ELEMENTOS DE ESPACIOS TOPOLOGICOS BORROSOS

Renato Cesar Scarparo

0 - INTRODUCCION

Las Teorías Fuzzy se inician en 1965 con la memoria "Fuzzy Sets" de L. A. Zadeh. En efecto, la publicación de Zadeh fue el disparador de un proceso explosivo de teorías fuzzy y sus aplicaciones a los diferentes campos del saber. Los estudiosos del tema, consideran que la razón principal de este fenómeno, es que las teorías fuzzy posibilitan un tratamiento matemático de la imprecisión del mundo real sin obviar esa imprecisión, tal cual lo prueba la eficacia de dichas teorías para modelizar procesos de discurso, de percepción, de subjetividad, de mercado etc.., todos ellos caracterizados por la incertidumbre y/o una insuficiente experimentación, que impiden el uso de los métodos clásicos. Este carácter de aplicabilidad, evidentemente ha sido y es, el motor mas poderoso que ha impulsado e impulsa el desarrollo de estas teorías, pero de ninguna manera el único, pues a él se ha sumado el puro interés cognoscitivo, propio de las ciencias básicas, y que en forma natural ha motivado y motiva, el rigor y la excelencia matemática en el desarrollo de las diferentes ramas, ya sean Teoría de Conjuntos Fuzzy, Lógica Fuzzy, Topología Fuzzy, Álgebra Fuzzy, Aritmética Fuzzy, Análisis Fuzzy, etc....

A pesar del interés que despiertan los logros en este nuevo campo matemático, las limitaciones de esta exposición nos condicionan a una introducción breve, razón por la cuál nos limitaremos a explicar que su objetivo principal es servir, a las lineas de investigación y desarrollo enmarcadas en el CIMBAGE, presentando con rigor aceptable, a los investigadores y estudiantes de sistemas económicos fuzzy algunos principios de la Topología Fuzzy, la que, desde el punto de vista utilitario, constituye una herramienta matemática que cumple en el campo de los sistemas económicos fuzzy una función equivalente a la que cumple la Topología en el estudio de los sistemas económicos clásicos.

1 - CONJUNTOS FUZZY

En este escrito mantendremos una notación usual, hay varias, tanto para los objetos y relaciones fuzzy como para los no fuzzy, en consecuencia, en gran parte, algunos lectores la encontraran familiar, pero como esta exposición es de carácter inicial, toda notación que se refiera a conceptos fuzzy será debidamente explicitada como así también toda notación que se refiera a objetos o relaciones no fuzzy y que a nuestro entender puedan complicar innecesariamente la claridad del texto.

A tal efecto comenzamos precisando que anotaremos con **R** a los números reales, con **Q** a los números racionales, con **Z** a los números enteros, con **N** a los números naturales, y con **I** al intervalo $[0, 1] = \{x \in \mathbf{R} \ / \ 0 \leq x \leq 1\}$. Así mismo en general, vale decir salvo excepciones definidas explícitamente, anotaremos:

a) los conjuntos fuzzy, con las primeras letras mayúsculas, por ejemplo A, B, C,...,
b) los conjuntos ordinarios, con las últimas letras mayúsculas, X, Y, Z, con los tildes que convengan,
c) las familias de conjuntos fuzzy con letras, griegas mayúsculas, por ejemplo Β, Σ, Τ,... o a veces, por razones de claridad tipográfica, con Zurich Calligraphic, por ejemplo A, B, P,...,d) los valores que toman los puntos fuzzy en sus soportes con letras griegas minúsculas por ejemplo λ, μ, ν, etc...

DEFINICION 1.1. Dado un conjunto X no vacío, llamaremos conjunto fuzzy en X, o también, más propiamente, subconjunto fuzzy en X, a toda aplicación: $A : X \to [0, 1]$.

• Para cada $x \in A$ el valor $A(x)$ se llama el grado de pertenencia de x en el conjunto fuzzy A, y el conjunto $\{x \in A \ / \ A(x) > 0\}$, se llama el soporte de A y se anota sop A.

• Los conjuntos fuzzy que toman únicamente los valores 0 o 1 se llaman conjuntos fuzzy característicos o conjuntos fuzzy crestas, en especial el conjunto fuzzy característico que para todo $x \in X$ toma el valor 1 se lo anota 1_X, y el conjunto fuzzy característico que para todo $x \in X$ toma el valor 0 se lo anota $1_\emptyset$. No obstante la vigencia de esta notación es frecuente encontrar en otros textos que el conjunto fuzzy 1_X se anota con X o con 1 y que el conjunto $1_\emptyset$ se anota con $\emptyset$ o con 0.

• El conjunto de subconjuntos fuzzy en X, clásicamente se anota con $\mathbf{I}^X$ y en la literatura específicamente fuzzy también con $\mathcal{P}_F(X)$ o $\mathcal{F}(X)$. Asimismo el conjunto de conjuntos fuzzy en X diferentes a $1_\varnothing$, o sea $\mathcal{P}_F(X) - \{1_\varnothing\}$, se anota $\mathcal{P}_{0,F}(X)$ o $\mathcal{F}_0(X)$.

DEFINICION 1.2. Sean X un conjunto no vacío, K un conjunto de índices y $A = (A_k)_{k\in K}$ una familia de conjuntos fuzzy en X. Entonces definimos respectivamente su unión, que anotamos $\cup\{A_k/k \in K\}$ o $\cup A$, y su intersección, que anotamos $\cap\{A_k/k \in K\}$ o $\cap A$, por:

$$(\cup A) \,.\, x = (\cup\{A_k / k \in K\}) \,.\, x = \sup\{A_k(x) / k \in K\} \quad \text{para todo } x \in X$$

$$(\cap A) \,.\, x = (\cap\{A_k / k \in K\}) \,.\, x = \inf\{A_k(x) / k \in K\} \quad \text{para todo } x \in X$$

DEFINICION 1.3. Sean X un conjunto no vacío y A un subconjunto fuzzy en X. Se llama complementario de A y se anota A^c al conjunto fuzzy en X tal que para todo $x \in X$,

$$A^c(x) = 1 - A(x).$$

DEFINICION 1.4. Sean A y B dos conjuntos fuzzy en X, diremos que A está contenido en B, y anotaremos

$$A \subset B, \text{ si para todo } x \in X,\ A(x) \leq B(x).$$

DEFINICION 1.5. Diremos que un subconjunto fuzzy P en X es un punto fuzzy en X, si existe $x \in X$ tal que, sop $P = \{x\}$.

• Si P es un punto fuzzy en X tal que sop $P = \{x\}$ y $P(x) = \lambda$, entonces a P también se lo anota con x_λ o con (x, λ).

• Al conjunto de puntos fuzzy en X se lo anota con Pt $(\mathbf{I}^X)$.

DEFINICION 1.6. Diremos que un punto fuzzy x_λ en X pertenece a un conjunto fuzzy A en X, y anotaremos $x_\lambda \in A$, si $\lambda \leq A(x)$.

