ARTICULOS

ALGEBRAIZACION DE UNA LOGICA POLIVALENTE

ANTONIO GONZALEZ CARLOMAN
Oviedo

1.- Elementos notables en un conjunto bien ordenado

Siendo E un conjunto finito o infinito bien ordenado (admitimos el axioma de buena ordenación), distinguimos en él los siguientes elementos:

1.1.- Elemento cero

Al mínimo de E, y lo representamos por 0

1.2.- Elemento siguiente de otro

Dado cualquier elemento $a \in E$, llamamos siguiente de él, y lo representamos por a^+, al elemento de E que indicamos a continuación

1º.- Si a no es máximo en E, al mínimo del conjunto

$a^> = \{x \mid x > a\}$

2º.- Si a es máximo en E, al propio elemento a ($a^+ = a$)

Propiedades*:

Siendo $a, b \in E$, se demuestran

1.2.1.- $a < b \Rightarrow a^+ \leq b$

1.2.2.- Si a no es máximo en E

$a^+ \leq b \Rightarrow a < b$

1.2.3.- $a < b^+ \Rightarrow a \leq b$

1.2.4.- Si a^+ no es máximo en E

$a < b \Leftrightarrow a^+ < b^+$

1.3.- Elemento límite y elemento precedente de otro

Siendo $a \neq 0$, puede ocurrir:

1º.- Que el conjunto

$a^< = \{x \mid x < a\}$

no tenga máximo, en cuyo caso decimos que a es elemento límite de E

2º.- Que el conjunto $a^<$ tenga máximo, en cuyo caso llamamos a tal máximo precedente del elemento a y lo representamos por a^-

Propiedades:

Siendo $a, b \in E$, se demuestran

1.3.1.- Si b admite precedente

$a < b \Leftrightarrow a \leq b^-$

1.3.2.- Si a no es máximo en E, entonces a es el precedente de a^+ ($a = a^{+-}$)

1.3.3.- Si a admite precedente, entonces a es el siguiente de a^- ($a = a^{-+}$)

1.3.4.- Si a y b admiten precedente

$a < b \Leftrightarrow a^- < b^-$

1.3.5.- Si E admite elementos límites y ℓ_0 es el mínimo de ellos

$a < \ell_0 \Rightarrow a^+ < \ell_0$

* Todas las propiedades mencionadas en este trabajo aparecen detalladamente demostradas en el libro "Buena ordenación: Conjuntos finitos, naturales y transfinitos" de próxima aparición en el Servicio de Publicaciones de la Universidad de Oviedo.

1.3.6.- Si E no tiene elementos límites, $A \subseteq E$ y se cumplen

1º.- $0 \in A$

2º.- $x \in A \Rightarrow x^+ \in A$

entonces $A=E$ (Inducción particular)

1.3.7.- Si E tiene o no elementos límites, $A \subseteq E$ y se cumple

$\forall_x (x < y \rightarrow x \in A) \Rightarrow y \in A$

entonces $A=E$ (Inducción general)

2.- Suma en conjuntos bien ordenados con máximo

Siendo E un conjunto bien ordenado con máximo, definimos recursivamente en él una operación binaria que llamamos suma, y que representamos con el signo +, de la siguiente manera:

Si a es cualquier elemento de E

1º.- Siendo $b=0$

$a+b=a$

2º.- Siendo $b \neq 0$

Si se conoce $a+x$ para cualquier $x < b$, entonces $a+b=\sup(a+x)^+_{x<b}$

(La expresión $\sup(a+x)^+_{x<b}$ representa al mayorante mínimo de la familia $(a+x)^+_{x<b}$, mayorante mínimo siempre existente por tener máximo el conjunto E)

Propiedades:

Siendo $a,b,c,d \in E$, se demuestran

2.1.- $0+a=a$

2.2.- $a<b \Rightarrow c+a \leq c+b$

2.3.- Si $c+a$ no es máximo en E

$a<b \Rightarrow c+a<c+b$

2.4.- $a<b \Rightarrow a+c \leq b+c$

2.5.- Si $b+c$ no es máximo en E

$a<b \wedge c<d \Rightarrow a+c<b+d$

2.6.- $c+a<c+b \Rightarrow a<b$

2.7.- $a+c<b+c \Rightarrow a<b$

2.8.- $c+a=c+b \Rightarrow a=b$

2.9.- $b \leq a+b (b \leq b+a)$

2.10.- Si $b \neq 0$ y a no es máximo en E

$a<a+b$

2.11.- Si m es máximo en E

$a+m=m (m+a=m)$

2.12.- $a \neq 0 \Rightarrow a+b \neq 0$ $(a \neq 0 \Rightarrow b+a \neq 0)$

2.13.- $a=0 \wedge b=0 \Leftrightarrow a+b=0$

2.14.- Si b admite precedente

$a+b=(a+b^-)^+$

2.15.- $a+b^+=(a+b)^+$

2.16.- $(a+b)+c=a+(b+c)$

2.17.- Si E no tiene elementos límites, se cumplen

2.17.1.- $a^+ +b=(a+b)^+$

2.17.2.- $a+b=b+a$

2.17.3.- Si $a+c$ no es máximo en E

$a<b \Rightarrow a+c<b+c$

2.17.4.- Si $a+c$ no es máximo en E

$a=b \Leftrightarrow a+c=b+c$

3.- Producto en conjuntos bien ordenados con máximo

Siendo E un conjunto bien ordenado con máximo, definimos recursivamente en él una operación binaria que llamamos producto, y que representamos por el signo ·, de la siguiente manera:

Si a es cualquier elemento de E

1º.- Siendo $b=0$

$a.b=0$

2º.- Siendo $b \neq 0$

Si se conoce $a.x$ para cualquier $x<b$, entonces

$a.b= \sup(a.x+a)_{x<b}$

Propiedades:

Siendo $a,b,c,d \in E$, se demuestran

3.1.- $0.a=0$

3.2.- Si llamamos 1 a 0^+

$a.1=a (1.a=a)$

3.3.- $a<b \Rightarrow c.a \leq c.b$

3.4.- Si $c \neq 0$ y $c.a$ no es máximo en E

$a<b \Rightarrow c.a<c.b$

3.5.- $a<b \Rightarrow a.c \leq b.c$

3.6.- Si $b.c$ no es máximo en E

$a<b \wedge c<d \Rightarrow a.c<b.d$

3.7.- $c.a<c.b \Rightarrow a<b$

3.8.- $a.c<b.c \Rightarrow a<b$

3.9.- Si $c\neq 0$ y $c.a$ no es máximo en E

$c.a=c.b\Rightarrow a=b$

3.10.- Si $a\neq 0$

$b\leqslant a.b$ $(b\leqslant b.a)$

3.11.- Si $a\neq 0$, $1<b$ y a no es máximo en E

$a<a.b$

3.12.- Si $a\neq 0$ y m es máximo en E

$a.m=m$ $(m.a=m)$

3.13.- Si b admite precedente

$a.b=a.b^{-}+a$

3.14.- $a.b^{+}=a.b+a$

3.15.- Si $1<a$ y $1<b$

$a+b\leqslant a.b$

3.16.- $a\neq 0\wedge b\neq 0\Leftrightarrow a.b\neq 0$

3.17.- $a.b=1\Leftrightarrow a=1\wedge b=1$

3.18.- $a.(b+c)=a.b+a.c$

3.19.- $(a.b).c=a.(b.c)$

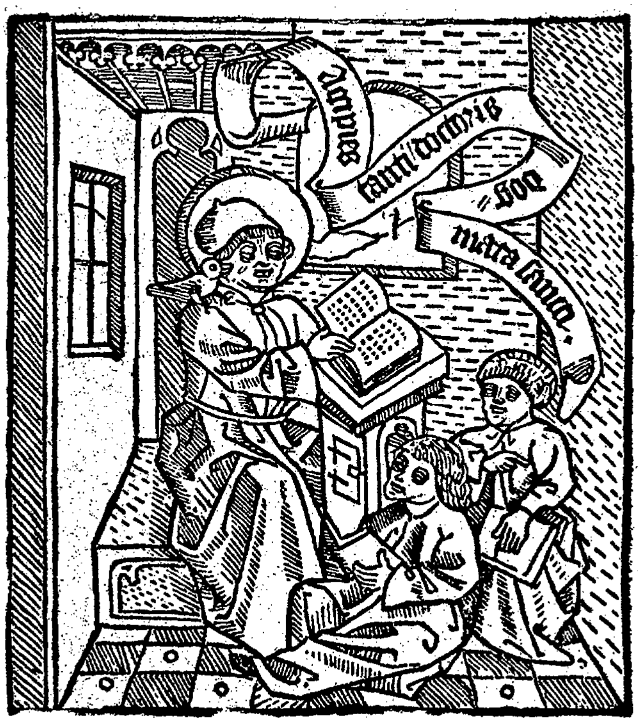
3.20.- Si E no tiene elementos límites, se cumplen

