GRADO TOPOLÓGICO FUERTE DE DEPENDENCIA ENTRE ATRIBUTOS DE UN SISTEMA DE INFORMACIÓN DOTADO DE ESTRUCTURA BORROSA[1]

Renato César Scarparo

Se presenta un nuevo criterio, basado en consideraciones topológicas, para valorar numéricamente la dependencia de un atributo b respecto a un atributo a, ambos pertenecientes al conjunto de atributos Q de un sistema de información $\mathbf{S} = (X, Q, (V_q)_{q\in Q}, \delta)$ *dotado de una estructura borrosa* $(F_q\colon V_q \to L_q)_{q\in Q}$*, (según definición de Z. Pawlak), respecto a una regla borrosa (R) de la forma "tanto más a, es A; tanto más b, es B". Al valor así determinado se lo llama "grado topológico fuerte de dependencia del atributo b respecto al atributo a en el sistema* **S***, con respecto a la regla borrosa (R)", y se lo anota* $\lambda(b, a)$ *o simplemente* λ *cuando no haya lugar a confusión. Además se explicitan algunas propiedades características del grado topológico fuerte de dependencia* λ *y en especial se lo compara con el grado de dependencia fuerte* χ *y con el grado de dependencia topológico* κ*, ambos definidos por J. Kortelainen.*

1. INTRODUCCIÓN

En sendos artículos Z. Pawlak [8] y [9], y J. W. Grsymala-Busse [4], basados en consideraciones topológicas, definen diferentes grados de dependencia entre atributos de un sistema de información libre dotado de una estructura borrosa con respecto a una regla gradual borrosa (R). Posteriormente J. Kortelainen [6], en parte inspirado por las ideas de B. Kosko [7], introduce los conceptos de grado de

[1] Este trabajo fue presentado en el Congreso UMA 2000, L Reunión Anual de Comunicaciones Científicas. XXIII Reunión de Educación Matemática.

dependencia fuerte χ y de grado de dependencia topológico κ, a los cuales los analiza y relaciona con los conceptos de dependencia anteriores.

En este trabajo continuando la temática señalada, se define un nuevo criterio, también basado en consideraciones topológicas, para determinar la dependencia entre atributos de un sistema de información libre dotado de una estructura borrosa respecto a una regla gradual borrosa (R). Al valor obtenido aplicando el nuevo criterio, vale decir al grado de dependencia resultante de su aplicación, se lo llama grado topolólogico fuerte de dependencia, dado que expresa el cumplimiento de la regla borrosa (R) por parte de pares que no pesan en la determinación del grado de dependencia topológico κ, definido por Kortelainen, y por lo contrario, sí pesan, en la determinación del grado topológico fuerte de dependencia λ que definiremos y estudiaremos a continuación.

Como se pretende, que en la medida de lo posible, esta exposición este autocontenida, se comienza en este punto con las definiciones de conceptos elementales.

DEFINICIÓN 1.1. Un reticulado completo es un dato de la forma ($\mathbf{L}$, $\geq_{\mathbf{L}}$), donde **L** es un conjunto y "$\geq_{\mathbf{L}}$" es una relación de orden en **L** tal que todo subconjunto no vacío M de **L** admite supremo e ínfimo.

• Cuando no haya lugar a confusión un reticulado ($\mathbf{L}$, $\geq_{\mathbf{L}}$) se anotará solamente con **L,** y el orden $\geq_{\mathbf{L}}$ con $\geq$, así mismo sus cotas universales $0_{\mathbf{L}}$ y $1_{\mathbf{L}}$ se anotarán simplemente con 0 y 1. Además si un reticulado es anotado con $\mathbf{L}_q$, la relación de orden, por razones tipográficas, no la anotaremos con subíndice $\mathbf{L}_q$, sino la anotaremos sencillamente con $\geq_q$. y sus cotas universales las anotaremos con $0_{\mathbf{q}}$ y $1_{\mathbf{q}}$. Mas aún cuando el contexto lo permita trataremos de evitar los índices. Por último si el lector necesita ampliar su información en temas concernientes a la teoría de reticulados le sugerimos que consulte [1].