DEFINICION 1.7. Sea f: $X \to Y$ una aplicación de un conjunto X en un conjunto Y. Para cada conjunto fuzzy A en X llamaremos imagen de A mediante f, y anotaremos f(A), el conjunto fuzzy en Y tal que para cada $y \in Y$,

$$f(A) \,.\, y = 0 \;\text{ si }\; f^{-1}(y) = \varnothing \quad \text{y} \quad f(A) \,.\, y = \sup \{ A(x) \;/\; x \in f^{-1}(y) \} \;\text{ si }\; f^{-1}(y) \neq \varnothing$$

DEFINICION 1.8. Sea f: $X \to Y$ una aplicación de un conjunto X en un conjunto Y. Para cada conjunto fuzzy B en Y llamaremos imagen inversa de B mediante f, y anotaremos $f^{-1}(B)$, el conjunto fuzzy en X tal que para cada $x \in X$, $f^{-1}(B) \,.\, x = B(f(x))$.

PROPOSICION 1.9. Sea f: $X \to Y$ una aplicación de un conjunto X en un conjunto Y entonces se verifican las siguientes proposiciones:

1.9.1. Para todo punto fuzzy x_λ en X, $f(x_\lambda) = (f(x), \lambda) = (f(x))_\lambda$.

1.9.2. Para todo $B \in \mathbf{I}^Y$ y para todo $x_\lambda \in f^{-1}(B)$, $f(x_\lambda) \in B$.

1.9.3. Para todo $A \in \mathbf{I}^X$, $y_\mu \in f(A)$ sii existe $x_\lambda \in A$ tal que $\lambda = \mu$ y $f(x) = y$.

1.9.4. Para todo $B \in \mathbf{I}^Y$, $f(f^{-1}(B)) \subset B$, y se da la igualdad si f es sobreyectiva.

1.9.5. Para todo $A \in \mathbf{I}^X$, $A \subset f^{-1}(f(A))$, y se da la igualdad si f es inyectiva.

1.9.6. Para todo $A_1, A_2 \in \mathbf{I}^X$, si $A_1 \subset A_2$ entonces $f(A_1) \subset f(A_2)$.

1.9.7. Para todo $B_1, B_2 \in \mathbf{I}^Y$, si $B_1 \subset B_2$ entonces $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

1.9.8. Si para todo $k \in K$, $B_k \in \mathbf{I}^Y$, entonces:

$f^{-1}(\cup \{ B_k \;/\; k \in K\} = \cup\{ f^{-1}(B_k) \;/\; k \in K\}$ y

$f^{-1}(\cap \{ B_k \;/\; k \in K\}) = \cap\{ f^{-1}(B_k) \;/\; k \in K\}$.

1.9.9. Si para todo $k \in K$, $A_k \in \mathbf{I}^X$, entonces:

$f(\cup \{A_k \;/\; k \in K\}) = \cup \{ f(A_k) \;/\; k \in K\}$ y

$f(\cap \{A_k \;/\; k \in K\}) \subset \cap\{ f(A_k) \;/\; k \in K\}$ y

$f(\cap \{A_k \;/\; k \in K\}) = \cap\{ f(A_k) \;/\; k \in K\}$ si f es inyectiva.

1.9.10. Para todo $B \in \mathbf{I}^Y$, $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$.

1.9.11. Para todo $A \in \mathbf{I}^X$, $f(A^c) = (f(A))^c$ si f es biyectiva.

Demostración: Omitiremos la demostración pues se obtiene mediante la aplicación directa de las definiciones lo cual sirve como ejercicio para el lector.

2 - ESPACIOS TOPOLOGICOS FUZZY

DEFINICION 2.1. Sea X un conjunto no vacío. Una familia de subconjuntos fuzzy en X,

$T = \{G_k \in \mathbf{I}^X \ / \ k \in K\}$, es una topología fuzzy de X si verifica los siguientes axiomas:

T.1. $1_\varnothing \in T$.
T.2. $1_X \in T$.
T.3. Para todo $J \subset K$, $\cup \{G_j \ / \ j \in J\} \in T$.
T.4. Para todo $k, j \in K$, $G_k \cap G_j \in T$.

DEFINICION 2.2. Se llama espacio topológico fuzzy, a todo par (X, T) donde X es un conjunto y T una topología fuzzy de X.

DEFINICION 2.3. Los elementos de una topología fuzzy T de X, se llaman conjuntos fuzzy T-abiertos, o cuando no hay lugar a confusión, fuzzy abiertos o simplemente abiertos, o también, haciendo referencia al espacio topológico fuzzy (X, T), fuzzy abiertos de (X, T) o abiertos de (X, T).

• Si T y T* son topologías fuzzy de X, entonces se dice que T es menor que T* o menos fina que T*, o respectivamente que T* es mayor que T o más fina que T, si $T \subset T^*$. En otras palabras, T es menor que T*, si cada conjunto fuzzy T-abierto es T*-abierto. Como la relación de inclusión es una relación de orden parcial[1] dos topologías fuzzy T y T* pueden no ser comparables, vale decir ninguna de las dos más fina que la otra, pero sin embargo existe una topología fuzzy máxima y una topología fuzzy mínima, llamadas respectivamente topología fuzzy indiscreta (trivial o caótica) y topología fuzzy discreta. La topología fuzzy indiscreta de un conjunto X es el conjunto de conjuntos fuzzy, $T_d = \{ 1_\varnothing, 1_X \}$, y la topología fuzzy discreta de X es el conjunto de todos los conjuntos fuzzy en X, vale decir el conjunto $T_i = \mathbf{I}^X$. Consecuentemente a todo espacio topológico fuzzy cuya topología fuzzy es la indiscreta se lo

---

[1] *Un orden parcial "≤" en un conjunto X, es una relación binaria definida entre sus elementos que verifica las siguientes condiciones: P.1: Para todo $x \in X$, $x \leq x$, (Reflexiva). P.2: Si $x \leq z$ y $z \leq x$, entonces $x = z$, (Antisimétrica). Si $x \leq z$ y $z \leq w$, entonces $x \leq w$, (Transitiva).*

llama espacio topológico fuzzy indiscreto y respectivamente a todo espacio topológico fuzzy cuya topología fuzzy es la topología fuzzy discreta se lo llama espacio topológico fuzzy discreto.

EJEMPLOS 2.4.

• Sea τ_u la familia de conjuntos abiertos de **R,** donde **R** naturalmente es el conjunto de los números reales, recordemos que dicha familia esta definida por:

$\tau_u = \{G \subset \mathbf{R}/$para cada $x \in G$ existe $\varepsilon > 0$ tal que el intervalo $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset G\}$, entonces la familia de conjuntos fuzzy, $T_u = \{1_G \ / \ G \in \tau_u\}$, es una topología fuzzy de **R**.

En efecto verificaremos sucesivamente las propiedades T_1, T_2, T_3 y T_4.

T.1. y T.2. Como obviamente **R**, $\varnothing$ son abiertos, vale decir como **R**, $\varnothing \in \tau_u$, por definición tenemos que 1_X, $1_\varnothing \in T_u$.