3.20.1.- $a^{+}.b=a.b+b$

3.20.2.- $a.b=b.a$

3.20.3.- Si $c\neq 0$ y $a.c$ no es máximo en E

$a<b\Leftrightarrow a.c<b.c$



3.20.4.- Si $c\neq 0$ y $a.c$ no es máximo en E

$a=b\Leftrightarrow a.c=b.c$

3.20.5.- Si $1<a$, $2<b$ $(2=1^{+})$ y $a+b$ no es máximo en E $a+b<a.b$

4.- <u>Potenciación en conjuntos bien ordenados con máximo</u>

Siendo E un conjunto bien ordenado con máximo, asignamos a cada elemento $a\in E$ una operación unitaria que llamamos potenciación de base a, $f_a:E\to E$, definida recursivamente, despues de convenir que, para cualquier $b\in E$, $f_a(b)=a^b$, de la siguiente manera:

1º.- Siendo $b=0$

$a^b=1$

2º.- Siendo $b\neq 0$

Si se conoce a^x para cualquier $x<b$, entonces $a^b=\sup\,(a^x.a)_{x<b}$

Propiedades:

Siendo $a,b,c,d\in E$ se demuestran

4.1.- Si $b\neq 0$

$0^b=0$

4.2.- $1^b=1$

4.3.- $a^1=a$

4.4.- $a<b\Rightarrow c^a\leqslant c^b$

4.5.- Si $1<c$ y c^a *no es máximo en E*

$a<b\Leftrightarrow c^a<c^b$

4.6.- $a<b\Rightarrow a^c\leqslant b^c$

4.7.- Si $1<b$ y b^c no es máximo en E

$a<b\wedge c<d\Rightarrow a^c<b^d$

4.8.- $c^a<c^b\Rightarrow a<b$

4.9.- $a^c<b^c\Rightarrow a<b$

4.10.- Si $1<c$ y c^a no es máximo en E

$c^a=c^b\Leftrightarrow a=b$

4.11.- Si $1<a$

$a.b\leqslant a^b$

4.12.- Si $1<a$

$b\leqslant a^b$

4.13.- Si $b\neq 0$

$a\leqslant a^b$

4.14.- Si $1<b$, $1<a$ y a no es máximo en E

$a < a^b$

4.15.- Si m es máximo en E

1.- Si $b \neq 0$

$m^b = m$

2.- Si $1 < a$

$a^m = m$

4.16.- $a \neq 0 \Rightarrow a^b \neq 0$

4.17.- Si $b \neq 0$

$a^b \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$

4.18.- $a^b = 1 \Leftrightarrow a = 1 \vee b = 0$

4.19.- Si b admite precedente

$a^b = a^{b^-} . a$

4.20.- $a^{b^+} = a^b . a$

4.21.- $a^b . a^c = a^{b+c}$

4.22.- $(a^b)^c = a^{b.c}$

4.23.- Si E no tiene elementos límites, se cumplen

4.23.1.- $(a.b)^c = a^c . b^c$

4.23.2.- Si $c \neq 0$ y a^c no es máximo en E

$a < b \Leftrightarrow a^c < b^c$

4.23.3.- Si $c \neq 0$ y a^c no es máximo en E

$a = b \Leftrightarrow a^c = b^c$

4.23.4.- Si $1 < a$, $2 < b$ y a.b no es máximo en E

$a.b < a^b$

4.23.5.- $1 + a.b < (1+a)^b$

5.- <u>Simetrización en conjuntos finitos bien ordenados</u>

Siendo E un conjunto finito bien ordenado respecto el orden $<$ $(0 < 1 < \ldots < n < m)$, sabemos que tambien está bien ordenado respecto al orden recíproco $>$ --- $(m > n > \ldots > 1 > 0)$ y que existe un isomorfismo único $f: E \to E$ de E, $<$ en E, $>$ $(f(0) = m,\ f(1) = n,\ \ldots\ f(n) = 1,\ f(m) = 0)$. Esta aplicación $f: E \to E$ define una operación unitaria * en E si convenimos que, para cualquier -- $a \in E$, $f(a) = a^*$

Propiedades:

Siendo $a, b \in E$, se demuestran

5.1.- $a^{**} = a$

5.2.- $a < b \Leftrightarrow b^* < a^*$

5.3.- Si $a \neq 0$

$a^{*+} = a^{-*}$

5.4.- Si m es máximo en E

$a + a^* = m$

5.5.- Si E tiene a 1 como máximo $(E = \{0,1\})$, entonces la operación unitaria * junto a las operaciones binarias $\cdot$ y $+$ le dan al conjunto E una estructura de algebra de Boole, y además se cumple

5.5.1.- $a^b = b^* + a$

6.- <u>Suma de familias sobre conjuntos bien ordenados con máximo</u>

Siendo E un conjunto bien ordenado respecto al orden $<$, E´ un conjunto bien ordenado con máximo respecto al orden $<'$ y $+$ su correspondiente operación - suma; dada una aplicación $f: E \to E'$, asignamos a cada elemento $a \in E$ una familia $(f_i)_{i<a}$ y a ésta un elemento de E´, al que llamamos suma de la familia y - que convenimos en representar por $\sum_{i<a} f_i$, definido recursivamente de la siguiente manera:

1º.- Siendo $a = 0$

$\sum_{i<a} f_i = 0'$ (0 elemento mínimo en E, 0´elemento mínimo en E´)

2º.- Siendo $a \neq 0$

Si se conoce $\sum_{i<x} f_i$ para cualquier $x < a$, entonces

$\sum_{i<a} f_i = \sup' \left(\sum_{i<x} f_i + f_x\right)_{x<a}$

Propiedades:

Siendo $a, b, c \in E$, $a', b' \in E'$, f y g aplicaciones de E en E´y h aplicación de ExE en E´, se demuestran

6.1.- $a < b \Rightarrow \sum_{i<a} f_i \leq' \sum_{i<b} f_i$

6.2.- Si a no es máximo en E

$\sum_{i<a^+} f_i = \sum_{i<a} f_i + f_a$

6.3.- Si m´es máximo en E´y $\exists_{i<a}$ $(f_i=m')$

$\sum_{i<a} f_i = m'$

6.4.- Estando + definida en E y no siendo a+b máximo en él

$\sum_{i<a+b} f_i = \sum_{i<a} f_i + \sum_{i<b} f_{a+i}$

6.5.- $\sum_{i<a} f_i = 0' \Leftrightarrow \forall_{i<a}$ $(f_i=0')$

6.6.- $\sum_{i<a} f_i \neq 0' \Leftrightarrow \exists_{i<a}$ $(f_i \neq 0')$

6.7.- Si $(f'_i)_{i<a'}$ es la familia obtenida prescindiendo en $(f_i)_{i<a}$ de los elementos de la familia que sean iguales a 0´, entonces

$\sum_{i<a} f_i = \sum_{i<a'} f'_i$

6.8.- Siendo a< b; si existe un elemento c tal que -- a≤ c< b de modo que $f_c \neq 0'$ y $\sum_{i<c} f_i$ no sea máximo en E´,- entonces

$\sum_{i<a} f_i <' \sum_{i<b} f_i$

6.9.- $\forall_{i<a}$ $(f_i \leq' g_i) \Rightarrow \sum_{i<a} f_i \leq' \sum_{i<a} g_i$

6.10.- $\sum_{i<a} f_i <' \sum_{i<b} f_i \Rightarrow a<b$

6.11.- Si $f_a \neq 0'$, $f_b \neq 0'$ y $\sum_{i<a} f_i$ no es máximo en E´

$\sum_{i<a} f_i = \sum_{i<b} f_i \Rightarrow a=b$

6.12.- $b'.\sum_{i<a} f_i = \sum_{i<a} b'.f_i$

6.13.- Si E´=E

$\forall_{i<a}(f_i=b) \Rightarrow \sum_{i<a} f_i = b.a$

6.14.- Si E´no tiene elementos límites, entonces

6.14.1.- $\sum_{i<a} (f_i+g_i) = \sum_{i<a} f_i + \sum_{i<a} g_i$

6.14.2.- $\sum_{i<a} (f_i \cdot g_i) \leq' \sum_{i<a} f_i \cdot \sum_{i<a} g_i$

6.14.3.- $\sum_{i<a} (\sum_{j<b} h_{ij}) = \sum_{j<b} (\sum_{i<a} h_{ij})$

7.- Producto de familias sobre conjuntos bien ordenados con máximo

Siendo E un conjunto bien ordenado respecto al orden < , E´un conjunto bien ordenado con máximo respecto al orden <´y. su correspondiente operación producto; dada una aplicación f:E→E´, asignamos a cada elemento a∈E una familia $(f_i)_{i<a}$ y a ésta un elemento de E´, al que llamamos producto de la familia y que convenimos en representar por $\prod_{i<a} f_i$, definido recursivamente de la siguiente manera:

a) Si $\exists_{i<a}$ $(f_i=0')$

$\prod_{i<a} f_i = 0'$

b) Si $\forall_{i<a}$ $(f_i \neq 0')$

1º.- Siendo a=0

$\prod_{i<a} f_i = 1'$

2º.- Siendo a≠0

Si se conoce $\prod_{i<x} f_i$ para cualquier x< a, entonces

$\prod_{i<a} f_i = \sup\ (\prod_{i<x} f_i . f_x)_{x<a}$

Propiedades:

Siendo a,b,c∈E, a´,b´∈E´, f y g aplicaciones de E en E´y h aplicación de ExE en E´, se demuestran