DEFINICIÓN 1.2. Dado un conjunto X no vacío y un reticulado completo **L**, llamaremos conjunto **L**-borroso en X, o también, más apropiadamente, subconjunto **L**-borroso en X, a toda aplicación:

$$A: X \to \mathbf{L}.$$

- Para cada $x \in A$ el valor $A(x)$ se llama el grado de pertenencia de x en el conjunto **L**-borroso A, y el conjunto $\{x \in A \ / A(x) > 0\}$, se llama el soporte de A y se lo anota sop A.

DEFINICIÓN 1.3. Sean X un conjunto no vacío, K un conjunto de índices y $A = (A_k)_{k \in K}$ una familia de conjuntos **L**-borrosos en X. Entonces definimos su unión que anotamos;

$$\cup\{A_k \ / \ k \in K\} \quad \text{o} \quad \cup A,$$

y su intersección que anotamos:

$$\cap\{A_k \ / \ k \in K\} \quad \text{o} \quad \cap A,$$

Trabajo desarrollado en el marco del Proyecto UBACyT TE22.

respectivamente por:

$(\cup A) \,.\, x = (\cup\{A_k \,/\, k \in K\}) \,.\, x = \sup \{A_k(x) \,/\, k \in K\}$;   para todo $x \in X$

y

$(\cap A) \,.\, x = (\cap\{A_k \,/\, k \in K\}) \,.\, x = \text{ínf} \{A_k(x) \,/\, k \in K\}$;   para todo $x \in X$

DEFINICIÓN 1.4. (ver Z. Pawlak). Llamaremos sistema de información **S** a una 4-upla (X, Q, V, δ) tal que:

S.1. X es un conjunto finito no vacío.

S.2. $Q = C \cup D$, donde C y D son conjuntos finitos no vacíos disjuntos.

S.3. $V = \cup\{V_q \,/\, q \in Q\}$, donde para todo $q \in Q$, V_q es un conjunto no vacío.

S.4. $\delta: X \times Q \to V$, tal que para todo $(x, q) \in (X \times Q)$; $\delta(x, q) \in V_q$.

• Los elementos del conjunto X, son llamados los elementos o los objetos del sistema de información **S**, los elementos del conjunto Q son llamados los atributos del sistema de información **S**, en particular los elementos del conjunto C son llamados las condiciones del sistema de información **S**, y los elementos del conjunto D son llamados las decisiones del sistema de información **S**. Además; para todo $q \in Q$ los elementos del conjunto V_q son llamados los valores del atributo q, y la función $\delta: X \times Q \to V$, se llama la función de descripción del sistema de información **S**, y finalmente los valores pertenecientes a $\delta(X \times Q)$ se llaman los datos del sistema de información **S**.

• Obsérvese que entendemos los sistemas de información de la misma forma que Grzymala-Busse [4], salvo que en nuestro caso el dominio V_q del atributo $q \in Q$ puede ser un conjunto infinito.

DEFINICIÓN 1.5. Dado un sistema de información **S** = (X, Q, V, δ), para cada $q \in Q$ anotaremos con δ_q la función de X en V_q tal que para todo $x \in X$:

$$\delta_q(x) = \delta(x, q).$$

2. GRADO TOPOLÓGICO FUERTE

DEFINICIÓN 2.1. Dado un conjunto **L**-borroso, $A \in \mathbf{L}^X$, anotaremos con $\boldsymbol{R}^A$ la relación en el conjunto X definida por:

$$\boldsymbol{R}^A = \{(x, y) \in X \times X \;/\; A(x) \geq A(y)\}$$

• Diremos que $\boldsymbol{R}^A$ es la relación correspondiente (o también la relación inducida) por el conjunto **L**-borroso, A.