T.3. Si para todo $k \in K$, $1_{G^k} \in T_u$ entonces, por definición, para todo $k \in K$, $G^k \in \tau_u$, y como la unión de una familia de conjuntos abiertos de **R** es un conjunto abierto de **R,** tenemos que $\cup \{G^k / \ k \in K\} \in \tau_u$, por lo tanto $1_{\cup\{G^k \ / \ k \in K\}} \in T_u$, y como

$$1_{\cup\{G^k \ / \ k \in K\}} = \cup\{1_{G^k} \ / \ k \in K\}$$

resulta finalmente que $\cup\{1_{G^k} \ / \ k \in K\} \in T_u$.

T.4. Si $1_{G^k}, 1_{G^j} \in T_u$ entonces, por definición, G^k, $G^j \in \tau_u$, luego, como la intersección de dos conjuntos abiertos de **R** es un conjunto abierto de **R,** tenemos que $G^k \cap G^j \in \tau_u$, por lo tanto $1_{G^k \cap G^j} \in T_u$, y como $1_{G^k \cap G^j} = 1_{G^k} \cap 1_{G^j}$, resulta finalmente que

$$1_{G^k} \cap 1_{G^j} \in T_u$$

• El ejemplo anterior es un caso particular del siguiente: Si (X, τ) es un espacio topológico[2] entonces la familia de conjuntos fuzzy en X, $T = \{1_G \ / \ G \in \tau_u\}$, es una topología fuzzy de X y por lo tanto $\{X, T\}$ es un espacio topológico fuzzy.

---

[2] Dado un conjunto X se llama topología de X a todo conjunto T de partes de X que verifica las siguientes proposiciones: T.1: $X \in T$. T.2: $\varnothing \in T$. T.3: Para todo $J \subset K$, $\cup \{G_j \ /j \in J\} \in T$. T.4: Para todo $k, j \in K$, $G_k \cap G_j \in T$. Y se llama espacio topológico a todo par (X, T) donde X es un conjunto y T una topología de X. Observe el lector la identidad formal entre las definiciones de topología y toplogía fuzzy y las de espacio topológico y espacio topológico fuzzy.

DEFINICION 2.5. Dado un espacio topológico fuzzy (X, T), se llama conjunto fuzzy T-cerrado, o cuando no haya lugar a confusión fuzzy cerrado o simplemente cerrado, a todo conjunto fuzzy B en X tal que $B^c \in T$, o sea tal que su complementario es un fuzzy abierto. Al conjunto de los conjuntos fuzzy T-cerrados se lo anota C_T.

PROPOSICION 2.6. Sean (X, T) un espacio topológico fuzzy y A un subconjunto fuzzy en X. Entonces A es un fuzzy abierto de (X, T) si para todo $x_\lambda \in A$, existe un fuzzy abierto G de (X, T) tal que,

$$x_\lambda \in G \subset A.$$

Demostración: Si $A \in T$ entonces para todo $x_\lambda \in A$ existe $G \in T$ tal que $x_\lambda \in G \subset A$, obviamente tal es el caso para $G = A$. Recíprocamente, si para todo $x_\lambda \in A$, existe un fuzzy abierto $G_{(x, \lambda)} \in T$ tal que $x_\lambda \in G_{(x, \lambda)} \subset A$, entonces, como $A = \cup \{x_\lambda \in \mathbf{I}^X / x_\lambda \in A\}$, tenemos que: $A = \cup \{G_{(x, \lambda)} / x_\lambda \in A\}$, y por T.3, $A \in T$.

DEFINICION 2.7. Sean (X, T) un espacio topológico fuzzy e $Y \subset X$, al par $(Y, T|_Y)$ se le llama subespacio topológico fuzzy de (X, T).

DEFINICION 2.8. Sean (X, T), (X*, T*) espacios topológicos fuzzy y $f: X \to X^*$ una aplicación. Se dice que f es una aplicación fuzzy-continua de (X, T) en (X*, T*), si para cada conjunto fuzzy $G^* \in T^*$ se tiene que $G^* \circ f \in T$

PROPOSICION 2.9. Sean (X, T), (X*, T*) espacios topológicos fuzzy, $f: X \to X^*$ una aplicación fuzzy continua de (X, T) en (X*, T*) e $Y \subset X$. Entonces, $f|_Y : Y \to X^*$, es una aplicación fuzzy continua de $(Y, T|_Y)$ en (X*, T*).

Demostración: Obvia.

PROPOSICION 2.10. Sean (X, T), (X*, T*) espacios topológicos fuzzy, $f: X \to X^*$ una aplicación fuzzy continua de (X, T) en (X*, T*) e $Y^* \subset X^*$ tal que $f(X) \subset Y^*$. Entonces
$f: X \to Y^*$, es una aplicación fuzzy continua de (X, T) en $(Y^*, T^*|_{Y^*})$.

Demostración. Obvia.

3 - T-ENTORNOS

DEFINICION 3.1. Sean (X,T) un espacio topológico fuzzy y $x_\lambda \in Pt(\mathbf{I}^X)$. Se llama fuzzy T-entorno de x_λ, o cuando no haya lugar a confusión fuzzy entorno de x_λ o simplemente entorno de x_λ, a todo subconjunto fuzzy $A \in \mathbf{I}^X$ que admite la existencia de un conjunto fuzzy $G \in T$ tal que, $x_\lambda \in G \subset A$.

DEFINICION 3.2. Sean (X, T) un espacio topológico fuzzy y $x_\lambda \in Pt(\mathbf{I}^X)$. Se llama el sistema o la familia de entornos de x_λ y se anota $N_T(x_\lambda)$, o también $N(x_\lambda)$ cuando no hay lugar a confusión, el conjunto de todos los entornos de x_λ.

PROPOSICION 3.3. Sean (X, T) un espacio topológico fuzzy y $A \in \mathbf{I}^X$, entonces, $A \in T$ si para todo $x_\lambda \in A$, $A \in N(x_\lambda)$.

Demostración: Si $A \in T$ entonces, para todo $x_\lambda \in A$ existe $G \in T$ (el mismo A) tal que $x_\lambda \in G \subset A$. Por lo tanto, para todo $x_\lambda \in A$, $A \in N(x_\lambda)$. Recíprocamente, si para todo $x_\lambda \in A$, $A \in N(x_\lambda)$ entonces, para todo $x_\lambda \in A$ existe $G_{(x, \lambda)} \in T$ tal que $x_\lambda \in G_{(x, \lambda)} \subset A$.
Luego como $A = \cup\{x_\lambda \ / \ x_\lambda \in A\} \subset \cup\{G_{(x, \lambda)} \ / \ x_\lambda \in A\} \subset A$, tenemos que $A = \cup\{G_{(x,\lambda)} \ / \ x_\lambda \in A\}$, en consecuencia por 2.1, T. 3, $A \in T$.