7.1.- $\prod_{i<a} f_i \neq 0' \Leftrightarrow \forall_{i<a}$ $(f_i \neq 0')$

7.2.- Si $\forall_{i<b} (f_i \neq 0')$

$a<b \Rightarrow \prod_{i<a} f_i \leq' \prod_{i<b} f_i$

7.3.- Si a no es máximo en E

$\prod_{i<a^+} f_i = \prod_{i<a} f_i . f_a$

7.4.- Siendo m´ máximo en E´; si $\forall_{i<a}$ $(f_i \neq 0')$ y $\exists_{i<a}$ $(f_i=m')$, entonces

$\prod_{i<a} f_i = m'$

7.5.- Estando + definida en E y no siendo a+b máximo en él

$\prod_{i<a+b} f_i = \prod_{i<a} f_i . \prod_{i<b} f_{a+i}$

7.6.- $\prod_{i<a} f_i = 1' \Leftrightarrow \forall_{i<a}$ $(f_i=1')$

7.7.- $\prod_{i<a} f_i \neq 1' \Leftrightarrow \exists_{i<a}$ $(f_i \neq 1')$

7.8.- Siendo $(f'_i)_{i<a'}$ la familia obtenida prescindiendo en $(f_i)_{i<a}$ de los elementos de la familia que sean iguales o anteriores a 1´

$\prod_{i<a} f_i = \prod_{i<a'} f'_i$

7.9.- Siendo a< b y $\forall_{i<b}$ $(f_i \neq 0')$; si existe un elemento c tal que a≤ c< b de modo que $f_c \neq 1'$ y $\prod_{i<c} f_i$ no sea máximo en E´, entonces

$\prod_{i<a} f_i <' \prod_{i<b} f_i$

7.10.- $\forall_{i<a}$ $(f_i \leq' g_i) \Rightarrow \prod_{i<a} f_i \leq' \prod_{i<a} g_i$

7.11.- Si $\forall_{i<a} (f_i \neq 0')$

$\prod_{i<a} f_i <' \prod_{i<b} f_i \Rightarrow a<b$

7.12.- Si $\forall_{i<a}$ $(f_i \neq 0')$, $f_a \neq 0'$, $f_b \neq 0'$ y $\prod_{i<a} f_i$ no es máximo en E´

