) resulta de la confusión del plano del lenguaje-objeto y del plano del metalenguaje. El lenguaje-objeto, o lenguaje primario, sirve para que el hablante se refiera a la realidad extralingüística (a las cosas). El metalenguaje, en cambio, se utiliza para hablar del lenguaje mismo. Así, por ejemplo, son enunciados metalingüísticos tanto “Letras rojas puede escribirse con un bolígrafo de tinta negra” como “Letras rojas es una construcción sintáctica formada por dos palabras”. En rigor, según lo expuesto, una persona puede escribir “letras rojas” con un bolígrafo de tinta negra, pero no podrá escribir letras rojas.

Pero esta facilidad para descubrir la diferencia entre dichos planos del lenguaje, no se hace tan evidente en el lenguaje natural.

Tarski (1956) sostiene que los lenguajes naturales contienen sus propios metalenguajes, de modo que la verdad no puede definirse sin topar con la paradoja. Pese a esto, da a entender que, debido a que dichos lenguajes no son formalmente especificables, no se puede responder a la cuestión de su clausura semántica; es decir, no cabe preguntarse sobre el peligro de la paradoja. Es difícil explicar exactamente qué cadenas se consideran oraciones en un lenguaje natural. El lenguaje natural, por propia definición, suele estar en crecimiento y presentar fenómenos como la vaguedad, la ambigüedad y la indexicabilidad. Según Tarski, “...quien quiera, a pesar de todas las dificultades, dedicarse a la semántica del lenguaje coloquial con la ayuda de métodos exactos, se verá obligado primero a emprender la ingrata tarea de una reforma de este lenguaje”.

Bibliografía

Boyer, Carl B. “Historia de la Matemática”. *Alianza Universidad Textos*, 1968.

Cajori, Florian. “History of Zeno's Arguments on Motion”. *American Mathematical Monthly*, 22 (1915), pp. 1-6, 39-47, 77-82, 109-115, 145-149, 179-186, 215-220, 253-258, 292-297.

Quine, W.V. “Paradoja. Matemáticas en el mundo moderno”. *Editorial Blume*. pp. 224-233, 1974.

Tannery, Paul. “La géométrie grecque”, pp. 217-261, 1887.

Tarski, A. “The concept of truth in formalized languages” in tr. J.H. woodger. Logic Semantics Methamathematics London, *Oxford University Press*, pp. 165, 267, 1956.

Todhunter, I. “A History of the Mathematical Theory of Probability”. *Cambridge*, 1861.

Van der Waerden, B.L. “Zenon und die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik”.Mathematische Annalen, 117 (1940), pp. 141-161.