TEOREMA 3.4. Sean (X, T) un espacio topológico fuzzy y $x_\lambda \in Pt(\mathbf{I}^X)$, entonces la familia de entornos $N(x_\lambda)$ verifica las siguientes propiedades:

E.1. Si $U \in N(x_\lambda)$ entonces $x_\lambda \in U$.
E.2. Si $U_1, U_2 \in N(x_\lambda)$ entonces $U_1 \cap U_2 \in N(x_\lambda)$.
E.3. Si $U \in N(x_\lambda)$ y $U \subset V$ entonces $V \in N(x_\lambda)$.
E.4. Si $U \in N(x_\lambda)$ entonces existe $V \in N(x_\lambda)$ tal que para todo $y_\mu \in V$, $U \in N(y_\mu)$.

Demostración:
E.1.) Evidente.
E.2.) Si $U_1, U_2 \in N(x_\lambda)$ entonces existen dos conjuntos fuzzy abiertos G_1, G_2 tales que $x_\lambda \in G_1 \subset U_1$ y $x_\lambda \in G_2 \subset U_2$, por lo tanto $x_\lambda \in G_1 \cap G_2 \subset U_1 \cap U_2$. Luego como por 2.1, T.4, $G_1 \cap G_2 \in T$ tenemos que $U_1 \cap U_2 \in N(x_\lambda)$.
E.3.) Evidente.
E.4.) Si $U \in N(x_\lambda)$ entonces existe $V \in T$ tal que $x_\lambda \in V \subset U$. Como V es un fuzzy abierto, por la proposición 3.3, tenemos que para todo $y_\mu \in V$; $V \in N(y_\mu)$, por lo tanto, $V \in N(x_\lambda)$ y (como $V \subset U$) para todo $y_\mu \in V$, $U \in N(y_\mu)$

TEOREMA 3.5. Sean X un conjunto y E: $Pt(\mathbf{I}^X) \to P_0(\mathbf{I}^X)$, una aplicación tal que para todo punto $x_\lambda \in Pt(\mathbf{I}^X)$ cumple las siguientes proposiciones:

E.1. Si $U \in E(x_\lambda)$ entonces $x_\lambda \in U$.

E.2. Si $U_1, U_2 \in E(x_\lambda)$ entonces $U_1 \cap U_2 \in E(x_\lambda)$.

E.3. Si $U \in E(x_\lambda)$ y $U \subset V$ entonces $V \in E(x_\lambda)$.

E.4. Si $U \in E(x_\lambda)$ entonces existe $V \in E(x_\lambda)$ tal que para todo $y_\mu \in V$, $U \in E(y_\mu)$.

Entonces existe un única topología fuzzy T_E en X tal que para todo $x \in X$, $E(x) = N(x)$.

Demostración: Sea $T_E = \{G \in \mathbf{I}^X \;/\;$ para todo $x_\lambda \in G$, $G \in E(x_\lambda)\}$. Veamos que T_E es una topología fuzzy en X.

T.1.) $1_\varnothing \in T_E$, obvio.

T.2.) Sea $x_\lambda \in 1_X$, entonces si $U \in E(x_\lambda)$, como $U \subset 1_X$, tenemos por E.2. que $1_X \in E(x_\lambda)$, por lo tanto $1_X \in T_E$.

T.3.) Si para todo $k \in K$, $G_k \in T_E$ entonces para todo $x_\lambda \in \cup \{G_k / k \in K\}$ existe $k(\lambda) \in K$ tal que, $x_\lambda \in G_{k(\lambda)} \in E(x_\lambda)$. Como obviamente para todo $k \in K$. $G_{k(\lambda)} \subset \cup\{G_k / k \in K\}$, por E.3 tenemos que, si para todo $k \in K$, $G_k \in T_E$ entonces para todo $x_\lambda \in \cup\{G_k/k \in K\}, \cup\{G_k/k \in K\} \in E(x_\lambda)$ o sea $\cup\{G_k / k \in K\} \in T_E$.

T.4.) Si $G_1, G_2 \in T_E$ entonces para todo $x_\lambda \in (G_1 \cap G_2)$, $G_1 \in E(x_\lambda)$ y $G_2 \in E(x_\lambda)$. Luego por E.2, si G_1, $G_2 \in T_E$ entonces para todo $x_\lambda \in (G_1 \cap G_2)$, $G_1 \cap G_2 \in E(x_\lambda)$ o sea $G_1 \cap G_2 \in T_E$.

Ahora veremos que para todo $x_\lambda \in Pt(\mathbf{I}^X)$, $E(x_\lambda)$ es el sistema de entornos $N(x_\lambda)$ en (X, T_E). En efecto, si $U \in N(x_\lambda)$ entonces existe $G \in T_E$ tal que $x_\lambda \in G \subset U$. Como $G \in E(x_\lambda)$ y $G \subset U$, resulta por E.3, que $U \in E(x_\lambda)$, luego $N(x_\lambda) \subset E(x_\lambda)$. Recíprocamente, si $U \in E(x_\lambda)$ sea $G = \{y_\mu \in U \;/\; U \in E(y_\mu)\}$.

Como: a) $G \subset U$,

b) $x_\lambda \in G$, pues $U \in E(x_\lambda)$ y

c) $G \in T_E$, ya que, si $y_\mu \in G$ entonces por definición $U \in E(y_\mu)$, y en consecuencia por E.4, existe $V \in E(y_\mu)$ tal que para todo $z_\eta \in V$, $U \in E(z_\eta)$, por lo tanto existe $V \in E(y_\mu)$ tal que $V \subset G$, o sea $G \in T_E$.

Luego por a), b) y c) tenemos que $G \subset N(x_\lambda)$, lo que conjuntamente con lo demostrado en la primera parte nos da la igualdad $E(x)= N(x)$.

La unicidad de la topología T_E es consecuencia de la Proposición3.3

4 - BASES Y SUBBASES

DEFINICION 4.1. Sea (X, T) un espacio topológico fuzzy. Se dice que una familia $B = (B_k)_{k \in K}$ de conjuntos fuzzy en X es una base de T si se verifican las siguientes proposiciones:

4.1.1. Para todo $k \in K$, $B_k \in T$.
4.1.2. Para todo $G \in T$, existe $J \subset K$ tal que $G = \cup\{B_k \,/\, k \in J\}$.

EJEMPLOS 4.2.

- Para todo espacio topológico fuzzy (X, T) la topología fuzzy T es una base.

- Si (X, τ) es un espacio topológico y β es una base[3] de τ entonces, la familia $B = \{1_Y \,/\, Y \in \beta\}$ es una base fuzzy de la topología fuzzy $T = \{1_Y \,/\, Y \in \tau\}$.

- Si (X, T_d) es un espacio topológico fuzzy discreto obviamente $B_1 = \{x_\lambda \,/\, x \in X \text{ y } \lambda \in (0, 1]\}$ y $B_2 = \{x_\lambda \,/\, x \in X \text{ y } \lambda \in (0, 1)\}$, son bases de T_d.

DEFINICION 4.3. Se dice que un espacio topológico fuzzy verifica el Segundo Axioma de la Numerabilidad si admite la existencia de una base numerable.