DEFINICIÓN 2.2. Dado un conjunto **L-**borroso $A \in \mathbf{L}^X$, se llama modificador débil de A a la aplicación $H^A: \boldsymbol{P}(X) \to \boldsymbol{P}(X)$ tal que para todo $U \in \boldsymbol{P}(X)$;

$$H^A(U) = \{y \in X \;/\; \text{existe } x \in U \text{ tal que } (x, y) \in \boldsymbol{R}^A\}.$$

TEOREMA 2.3. Para todo conjunto **L**-borroso A en un conjunto X, el operador H^A es un operador de clausura en X.

Demostración: Ver [9] o [10].

DEFINICIÓN 2.4. Para todo conjunto **L**-borroso A, en un conjunto X, se llama topología inducida en X por A y se anota τ^A a la topología definida en X por el operador de clausura H^A.

DEFINICIÓN 2.5. Para todo conjunto **L**-borroso A, en un conjunto X, se llama modificador substancial correspondiente a A, y se lo anota $(H^A)^*$, al operador dual del operador H^A, vale decir al operador tal que para todo $U \in \boldsymbol{P}(X)$:

$$(H^A)^*(U) = (H^A(U^-))^-$$

donde para todo $U \in \boldsymbol{P}(X)$, U^- es el conjunto complementario de U.

DEFINICIÓN 2.6. Dados dos conjuntos **L**-borrosos A y B definidos en un conjunto X, se dice que:

f.1. A es topológicamente más fino que B, y se anota $A \lbrace B$ si y solo si $\boldsymbol{R}^A \subset \boldsymbol{R}^B$.

f.2. A y B son topológicamente equivalentes y se anota $\boldsymbol{R}^A \approx \boldsymbol{R}^B$ si y solo si $\boldsymbol{R}^A = \boldsymbol{R}^B$.

- Claramente la relación " $\approx$ " es una relación de equivalencia y la relación " $\prec$ " es una relación de orden parcial en el conjunto cociente $\mathbf{L}^X / \approx$.

- En lo que sigue si A: X $\rightarrow$ **L** es un conjunto **L**-borroso en un conjunto X, se anota:

i. Para todo $k \in A(X)$; $A_k = \{x \in X / A(x) \geq k\}$.

ii. Para todo $k \in A(X)$; $A^*_{k,} = \{x \in X / A(x) = k\}$.

iii. Para todo $(k, k') \in (A(X)xA(X))$; $A^*_{k,k'} = A^*_k \, x \, A^*_{k'}$.

iv. β^A, la base $(A_k)_{k \in A(X)}$.

PROPOSICIÓN 2.7. Dado un conjunto **L**-borroso A: X $\rightarrow$ **L** en un conjunto X, se verifican las propiedades siguientes:

2.1.1. Si (k, k'), $(k'', k''') \in (A(X)xA(X))$, y $(k, k') \neq (k'', k''')$ entonces

$$A^*_{k,k'} \cap A^*_{k'',k'''} = \varnothing.$$

2.1.2. $X = \cup\{ A_{k,k'} / (k, k') \in (A(X)xA(X))\}$.

Demostración. Obvia.

TEOREMA 2.8. Sean A: X $\rightarrow$ $\mathbf{L}_a$ y B: X $\rightarrow$ $\mathbf{L}_b$, dos conjuntos $\mathbf{L}_a$-borroso y $\mathbf{L}_b$-borroso respectivamente, definidos en un conjunto X. Entonces para todo $(x, y) \in X^2$ tal que $B_{B(y)} \in \tau^A$, la proposición;

$$A(x) \geq A(y) \Rightarrow B(x) \geq B(y)$$

es verdadera.

Demostración: Sea $(x, y) \in X^2$ tal que $B_{B(y)} \in \tau^A$:

1) Si la proposición

$$B(x) \geq B(y)$$

es verdadera, entonces obviamente, con independencia del valor de la proposición; $A(x) \geq A(y)$, la proposición

$$A(x) \geq A(y) \Rightarrow B(x) \geq B(y)$$

es verdadera.