$\prod_{i<a} f_i = \prod_{i<b} f_i \Rightarrow a=b$

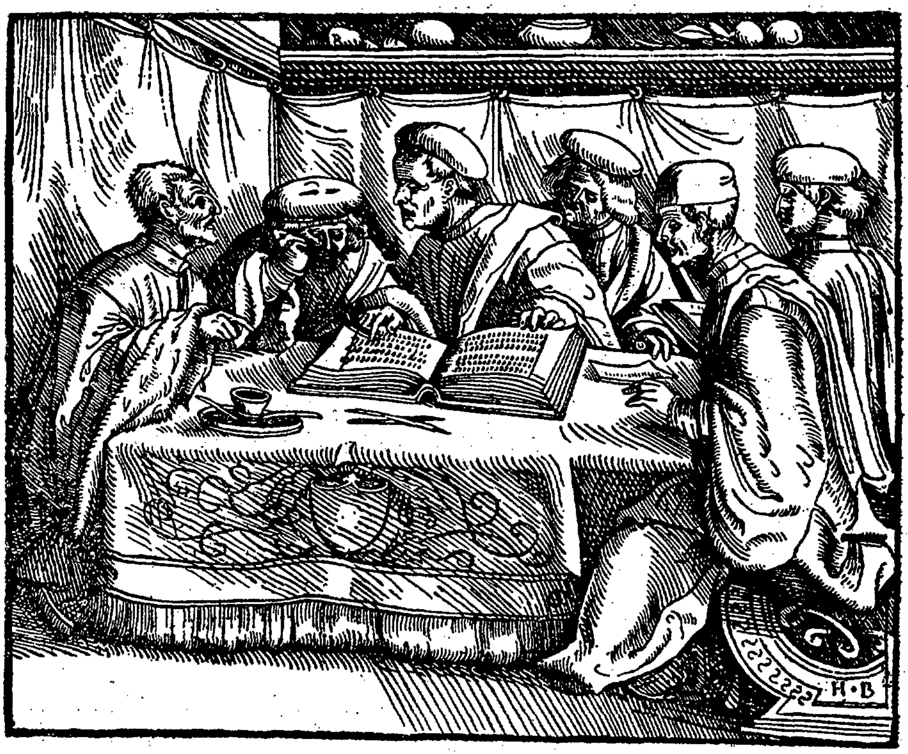
7.13.- Si b´≠ 0´

$\prod_{i<a} b'^{f_i} = b'^{\sum_{i<a} f_i}$

7.14.- Si E´=E y b≠0

$\forall_{i<a}$ $(f_i=b) \Rightarrow \prod_{i<a} f_i = b^a$

7.15.- Si $\forall_{i<a}$ $(1' <' f_i)$



$\sum_{i<a} f_i \leq' \prod_{i<a} f_i$

7.16.- Si E´no tiene elementos límites, entonces

7.16.1.- $\prod_{i<a} (f_i \cdot g_i) = \prod_{i<a} f_i \cdot \prod_{i<a} g_i$

7.16.2.- Si $a \neq 0$

$\prod_{i<a} f_i + \prod_{i<a} g_i \leq' \prod_{i<a} (f_i + g_i)$

7.16.3.- $\prod_{i<a} (\prod_{j<b} h_{ij}) = \prod_{j<b} (\prod_{i<a} h_{ij})$

7.16.4.- Si $b \neq 0$

$\sum_{i<a} (\prod_{j<b} h_{ij}) \leq' \prod_{j<b} (\sum_{i<a} h_{ij})$

7.16.5.- Si E´= {0´,1´}

$(\prod_{i<a} g_i)^* = \sum_{i<a} g_i^*$

7.16.6.- Si E´={0´,1´}

$(\sum_{i<a} g_i)^* = \prod_{i<a} g_i^*$

7.16.7.- Si b< a y E´= {0´,1´}

$\prod_{i<a} g_i \leq' g_b$

8.- Valoración polivalente sobre fórmulas lógicas

Si llamamos $\mathcal{F}$ al conjunto de fórmulas cerradas atómicas, moleculares y cuantificadas, entonces dado un conjunto E bien ordenado, finito o infinito, como universo del discurso, siendo E(m) el resultado de ampliar E con m como máximo, y dado un conjunto finito E´bien ordenado con m´como máximo. Llamamos valoración de $\mathcal{F}$ sobre E´a una aplicación $\varphi: \mathcal{F} \to E'$ definida recursivamente de la siguiente manera:

1º.- Si P es una fórmula atómica de $\mathcal{F}$, entonces $\varphi(P)$ es un elemento arbitrario de E´que fija la previa interpretación que hagamos sobre E

2º.- Si P y Q son fórmulas cualesquiera de $\mathcal{F}$, entonces:

a) $\varphi(\neg P) = \varphi(P)^*$

b) $\varphi(P \vee Q) = \varphi(P) + \varphi(Q)$

c) $\varphi(P \wedge Q) = \varphi(P) \cdot \varphi(Q)$

d) $\varphi(P \to Q) = \varphi(Q)^{\varphi(P)}$

e) $\varphi(P \leftrightarrow Q) = \varphi(Q)^{\varphi(P)} \cdot \varphi(P)^{\varphi(Q)}$

3º.- Siendo S una fórmula abierta como máximo en x (que tiene la sola variable libre x o ninguna), y representando S^x_a, para cualquier $a \in E$, la fórmula cerrada resultante de sustituir en S la variable x por a, si la hubiera; si el término $\varphi_x(S)$ es tal que $\varphi_a(S) = \varphi(S^x_a)$, entonces

a) $\varphi(\exists_x S) = \sum_{x<m} \varphi_x(S)$

b) $\varphi(\forall_x S) = \prod_{x<m} \varphi_x(S)$

9.- Relación de equivalencia inducida de la valoración

De la aplicación $\varphi: \mathcal{F} \to E'$ inducimos una relación de equivalencia sobre $\mathcal{F}$ que si la representamos por el signo "$\Leftrightarrow$" tendría la siguiente definición:

Siendo $P, Q \in \mathcal{F}$

$P \Leftrightarrow Q$ si y sólo si $\varphi(P) = \varphi(Q)$

Propiedades:

Siendo u e i fórmulas de $\mathcal{F}$ tales que $\varphi(u) = m'$ y $\varphi(i) = 0'$

$P,Q,R\in\mathcal{F}$, S y T fórmulas abiertas como máximo en x, y H fórmula abierta como máximo en x e y, se cumplen

9.1.- $\neg\neg P\Leftrightarrow P$ $(\varphi(P)^{**}=\varphi(P)$ por 5.1)

9.2.- $P\vee Q\Leftrightarrow Q\vee P$ $(\varphi(P)+\varphi(Q)=\varphi(Q)+\varphi(P)$ por 2.17.2)

9.3.- $P\wedge Q\Leftrightarrow Q\wedge P$ $(\varphi(P).\varphi(Q)=\varphi(Q).\varphi(P)$ por 3.20.2)

9.4.- $P\wedge(Q\vee R)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$ $(\varphi(P).(\varphi(Q)+\varphi(R))=\varphi(P).\varphi(Q)+\varphi(P).\varphi(R)$ por 3.18)

9.5.- $P\vee\neg P\Leftrightarrow u$ $(\varphi(P)+\varphi(P)^{*}=m'$ por 5.4)