DEFINICION 4.4. Sea (X, T) un espacio topológico fuzzy. Se dice que una familia $\Sigma = (S_k)_{k \in K}$ de conjuntos fuzzy en X, es una subbase de T si la familia

$$B(\Sigma) = \{\cap\{S_k \,/\, k \in F\} \,/\, F \in P^o(K)\} \text{ es una base de T.}$$

- De acuerdo a lo usual, hemos anotado con $P^o(K)$, al conjunto de partes finitas del conjunto K.

- Si Σ es una subbase de T entonces:

$$T = \{\cup\{\cap\{S_k \,/\, k \in H\} \,/\, H \in J \text{ y } J \subset P^o(K)\}.$$

---

[3] *Dado un espacio topológico (X, τ), se dice que una familia $\beta = \{Y_k \,/\, k \in K\}$, de partes de X, es una base de τ sii: 1º) Para todo $k \in K$, $Y_k \in \tau$. 2º) Para todo $Z \in \tau$ existe $J \subset K$ tal que, $Z = \cup\{Y_k \,/\, k \in J\}$.*

PROPOSICION 4.5. Sean (X, T) un espacio topológico fuzzy, $B = (B_k)_{k \in K}$ una base de la topología fuzzy T e $Y \subset X$. Entonces $B|_Y = \{B_k|_Y \ / \ k \in K\}$, es una base de la topología fuzzy $T|_Y$ inducida por T en Y.

Demostración:
4.1.1. $B|_Y \subset T|_Y$ pues $B \subset T$.
4.1.2. Para todo $G \in T|_Y$ existe $A \in T$ tal que $G = A \cap 1_Y$. Como $A = \cup\{B_k \ / \ k \in J \subset K\}$ se deduce que; $G = \cup\{B_k|_Y \ / \ k \in J \subset K\}$

PROPOSICION 4.6. Sean (X, T) un espacio topológico fuzzy, $\Sigma = (S_k)_{k\in K}$ una subbase de T e $Y \subset X$. Entonces $\Sigma|_Y = \{(S_k|_Y)_{k\in K} / k\in K\}$, es una subbase de la topología fuzzy $T|_Y$ inducida por T en Y.

Demostración: Como
$B(\Sigma|_Y) = \{\cap\{S_k|_Y \ / \ k \in F\} \ / \ F \in P^o(K)\} = \{(\cap\{ S_k \ / \ k \in F\})|_Y \ / \ F \in P^o(K)\}$
y como por la Proposición 4.5, este último es base de $T|_Y$, $\Sigma|_Y$ resulta subbase de $T|_Y$.

5 - INTERIOR Y CLAUSURA

DEFINICION 5.1. Sean (X, T) un espacio topológico fuzzy y $A \in \mathbf{I}^X$. Llamaremos interior de A, y lo anotaremos indistintamente por $\mathrm{int}_X A$, int A, A°, al mayor conjunto fuzzy abierto contenido en A, vale decir $A° = \cup \{G \in T \ / \ G \subset A\}$.

- Si un punto fuzzy $x_\lambda \in A°$ se dice que es un punto interior de A.

- Observemos que para todo $A \in \mathbf{I}^X$, $A° \in T$ y $A° \subset A$.

PROPOSICION 5.2. Sean (X, T) un espacio topológico fuzzy y $A \in \mathbf{I}^X$. Entonces $A \in T$ sii $A° = A$.

Demostración: Si $A° = A$, como $A° \in T$, entonces $A \in T$. Recíprocamente si $A \in T$, A mismo es el máximo abierto contenido en A o sea $A° = A$.

PROPOSICION 5.3. Sea (X, T) un espacio topológico fuzzy. Si A, $A^* \in \mathbf{I}^X$ y $A \subset A^*$ entonces $A° \subset A^{*°}$.

Demostración: Como por 5.1, $A^\circ \subset A$ y $A^\circ \in T$, tenemos que A° es un fuzzy abierto contenido en A^* y por lo tanto contenido en su interior $A^{*\circ}$, ya que éste es el máximo conjunto fuzzy abierto contenido en A^*.

TEOREMA 5.4. Sea (X, T) un espacio topológico fuzzy. Entonces se verifican las siguientes proposiciones:

I.1. $(1_X)^\circ = 1_X$.

I.2. Para todo $A \in \mathbf{I}^X$, $A^\circ \subset A$.

I.3. Para todo $A, A^* \in \mathbf{I}^X$, $(A \cap A^*)^\circ = A^\circ \cap A^{*\circ}$.

I.4. Para todo $A \in \mathbf{I}^X$, $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.

Demostración:

I.1. $1_X \in T$ por lo tanto $(1_X)^\circ = 1_X$.

I.2. Por definición $A^\circ \subset A$.

I.3. Como $A^\circ \subset A$. y $A^{*\circ} \subset A^*$ entonces $A^\circ \cap A^{*\circ} \subset A \cap A^*$. Luego como $A^\circ \cap A^{*\circ} \in T$, por definición de interior tenemos $A^\circ \cap A^{*\circ} \subset (A \cap A^*)^\circ$. Por otra parte como $A \cap A^* \subset A$ y $A \cap A^* \subset A^*$ tenemos que

$$(A \cap A^*)^\circ \subset A^\circ \;\text{ y }\; (A \cap A^*)^\circ \subset A^{*\circ}$$

lo cual implica que, $(A \cap A^*)^\circ \subset A^\circ \cap A^{*\circ}$, y en consecuencia conjuntamente con lo probado anteriormente tenemos que

$$(A \cap A')^\circ = A^\circ \cap A'^\circ.$$

I.4. Como $A^\circ \in T$, por 5.2, tenemos que $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.

TEOREMA 5.5. Sean X un conjunto no vacío y $\delta: \mathbf{I}^X \to \mathbf{I}^X$ una aplicación tal que:

δ.1. $\delta(1_X) = 1_X$.

δ.2. Para todo $A \in \mathbf{I}^X$, $\delta(A) \subset A$.

δ.3. Para todo $A, A^* \in \mathbf{I}^X$, $\delta(A \cap A^*) = \delta(A) \cap \delta(A^*)$.

δ.4. Para todo $A \in \mathbf{I}^X$, $\delta(\delta(A)) = \delta(A)$.

Entonces existe una única topología fuzzy T_δ en X tal que para todo $A \in \mathbf{I}^X$, $\delta(A) = A^\circ$.

Demostración: Sea $T_\delta = \{G \in \mathbf{I}^X \,/\, \delta(G) = G\}$. Veamos que T_δ es una topología fuzzy en X.