2) Si la proposición

$$B(x) \geq B(y)$$

es falsa, como

si $B_{B(y)} \in \tau^A$ entonces existe $J \subset A(X)$ tal que $B_{B(y)} = \cup\{A_j / j \in J\}$,

o sea

si $B_{B(y)} \in \tau^A$ entonces existe $j \in J$ tal que $y \in A_j$,

o sea

si $B_{B(y)} \in \tau^A$ entonces existe $j \in J$ tal que $A(y) \geq j$

si suponemos que la proposición

$$A(x) \geq A(y)$$

es verdadera, entonces $A(x) \geq j$. Como

$$A(x) \geq j \text{ sii } x \in A_j \subset B_{B(y)}$$

tenemos que $x \in B_{B(y)}$, y por lo tanto

$$B(x) \geq B(y)$$

lo que contradice nuestra hipótesis, en consecuencia la proposición

$$A(x) \geq A(y)$$

es falsa y por lo tanto la proposición

$$A(x) \geq A(y) \Rightarrow B(x) \geq B(y)$$

es verdadera.

TEOREMA 2.9. Sean A: $X \rightarrow \mathbf{L}_a$ y B: $X \rightarrow \mathbf{L}_b$, dos conjuntos $\mathbf{L}_a$-borroso y $\mathbf{L}_b$-borroso respectivamente, definidos en un conjunto X. Entonces para todo $(k, k') \in (B(X))^2$ tal que: k no-$\geq$ k´ y $B_{k'} \in \tau^A$:

$$(\boldsymbol{R}^A \cap B^*_{k,k'}) = \varnothing$$

Demostración: Sea $(k, k') \in (B(X))^2$ tal que: k no-$\geq$ k´ y $B_{k'} \in \tau^A$.

Si suponemos que

$$(\boldsymbol{R}^A \cap B^*_{k,k'}) \neq \varnothing$$

entonces

existe $(x, y) \in X^2$ tal que: $B(x) = k$ y $B(y) = k'$ y $A(x) \geq A(y)$

o sea

existe $(x, y) \in X^2$ tal que: $B(x)$ no-$\geq$ $B(y)$ y $A(x) \geq A(y)$

además como obviamente

existe $(x, y) \in X^2$ tal que: $B_{B(y)} \in \tau^A$

y como esta proposición por el TEOREMA 2.8, implica que

$$A(x) \geq A(y) \Rightarrow B(x) \geq B(y)$$

es verdadera, se tiene en consecuencia que la proposición

$$A(x) \geq A(y) \text{ y } A(x) \geq A(y) \Rightarrow B(x) \geq B(y)$$

es verdadera, lo que implica que la proposición

$$B(x) \geq B(y)$$

es verdadera, o sea que $k \geq k'$, lo cual contradice nuestra hipótesis, por lo tanto $(\boldsymbol{R}^A \cap B^*_{k,k'}) = \emptyset$.

- Los teoremas anteriores inducen un nuevo criterio para valorar la dependencia de un conjunto $\mathbf{L}_b$-borroso, $B: X \to \mathbf{L}_b$, con respecto a un conjunto $\mathbf{L}_a$-borroso, $A: X \to \mathbf{L}_a$, el cual se expresa a continuación.

DEFINICIÓN 2.10. Se llama grado topológico fuerte de dependencia de un conjunto $\mathbf{L}_b$-borroso, $B: X \to \mathbf{L}_b$, en un conjunto X, con respecto a un conjunto $\mathbf{L}_a$-borroso, $A: X \to \mathbf{L}_a$, en el mismo conjunto X, y se anota $\lambda(B, A)$ el valor definido por la expresión siguiente:

$$\lambda(A, B) = |\{(k, k') \in (B(X))^2 / \ k \geq k' \text{ y } B_{k'} \in \tau^A\}| / |\{(k, k') \in (B(X))^2 / \ k \geq k'\}|$$

- Observación: Si para todo par de conjuntos L-borrosos de la forma $(B: X \to \mathbf{L}_b,\ A: X \to \mathbf{L}_a)$ anotamos:

i. $B^*_{\geq} = \{ B^*_{k,k'} / \ k \geq k'\}$.

ii. $B^*_{\geq,\ \tau A} = \{ B^*_{k,k'} / \ k \geq k' \text{ y tal que } B_{k'} \in \tau^A \}$.