9.6.- $P\vee i\Leftrightarrow P$ $(\varphi(P)+0'=\varphi(P)$ por 2-1º)

9.7.- $P\wedge i\Leftrightarrow i$ $(\varphi(P).0'=0'$ por 3-1º)

9.8.- $(P\vee Q)\vee R\Leftrightarrow P\vee(Q\vee R)$ $((\varphi(P)+\varphi(Q))+\varphi(R)=\varphi(P)+(\varphi(Q)+\varphi(R))$ por 2.16)

9.9.- $(P\wedge Q)\wedge R\Leftrightarrow P\wedge(Q\wedge R)$ $((\varphi(P).\varphi(Q)).\varphi(R)=\varphi(P).(\varphi(Q).\varphi(R))$ por 3.19)

9.10.- $(P\to Q)\wedge(P\to R)\Leftrightarrow P\to Q\wedge R$ $(\varphi(Q)^{\varphi(P)}.\varphi(R)^{\varphi(P)}=(\varphi(Q).\varphi(R))^{\varphi(P)}$ por 4.23.1)

9.11.- $(P\to R)\wedge(Q\to R)\Leftrightarrow P\vee Q\to R$ $(\varphi(R)^{\varphi(P)}.\varphi(R)^{\varphi(Q)}=\varphi(R)^{\varphi(P)+\varphi(Q)}$ por 4.21)

9.12.- $P\to(Q\to R)\Leftrightarrow P\wedge Q\to R$ $((\varphi(R)^{\varphi(Q)})^{\varphi(P)}=\varphi(R)^{\varphi(P).\varphi(Q)}$ por 4.22)

9.13.- $\forall_x(S\wedge T)\Leftrightarrow\forall_x S\wedge\forall_x T$ $(\prod_{x<m}(\varphi_x(S).\varphi_x(T))=\prod_{x<m}\varphi_x(S).\prod_{x<m}\varphi_x(T)$ por 7.16.1)

9.14.- $\exists_x(S\vee T)\Leftrightarrow\exists_x S\vee\exists_x T$ $(\sum_{x<m}(\varphi_x(S)+\varphi_x(T))=\sum_{x<m}\varphi_x(S)+\sum_{x<m}\varphi_x(T)$ por 6.14.1)

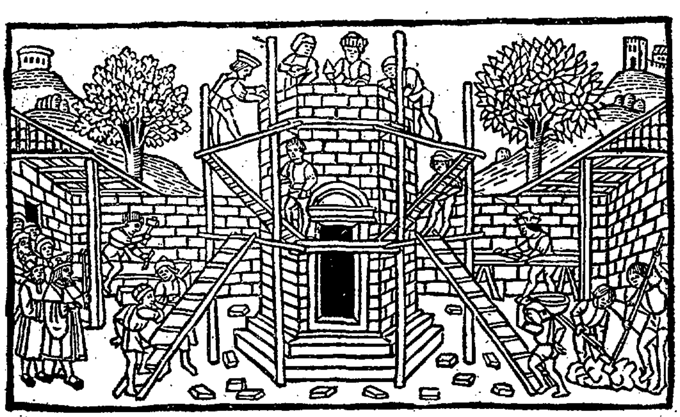
9.15.- Si S es fórmula cerrada $(\varphi_x(S)=\varphi(S))$
$\exists_x(S\wedge T)\Leftrightarrow S\wedge\exists_x T$ $(\sum_{x<m}(\varphi(S).\varphi_x(T)=\varphi(S).\sum_{x<m}\varphi_x(T)$ por 6.12)

9.16.- $\exists_x\exists_y H\Leftrightarrow\exists_y\exists_x H$ $(\sum_{x<m}(\sum_{y<m}\varphi_{xy}(H))=\sum_{y<m}(\sum_{x<m}\varphi_{xy}(H))$ por 6.14.3)

9.17.- $\forall_x\forall_y H\Leftrightarrow\forall_y\forall_x H$ $(\prod_{x<m}(\prod_{y<m}\varphi_{xy}(H))=\prod_{y<m}(\prod_{x<m}\varphi_{xy}(H))$ por 7.16.3)

9.18.- Si $E'=\{0',1'\}$

Son ciertas todas las propiedades correspondientes al algebra de Boole por 5.5, y además



9.18.1.- $P\to Q\Leftrightarrow\neg P\vee Q$ $(\varphi(Q)^{\varphi(P)}=\varphi(P)^{*}+\varphi(Q)$ por 5.5.1)

9.18.2.- $\varphi(P\leftrightarrow Q)=1'$ si y sólo si $P\Leftrightarrow Q$
$(\varphi(Q)^{\varphi(P)}.\varphi(P)^{\varphi(Q)}=1'$ si y sólo si $\varphi(P)=\varphi(Q)$ por 3.17 y 4.18)