T.1. Por δ.2, $\delta(1_\varnothing) \subset 1_\varnothing$, luego $\delta(1_\varnothing) = 1_\varnothing$, y en consecuencia $1_\varnothing \in T_\delta$

T.2. Por δ.1, $1_X \in T_\delta$

T.4. Si $G, G^* \in T_\delta$ entonces $\delta(G) = G$ y $\delta(G^*) = G^*$. Luego por δ.3, $\delta(G \cap G^*) = \delta(G) \cap \delta(G^*) = G \cap G^*$, por lo tanto $(G \cap G^*) \in T_\delta$

T.3. Si para todo $k \in K$, $G_k \in T_\delta$ entonces para todo $k \in K$,

$G_k = \delta(G_k) = \delta(G_k \cap (\cup\{G_j \ / \ j \in K\})) = \delta(G_k) \cap \delta(\cup\{G_j \ / \ j \in K\})$

Luego, $G_k = \delta(G_k) = \delta(G_k) \cap \delta(\cup\{G_j \ / \ j \in K\}) \subset \delta(\cup\{G_j \ / \ j \in K\})$, por lo tanto $\cup\{G_k \ / \ k \in K\} \subset \delta(\cup\{G_k \ / \ k \in K\})$, y por δ.2 entonces, $\cup\{G_k/k \in K\} = \delta(\cup\{G_k/k \in K\})$en consecuencia $\cup\{G_k \in T_\delta/k \in K\} \in T_\delta$.

Veamos ahora que para toda $A \in \mathbf{I}^X$, $\delta(A) = A^\circ$. Como $\delta(\delta(A)) = \delta(A)$ entonces $\delta(A) \in T_\delta$, y como $\delta(A) \subset A$ tenemos que $\delta(A) \subset A^\circ$. Recíprocamente como $A^\circ \in T_\delta$, tenemos que

$$A^\circ = \delta(A^\circ) = \delta(A^\circ \cap A) = \delta(A^\circ) \cap \delta(A) \subset \delta(A),$$

o sea tenemos que $A^\circ \subset \delta(A)$, que conjuntamente con lo ya demostrado nos da que, $A^\circ = \delta(A)$.

Por último la unicidad de T_δ resulta de 5.2.

• Debemos aclarar que hemos usado la letra griega δ para designar la aplicación definida en el Teorema 5.5, con el objeto de mantener la notación utilizada en trabajos de Topología Combinatoria, a los cuales trataremos en el futuro.

DEFINICION 5.6. Sean (X, T) un espacio topológico fuzzy y $A \in \mathbf{I}^X$. Llamaremos clausura de A, y lo anotaremos indistintamente por A^-, cl A, cl_X A, a la intersección de los conjuntos fuzzy cerrados que contienen a A, vale decir $A^- = \cap\{F \in C_T \ / \ A \subset F\}$.

• Si un punto fuzzy $x_\lambda \in A^-$ se dice que es un punto de la clausura de A.

• Observemos que para todo $A \in \mathbf{I}^X$, $A^- \in C_T$ y $A \subset A^-$.

PROPOSICION 5.7. Sean (X, T) un espacio topológico fuzzy y $A \in \mathbf{I}^X$. Entonces $A \in C_T$ sii $A = A^-$.

Demostración: Si $A^- = A$, como $A^- \in C_T$, entonces $A \in C_T$. Recíprocamente si $A \in C_T$, a mismo es el mínimo cerrado que contiene A o sea $A^- = A$.

PROPOSICION 5.8. Sea (X, T) un espacio topológico fuzzy. Si $A, A^* \in \mathbf{I}^X$ y $A \subset A^*$ entonces $A^- \subset A^{*-}$.

Demostración: Como por 5.6, $A^{*-} \in C_T$ y $A^* \subset A^{*-}$, tenemos que A^{*-} es un fuzzy cerrado que contiene a A y por lo tanto contiene su clausura fuzzy A^-, ya que este es el mínimo fuzzy cerrado que contiene a A .

TEOREMA 5.9. Si (X, T) es un espacio topológico fuzzy entonces se verifican las propiedades siguientes:

C.1. $(1_\emptyset)^- = 1_\emptyset$.

C.2. Para todo $A \in \mathbf{I}^X$, $A \subset A^-$.

C.3. Para todo $A, A^* \in \mathbf{I}^X$, $(A \cup A^*)^- = A^- \cup A^{*-}$.

C.4. Para todo $A \in \mathbf{I}^X$, $(A^-)^- = A^-$.

Demostración:

C.1. Es obvio.

C.2. Resulta de 5.6.

C.3. Como $A \subset A^-$ y $A' \subset A^{*-}$, entonces $A \cup A^* \subset A^- \cup A^{*-}$, luego, como $A^- \cup A^{*-} \in C_T$, tenemos que $(A \cup A^*)^- \subset A^- \cup A^{*-}$.

Recíprocamente, como $A \subset A \cup A^*$ y $A^* \subset A \cup A^*$ tenemos que $A^- \subset (A \cup A^*)^-$ y $A^{*-} \subset (A \cup A')^-$, y por lo tanto $A^- \cup A^{*-} \subset (A \cup A^*)^-$, en consecuencia $A^- \cup A'^- = (A \cup A')^-$.

C.4. Como por 5.6, $A^- \in C_T$, entonces por 5.7, tenemos que $(A^-)^- = A^-$

TEOREMA 5.10. Sean X un conjunto no vacío y $\Gamma: \mathbf{I}^X \to \mathbf{I}^X$, una aplicación tal que verifica las siguientes propiedades:

Γ.1. $\Gamma(1_\emptyset) = 1_\emptyset$.

Γ.2. Para todo $A \in \mathbf{I}^X$, $A \subset \Gamma(A)$.

Γ.3. Para todo $A, A^* \in \mathbf{I}^X$, $\Gamma(A \cup A^*) = \Gamma(A) \cup \Gamma(A^*)$.

Γ.4. Para todo $A \in \mathbf{I}^X$, $\Gamma(\Gamma(A)) = \Gamma(A)$.

Entonces existe una única topología fuzzy T_Γ de X tal que para todo $A \in \mathbf{I}^X$, $\Gamma(A) = cl_{T\Gamma}(A)$.

Demostración: Sea $T_\Gamma = \{G \in \mathbf{I}^X \ / \ \Gamma(1 - G) = 1 - G\}$. Veamos que T_Γ es una topología fuzzy de X.

T.1. Como por Γ.2, $(1 - 1_\emptyset) \subset \Gamma(1 - 1_\emptyset)$, y como $\Gamma(1 - 1_\emptyset) \subset 1_X = 1 - 1_\emptyset$, tenemos que, $\Gamma(1 - 1_\emptyset) = (1 - 1_\emptyset)$, por lo tanto $1_\emptyset \in T_\Gamma$.

T.2. Como $1 - 1_X = 1_\emptyset$, entonces, $\Gamma(1 - 1_X) = \Gamma(1_\emptyset)$, luego, por Γ.1, tenemos que $\Gamma(1 - 1_X) = 1_\emptyset = (1 - 1_X)$, por lo tanto $1_X \in T_\Gamma$.

T.4. Para todo G, G* $\in T_\Gamma$,

$\Gamma(1 - (G \cap G^*)) = \Gamma((1 - G) \cup (1 - G')) = \Gamma(1 - G) \cup \Gamma(1 - G^*) =$
$= (1 - G) \cup (1 - G^*) = 1 - (G \cap G^*)$ luego $(G \cap G^*) \in T_\Gamma$.