Entonces el grado topológico fuerte de dependencia del conjunto $\mathbf{L}_b$-borroso, B: X $\rightarrow$ $\mathbf{L}_b$, en el conjunto X, con respecto al conjunto $\mathbf{L}_a$-borroso, A: X $\rightarrow$ $\mathbf{L}_a$, en el mismo conjunto X, queda determinado por la expresión siguiente:

$$\lambda(A, B) = |\, B^*_{\geq,\, \tau A}| / |\, B^*_{\geq}|$$

- La calificación topológica que incluimos en la designación del valor $\lambda(A, B)$ definido precedentemente, se debe obviamente al rol que juega la relación entre las topologías τ^A y τ^B. que definen un vínculo determinado entre los conjuntos borrosos A y B.

TEOREMA 2.11. Sean A: X $\rightarrow$ $\mathbf{L}_a$ y B: X $\rightarrow$ $\mathbf{L}_b$, dos conjuntos $\mathbf{L}_a$-borroso y $\mathbf{L}_b$-borroso respectivamente, definidos en un conjunto X. entonces;

$$\boldsymbol{R}^A \subset \boldsymbol{R}^B \text{ si y solo si } \lambda(b, a) = 1.$$

Demostración: Suficiencia: Si $\lambda(b, a) = 1$ vale decir si:

$$|\{(k, k') \in (B(X))^2 /\ k \geq k' \text{ y } B_{k'} \in \tau^A \}| / |\{(k, k') \in (B(X))^2 /\ k \geq k'\}| = 1$$

entonces para todo $(k, k') \in (B(X))^2$, tal que $k \geq k'$, se tiene que $B_{k'} \in \tau^A$, lo cual implica que para todo $(x, y) \in X^2$, tal que $k \geq k'$:

$$A(x) \geq A(y) \Rightarrow B(x) \geq B(y)$$

o sea que $\boldsymbol{R}^A \subset \boldsymbol{R}^B$.

Necesidad: Si $\boldsymbol{R}^A \subset \boldsymbol{R}^B$ entonces $\tau^B \subset \tau^A$, ver ([10],TEOREMA 2.6), por lo tanto; para todo $k \in B(X)$: $B_k \in \tau^A$.

En consecuencia; para todo $(k, k') \in (B(X))^2$ tal que $k \geq k'$, se tiene que $B_{k'} \in \tau^A$, por lo tanto $\lambda(b, a) = 1$, lo que se completa la demostración.

- Las consideraciones anteriores nos permiten definir un nuevo tipo de dependencia, entre atributos de un sistema de información libre dotado de una estructura borrosa, con respecto a una regla gradual borrosa (R). como lo habíamos propuesto en nuestra INTRODUCCIÓN.

DEFINICIÓN 2.12. Dado un sistema de información $\mathbf{S} = (X, Q, V, \delta)$ dotado de una estructura borrosa $((\mathbf{L}_q)_{q\in Q}, (F_q: V_q \rightarrow \mathbf{L}_q)_{q\in Q})$, se llama grado topológico fuerte de dependencia de un atributo $b \in Q$, respecto a un atributo $a \in Q$, con respecto a una regla gradual borrosa (R), y se anota $\lambda(b, a)$ al valor $\lambda(F_b \circ \delta_b, F_a \circ \delta_a)$.

- Observación: Se sabe que dado un cuasi-orden (preorden) **Q** en un conjunto X (ver [1]) quedan determinados canónicamente una relación de equivalencia $\sim_{\mathbf{Q}}$ en X y un orden parcial $\geq_{\sim Q}$ en el conjunto cociente $X/\sim_{\mathbf{Q}}$ ((1). Theorem 3. Chapter I.) Además como el conjunto parcialmente ordenado $X/\sim_Q$ es finito se lo puede sumergir naturalmente, en un reticulado completo $\mathbf{L}_q$.