9.18.3.- $\neg\forall_x S\Leftrightarrow\exists_x\neg S$ $((\prod\varphi_x(S))^{*}=\sum\varphi_x(S)^{*}$ por 7.16.5)

9.18.4.- $\neg\exists_x S\Leftrightarrow\forall_x\neg S$ $((\sum_{x<m}\varphi_x(S))^{*}=\prod_{x<m}\varphi_x(S)^{*}$ por 7.16.6)

10.- <u>Relación en $\mathcal{F}$ inducida del orden $\leqslant'$ en E'</u>

De la relación de orden normal $\leqslant'$ en E' inducimos una relación en $\mathcal{F}$ que si la representamos por el signo "$\Rightarrow$" tendría la siguiente definición

Siendo $P,Q\in\mathcal{F}$

$P\Rightarrow Q$ si y sólo si $\varphi(P)\leqslant'\varphi(Q)$

Propiedades:

Siendo $P,Q,R,K\in\mathcal{F}$, S y T fórmulas abiertas como máximo en x, y H fórmula abierta como máximo en x e y, se cumplen

10.1.- $P\Rightarrow P$ $(\varphi(P)\leqslant'\varphi(P))$

10.2.- Si $P\Rightarrow Q$ y $Q\Rightarrow P$, *entonces y sólo entonces* $P\Leftrightarrow Q$ - (Si $\varphi(P)\leqslant'\varphi(Q)$ y $\varphi(Q)\leqslant'\varphi(P)$, entonces y sólo entonces $\varphi(P)=\varphi(Q)$)

10.3.- Si $P\Rightarrow Q$ y $Q\Rightarrow R$, entonces $P\Rightarrow R$
(Si $\varphi(P)\leqslant'\varphi(Q)$ y $\varphi(Q)\leqslant'\varphi(R$, entonces $\varphi(P)\leqslant'\varphi(R)$)

10.4.- Si $P\Rightarrow Q$, entonces y sólo entonces $\neg Q\Rightarrow\neg P$
(Si $\varphi(P)\leqslant'\varphi(Q)$, entonces y sólo entonces $\varphi(Q)^{*}\leqslant'\varphi(P)^{*}$ por 5.2)

10.5.- $P\Rightarrow P\vee Q$ $(\varphi(P)\leqslant'\varphi(P)+\varphi(Q)$ por 2.9)

10.6.- Si $P\Rightarrow Q$ y $R\Rightarrow K$, entonces $P\vee R\Rightarrow Q\vee K$
(Si $\varphi(P)\leqslant'\varphi(Q)$ y $\varphi(R)\leqslant'\varphi(K)$, entonces $\varphi(P)+\varphi(R)\leqslant'\varphi(Q)+\varphi(K)$ por 2.5)

10.7.- Si $P\Rightarrow Q$ y $R\Rightarrow K$, entonces $P\wedge R\Rightarrow Q\wedge K$
(Si $\varphi(P)\leqslant'\varphi(Q)$ y $\varphi(R)\leqslant'\varphi(K)$, entonces $\varphi(P).\varphi(R)\leqslant'\varphi(Q).\varphi(K)$ por 3.6)

10.8.- $\forall_x S\vee\forall_x T\Rightarrow\forall_x(S\vee T)$ $(\prod_{x<m}\varphi_x(S)+\prod_{x<m}\varphi_x(T)\leqslant'\prod_{x<m}(\varphi_x(S)+\varphi_x(T))$ por 7.16.2)

10.9.- $\exists_x(S\wedge T)\Rightarrow\exists_x S\wedge\exists_x T$ $(\sum_{x<m}(\varphi_x(S).\varphi_x(T))\leqslant'\sum_{x<m}\varphi_x(S).\sum_{x<m}\varphi_x(T)$ por 6.14.2)

10.10.- $\exists_x\forall_y H\Rightarrow\forall_y\exists_x H$ $(\sum_{x<m}(\prod_{y<m}\varphi_{xy}(H))\leqslant'\prod_{y<m}(\sum_{x<m}\varphi_{xy}(H))$ por 7.16.4)

10.11.- Si $E'=\{0',1'\}$
$\forall_x S\Rightarrow S^x_a$ $(\prod\varphi_x(S)\leqslant'\varphi_a(S)$ por 7.16.7)

10.12.- Si $E'=\{0',1'\}$
$\varphi(P\to Q)=1'$ si y sólo si $P\Rightarrow Q$
$(\varphi(Q)^{\varphi(P)}=1'$ si y sólo si $\varphi(P)\leqslant'\varphi(Q)$ por 4.18)