T.3. Si para todo $k \in K$, $G_k \in T_\Gamma$ entonces para todo $k \in K$

$1 - G_k = \Gamma(1 - G_k) = \Gamma((1 - G_k) \cup (\cap\{(1 - G_j) / j \in K\})) =$
$= \Gamma(1 - G_k) \cup \Gamma(\cap\{(1 - G_j) / j \in K\}) \supset \Gamma(1 - \cup\{G_j / j \in K\})$

luego, $\cap\{(1 - G_k) / k \in K\} = 1 - \cup\{G_k / k \in K\} \supset \Gamma(1 - \cup\{G_k / k \in K\})$, y como por Γ.2, $\Gamma(1 - \cup\{G_k / k \in K\}) \supset (1 - \cup\{G_k / k \in K\})$, tenemos que $1 - \cup\{G_k/k\in K\} = \Gamma(1 - \cup\{G_k/k\in K\})$ y por lo tanto $\cup\{G_k/k\in K\}\in T_\Gamma$

Veamos ahora que para todo $A\in \mathbf{I}_X$, $\Gamma(A) = cl_{T\Gamma}(A)$. Como $\Gamma(\Gamma(A))= \Gamma(A)$, o sea como $\Gamma(1 - (1 - \Gamma(A))) = 1 - (1 - \Gamma(A))$, entonces $(1- \Gamma(A)) \in T_\Gamma$, lo cual equivale a que $\Gamma(A)\in C_{T\Gamma}$, luego como $\Gamma(A) \supset A$, tenemos en primer lugar que, $\Gamma(A) \supset cl_{T\Gamma}(A)$. Por otra parte como $cl_{T\Gamma}(A) \in C_{T\Gamma}$, tenemos en segundo lugar que,

$cl_{T\Gamma}(A) = \Gamma(cl_{T\Gamma}(A)) = \Gamma(cl_{T\Gamma}(A) \cup A) = \Gamma(cl_{T\Gamma}(A)) \cup \Gamma(A) \supset \Gamma(A)$

por lo tanto resulta que, $\Gamma(A) \supset cl_{T\Gamma}(A)$ y $cl_{T\Gamma}(A) \supset \Gamma(A)$, o sea que $\Gamma(A) = cl_{T\Gamma}(A)$. La unicidad de T_Γ sigue de 5.7.

• Las razones que nos han llevado a utilizar la letra griega Γ para anotar la aplicación definida en 5.10, son las mismas que las que motivaron el uso de δ en 5.5.

• La demostración del Teorema 5.10, se puede simplificar si se tiene en cuenta que una aplicación $\Gamma: \mathbf{I}^X \to \mathbf{I}^X$, verifica Γ.1, Γ.2, Γ.3 y Γ.4 sii la aplicación $\delta: \mathbf{I}^X \to \mathbf{I}^X$ definida por, $\delta(A) = (\Gamma(A^c))^c$, verifica δ.1, δ.2, δ.3, y δ.4. Pues entonces por 5.5, existe una y solo una topología fuzzy T_δ, tal que para todo $A \in \mathbf{I}^X$, $\delta(A) = A°$, o sea tal que para $A \in \mathbf{I}^X$, $(\Gamma(A^c))^c = A°$. Luego por 5.14.1, cuya demostración es independiente de 5.10, tenemos que para todo $A \in\mathbf{I}^X$, $(\Gamma(A^c))^c= ((A^c)^-)^c$, y por lo tanto para todo $A \in \mathbf{I}^X$, $\Gamma(A) = A^-$, con lo que queda demostrado 5.10.

TEOREMA 5.11. Sean (X, T) un espacio topológico fuzzy y $A \in \mathbf{I}^X$. Entonces se verifican las siguientes propiedades.

5.14.1. $A° = ((A^c)^-)^c$.

5.14.2. $A^- = ((A^c)°)^c$.

5.14.3. $(A^-)^c = (A^c)°$.

5.14.4. $(A^c)^- = (A°)^c$.

Demostración: 5.14.1: Sea $(G_k)_{k \in K}$ la familia de los fuzzy abiertos de (X,T) tales que para todo $k \in K$, $G_k \subset A$, entonces $A^\circ = \cup\{G_k / k \in K\}$, luego $(G_k{}^c)_{k \in K}$ es la familia de los conjuntos fuzzy cerrados de (X, T) tales que para todo $k \in K$, $A^c \subset G_k{}^c$, por lo tanto

$(A^c)^- = \cap\{G_k{}^c / k \in K\}$, luego por la ley de De Morgan tenemos que,

$$(\cap\{G_k{}^c / k \in K\})^c = \cup\{G_k / k \in K\} \text{ o sea } ((A^c)^-)^c = A^\circ$$

5.14.2. Se demuestra análogamente al 5.14.1.

5.14.3 y 5.14.4. Resultan fácilmente de 5.14.1 y 5.14.2.

Definición 5.12. Sean (X, T) un espacio topológico fuzzy, $A \in \mathbf{I}^X$ y $x_\lambda \in Pt(\mathbf{I}^X)$, entonces:

5.12.1. Se dice que x_λ es un punto fuzzy frontera de A en (X, T), o cuando no haya lugar a confusión un punto fuzzy frontera de A o simplemente un punto frontera de A si, $x_\lambda \in A^- \cap (A^c)^-$.

5.15.2. Se llama conjunto fuzzy frontera de A en (X, T), o cuando no haya lugar a confusión fuzzy frontera de A o simplemente frontera de A , el conjunto $A^- \cap (A^c)^-$, y se lo anota Fr (A).

PROPOSICION 5.13. Sean (X,T) un espacio topológico fuzzy y $A \in \mathbf{I}^X$, entonces se verifican las siguientes proposiciones:

5.16.1. $A^- \supset A \cup \text{Fr}(A)$.

5.16.2. $A^- \not\subset A \cup \text{Fr}(A)$.

Demostración:

5.16.1. Es obvia.

5.16.2. De esto daremos un ejemplo. Sean X un conjunto no vacío y, a, un punto de X. Entonces el conjunto $T = \{1_X, 1_\emptyset, a_{1/2}\}$, es una topología fuzzy de X, como el lector podrá verificar comprobando que dicho conjunto satisface las cuatro propiedades que definen una topología fuzzy. Luego si A es el conjunto fuzzy en X definido por

$$A(x) = 1 \text{ si } x \neq a \quad \text{y} \quad A(x) = 2/3 \text{ si } x = a$$

Tenemos que como $C_T = \{1_X, 1_\emptyset, (a_{1/2})^c\}$ y como $(a_{1/2})^c: X \to \mathbf{I}$ es el conjunto fuzzy tal que: $(a_{1/2})^c.(a) = 1/2$ y para todo $x \neq a$, $(a_{1/2})^c(x)=1$, tendremos que $A^- = 1_X$ y $(A^c)^- = (a_{1/2})^c$ por lo tanto Fr $(A)=(a_{1/2})^c$. En consecuencia $A \cup \text{Fr}(A)$ es el conjunto fuzzy en X que toma los siguientes valores:

$$\text{si } x \neq a,\ (A \cup \text{Fr}(A)).(x) = 1 \quad \text{y} \quad \text{si } x = a,\ (A \cup \text{Fr}(A)).(x) = 2/3$$

como hemos visto que $A^- = 1_X$ obviamente $A^- \not\subset A \cup \text{Fr}(A)$.