En consecuencia si la aplicación $p_q: X \rightarrow X/\sim_Q$, es la proyección canónica, la aplicación i_q la inmersión de $X/\sim_Q$ en $\mathbf{L}_q$ y la aplicación $P_q: X \rightarrow \mathbf{L}_q$, la composición $i_q \circ p_q$, se tiene que $\boldsymbol{R}^{P_q} = \sim_Q$.

DEFINICIÓN 2.13.Dado un conjunto $\mathbf{L}_a$-borroso, $A: X \rightarrow \mathbf{L}_a$, en un conjunto X, anotaremos con:

i. $\mathcal{Q} = \{\boldsymbol{Q} \in \mathcal{P}(X^2) / \boldsymbol{Q}$ es un cuasi-orden en X$\}$

ii. $Q_A = \{\boldsymbol{Q} \in \mathcal{Q} / \boldsymbol{R}^A \subset \boldsymbol{Q}\}$.

iii. $\lambda_A: \mathcal{Q} \rightarrow \mathbf{I}$, el conjunto borroso definido por $\lambda_A(\boldsymbol{Q}) = \lambda(\boldsymbol{R}^{Pq}, \boldsymbol{R}A)$.

PROPOSICIÓN 2.14. Dado un conjunto $\mathbf{L}_a$-borroso, A: X $\rightarrow \mathbf{L}_a$, en un conjunto X, para todo $\boldsymbol{Q} \in Q_A$, $\lambda_A(\boldsymbol{Q}) = \chi_{QA}(\boldsymbol{Q})$.
Demostración: Obvia.

3. RELACIONES ENTRE GRADOS DE DEPENDENCIA

- En primer lugar se recuerdan las definiciones de los grados de dependencia (ver [6] y/o [10]), que relacionaremos con los expresados en la DEFINICIÓN 2.10 y en la DEFINICIÓN 2.12.

DEFINICIÓN 3.1. Dado un sistema de información $\mathbf{S}$ = (X, Q, V, δ) dotado de una estructura borrosa $((\mathbf{L}_q)_{q\in Q}, (F_q:Vq\rightarrow Lq)_{q\in Q})$, se llama grado de dependencia fuerte de un atributo b ∈ Q respecto a un atributo a ∈ Q, con respecto a una regla gradual borrosa (R), y se anota χ(b, a) al valor definido por la siguiente expresión:

$$\text{si } |\Omega| = 0 \text{ entonces } \chi(b, a) = 1$$

y

$$\text{si } |\Omega| \neq 0 \text{ entonces } \chi(b, a) = (|\Theta|/|\Omega|)$$

donde:

$A = F_a \circ \delta_a$ y $B = F_b \circ \delta_b$

$\Theta = \{ x \in X / H^B(\{x\}) \neq X \text{ y } H^B(\{x\}) \in C_\tau A)$

$\Omega = \{ x \in X \; / \; H^B(\{x\}) \neq X \}$

DEFINICIÓN 3.2. Dado un sistema de información $\mathbf{S} = (X, Q, V, \delta)$ dotado de una estructura borrosa $((\mathbf{L}_q)_{q\in Q}, (F_q{:}Vq\to Lq)_{q\in Q})$, se llama grado de dependencia topológico de un atributo $b \in Q$ respecto a un atributo $a \in Q$, con respecto a una regla gradual borrosa (R), y se anota $\kappa(b, a)$ al valor definido por la siguiente expresión:

$$\text{Si } |\tau^{B^*}| = 0 \text{ entonces } \kappa(b, a) = 1$$

y

$$\text{si } |\tau^{B^*}| \neq 0 \text{ entonces } \kappa(b, a) = |\tau^{A^*} \cap \tau^{B^*}| \; / \; |\tau^{B^*}|$$

donde:

$A = F_a \circ \delta_a$ y $B = F_b \circ \delta_b$

$\tau^{A^*} = \tau^{A^*} - (\varnothing, X)$ y $\tau^{B^*} = \tau^{B^*} - (\varnothing, X)$

- Al igual que en el TEOREMA 2.11, se han demostrado en [6] y en [10] que: dado un sistema de información libre, $\mathbf{S} = (X, Q, V, \delta)$, dotado de una estructura borrosa $((\mathbf{L}_q)_{q\in Q}, (F_q{:}Vq\to Lq)_{q\in Q})$, para todo par de atributos $a,b \in Q$, los grados de dependencia $\chi(b, a)$ y $\kappa(b, a)$, son respectivamente iguales a 1, sii $\boldsymbol{R}^A \subset \boldsymbol{R}^B$. Condición esta, que necesariamente debe cumplirse para que se pueda hablar de la borrosidad de los respectivos criterios y por ende del nuevo criterio que introducimos en este trabajo.

EJEMPLO 3.3. A continuación presentamos un ejemplo que pone en evidencia la diferencia entre los grados de dependencias χ, κ y λ.

A tal efecto sean:

i. X, el conjunto definido por: X = {w, x, y,z}.

ii. {**L**, ≥}, el reticulado completo donde el conjunto subyacente **L** es el producto por si mismo del intervalo cerrado [1, 2, 3] del conjunto totalmente ordenado de los números naturales, vale decir

L = {[1, 2, 3] X [1, 2, 3]}

y donde para todo (s, t), (s´, t´) ∈ **L**,

(s, t) ≥ (s´, t´) sii s ≥ s´y t ≥ t´.

iii. A: X→ **L**, el conjunto **L**-borroso definido por las asignaciones siguientes:

A(w) = (1, 1), A(x) = (1, 1), A(y) = (1, 2) y A(z) = (1, 3).

iv. B: X→ **L**, el conjunto **L**-borroso definido por las asignaciones siguientes:

B(w) = (1, 1), B(x) = (1, 2), B(y) = (2, 1), B(z) = (2, 1).

v. D: X→ **L**, el conjunto **L**-borroso definido por las asignaciones siguientes:

D(w) = (1, 3), D(x) = (2, 2), D(y) = (3, 2), D(z) = (3, 3).

a. Determinación de las bases β^A, β^B y β^D.

$\beta^A = (A_k)_{k \in A(X)}$.= { $A_{(1, 1)}$ = {w, x, y, z}, $A_{(1, 2)}$ = {y, z}, $A_{(1, 3)}$ = {z}}.

$\beta^B = (B_k)_{k \in B(X)}. = \{B_{(1, 1)} = \{w, x, y, z\}, B_{(1, 2)} = \{x\}, B_{(2, 1)} = \{y, z\}\}$.

$\beta^D = (D_k)_{k \in D(X)}. = \{D_{(1, 3)} = \{w, z\}, D_{(2, 2)} = \{x, y, z\}, D_{(3, 2)} = \{y, z\}, D_{(3, 3)} = \{z\}\}$.

b. Determinación de τ^A, $C\tau^A$, τ^A_*, τ^B_* y τ^D_*.

$\tau^A = \{\varnothing, \{w, x, y, z\}, \{y, z\}, \{z\}\}$.

$C\tau^A = \{\varnothing, \{w, x, y, z\}, \{w, x\}, \{w, x, y\}\}$.

$\tau^A_* = \{\{y, z\}, \{z\}\}$.

$\tau^B_* = \{\{x\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}$

$\tau^D_* = \{\{w, z\}, \{x, y, z\}, \{y, z\}, \{z\}, \{w, y, z\}\}$.

c. Determinación de $B^*_{\geq}$ y $B^*_{\geq, \tau}$.

$B^*_{\geq} = \{B^*_{(1, 1), (1, 1)}, B^*_{(1, 2), (1, 1)}, B^*_{(2, 1), (1, 1)}, B^*_{(1, 2), (1, 2)}, B^*_{(2, 1), (2, 1)}\}$.

$B^*_{\geq, \tau} = \{ B^*_{(1, 1), (1, 1)}, B^*_{(1, 2), (1, 1)}, B^*_{(2, 1), (1, 1)}, B^*_{(2, 1), (2, 1)}\}$

$D^*_{\geq} = \{B^*_{(1, 3), (1, 3)}, B^*_{(2, 2), (2, 2)}, B^*_{(3, 2), (3, 2)}, B^*_{(3, 2), (2, 2)}, B^*_{(3, 3), (3, 3)},$
$B^*_{(3, 3), (2, 2)}, B^*_{(3, 3), (3, 2)}, B^*_{(3, 3), (1, 1)}\}$.

$D^*_{\geq \mathbf{L}, \tau} = \{B^*_{(3, 2), (3, 2)}, B^*_{(3, 3), (3, 3)}, B^*_{(3, 3), (3, 2)}\}$.

d. Determinación de los valores que toman los modificadores débiles H^B y H^D.

$H^B(\{w\}) = \{w\}$.

$H^B(\{x\}) = \{w, x\}$.

$H^B(\{y\}) = \{w, y, z\}$.

$H^B(\{z\}) = \{y\}$.

$H^D(\{w\}) = \{w\}$.

$H^D(\{x\}) = \{x\}$.

$H^D(\{y\}) = \{x, y\}$.

$H^D(\{z\}) = \{w, x, y, z\}$

e. En virtud de los resultados precedentes, se tienen los valores correspondientes a los diferentes grados de dependencias considerados:

$\lambda(B, A) = (|B^*_{\geq,\tau}|/|B^*_{\geq}|) = 4/5$.

$\lambda(D, A) = (|D^*_{\geq,\tau}|/|D^*_{\geq}|) = 3/8$.

$\kappa(B, A) = 1/3$.

$\kappa(D, A) = 2/5$

$\chi(B, A) = 1/4$

$\chi(B, A) = 0$

Obviamente los valores calculados comprueban la diferencia entre los grados de dependencias λ, κ y χ.

4. BIBLIOGRAFÍA

[1] BIRKHOFF, G. Lattice Theory, American Mathematical Soc., New York (1948).

[2] DUBOIS, D. y PRADE, H. An Introduction to Fuzzy Logic Applications in Intelligent Systems. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1991.

[3] GOGUEN, J. A. L-fuzzy sets. J. Math. Appls., 18, 145-174, 1967.

[4] GRZYMALA-BUSSE, J. W. Knowledge acquisition under uncertainty - a rough set approach. Journal of Intelligent and Robotic Systems, 1, 3-16, 1988.

[5] KELLEY, J. L. Topología General, Eudeba, Buenos Aires, 1963.

[6] KORTELAINEN, J. On the evaluation of compatibility with gradual rules in information systems: a topological approach. Control and Cybernetics, Vol 28, N°1, 121-131,1999.

[7] KOSKO, B. (1990) Fuzziness vs. probabillity. International Journal of General Systems, 17, 211-240.

[8] PAWLAK, Z. On learning - a rough set approach. Lecture Notes in Computer Science, 208, Springer-Verlag, 197-221, 1986.

[9] PAWLAK, Z. Rough sets: A new approach to vagueness, In: L. A. Zadeh and J. Kacprzyk eds., Fuzzy Logic for Management of Uncertainty, John Wiley, New York. 1992.

[10] SCARPARO, R. C. Grados de dependencia entre atributos de un sistema de información dotado de estructura borrosa. CIMBAGE, CUADERNO N° 3: Aplicaciones de Metodologías Borrosa a Temas de Gestión y Economía, Facultad de Ciencias Económicas de la UBA, Buenos. Aires, 2000.

[11] ZADEH, L. A. Fuzzy Sets. Information and Control 8, 1965.