DEFINICION 5.14. Sean (X, T) un espacio topológico fuzzy y $A \in \mathbf{I}^X$. Se dice que A es denso en 1_X sii $A^- = 1_X$.

PROPOSICION 5.15. Sea (X, T) un espacio topológico fuzzy. Entonces un conjunto fuzzy $A \in \mathbf{I}^X$ es denso en 1_X sii para todo $G \in T$ tal que $G \neq 1_\varnothing$; $G \not\subset A^c$.

Demostración: Resulta obvia como aplicación de 5.8.

• Sugerimos al lector que demuestre las siguientes proposiciones:

1. Si (X, T) es un espacio topológico fuzzy entonces $(X, i_o(T))$, donde $i_o(T) = \{\text{sop } G \ / \ G \in T\}$, es un espacio topológico.

2. Bajo las condiciones establecidas en 1), si un conjunto fuzzy $A \in \mathbf{I}^X$ es denso en 1_X entonces $i_o(T)$ es denso en el espacio topológico $(X, i_o(T))$.

6 - FUZZY CONTINUIDAD

• Si bien en el Capítulo 2. "ESPACIOS TOPOLÓGICOS FUZZY', hemos definido el concepto de fuzzy continuidad y hemos demostrado algunas propiedades, recién a esta altura de la presente exposición contamos con los conocimientos necesarios para dar la definición de fuzzy continuidad en un punto, como así también para dar otras definiciones de fuzzy continuidad y demostrar sus respectivas equivalencias.

DEFINICION 6.1. Sean (X, T) y (X*, T') dos espacios topológicos fuzzy y f: $X \to X^*$ una aplicación. Se dice que f es fuzzy continua en un punto $x_\lambda \in Pt(\mathbf{I}^X)$, sii para todo entorno fuzzy $V \in N_{T^*}(f(x_\lambda))$ existe un entorno fuzzy $U \in N_T(x_\lambda)$ tal que $f(U) \subset V$.

PROPOSICION 6.2. Sean (X, T) y (X*, T*) dos espacios topológicos fuzzy y f: $X \to X^*$ una aplicación. Entonces f es fuzzy continua si y solo si f es fuzzy continua en todo punto fuzzy $x_\lambda \in Pt(\mathbf{I}^X)$.

Demostración: Necesidad. Para todo $x_\lambda \in Pt(\mathbf{I}^X)$ y para todo $V \in N_{T^*}{}^a(f(x_\lambda))$ (donde anotamos con $N_{T^*}{}^a(f(x_\lambda))$, el conjunto de los fuzzy T*-entornos abiertos del punto fuzzy $f(x_\lambda)$) como f fuzzy continua, $f^{-1}(V) \in N_{T^*}{}^a(x_\lambda)$ (suponemos a V un fuzzy T*-entorno abierto pues se simplifica la demostración sin perder generalidad).

Luego si anotamos, $U = f^{-1}(V)$, tenemos que, para todo $x_\lambda \in Pt(\mathbf{I}^X)$ y para todo $V \in N_{T^*}{}^a(f(x_\lambda))$ existe $U \in N_T(x_\lambda)$ tal que $f(U) \subset V$, o sea f es fuzzy continua en todo punto fuzzy $x_\lambda \in Pt(\mathbf{I}^X)$.

Suficiencia. Sea $G^* \in T^*$, para todo $x_\lambda \in f^{-1}(G^*)$ existe $U_{(x,\lambda)} \in N_T{}^a(x_\lambda)$ tal que $f(U_{(x,\lambda)}) \subset G^*$. Luego para todo $x_\lambda \in f^{-1}(G^*)$ existe $U_{(x,\lambda)} \in N_T{}^a(x_\lambda)$ tal que $U_{(x,\lambda)} \subset f^{-1}(G^*)$, en consecuencia

$$f^{-1}(G^*) \subset \cup\{U_{(x,\lambda)} \;/\; x_\lambda \in f^{-1}(G^*)\} \subset f^{-1}(G^*)$$

o sea, $f^{-1}(G^*) = \cup\{U_{(x,\lambda)} / x_\lambda \in f^{-1}(G^*)\}$, por lo tanto por T.3, $f^{-1}(G^*) \in T$

PROPOSICION 6.3. Sean (X, T) y (X*, T*) dos espacios topológicos fuzzy y f: X → X* una aplicación. Entonces f es fuzzy continua si y solo si existe una base $B^* = (B^*_k)_{k \in K}$ de T* tal que para todo $k \in K$, $f^{-1}(B^*_k) \in T$.

Demostración: Necesidad: Si tomamos B* = T* entonces, debido a la continuidad de f, para todo $B' \in B^*$, $f^{-1}(B^*) \in T$. Suficiencia: Para todo $G^* \in T^*$ existe una familia $(B^*_k)_{k \in J}$ tal que para todo $k \in J$, $B^*_k \in B^*$ y tal que $G^* = \cup\{B^*_k / k \in J\}$. Luego como

$f^{-1}(G^*) = f^{-1}(\cup\{B^*_k / k \in J\}) = \cup\{f^{-1}(B^*_k) / k \in J\}$ y $\cup\{f^{-1}(B^*_k) / k \in J\} \in T$ tenemos que, para todo $G^* \in T^*$, $f^{-1}(G^*) \in T$ o sea f es fuzzy continua.

PROPOSICION 6.4. Sean (X, T) y (X*, T*) dos espacios topológicos fuzzy y f: X → X* una aplicación. Entonces f es fuzzy continua sii existe una subbase $\Sigma^* = (S^*_k)_{k \in K}$ de T* tal que para todo $k \in K$, $f^{-1}(S^*_k) \in T$.

Demostración: Necesidad, basta tomar Σ* = T*. Suficiencia, para todo $G^* \in T^*, G^* = \cup\{\cap\{S^*_k \;/\; k \in J\} \;/\; J \in H \text{ y } H \subset P^o(K)\}$
luego,

$$\begin{aligned} f^{-1}(G^*) &= f^{-1}[\cup\{\cap\{S^*_k \;/\; k \in J\} \;/\; J \in H \text{ y } H \subset P^o(K)\}] = \\ &= \cup\{f^{-1}[\cap\{S^*_k \;/\; k \in J\}] \;/\; J \in H \text{ y } H \subset P^o(K)\} = \\ &= \cup\{\cap\{f^{-1}(S^*_k \;/\; k \in J\} \;/\; J \in H \text{ y } H \subset P^o(K)\} \end{aligned}$$

como para todo $k \in K$, $f^{-1}(S^*\ ) \in T$ entonces para todo $J \in H$; $\cap\{f^{-1}(S^*_k \;/\; k \in J\} \in T$ en consecuencia

$$f^{-1}(G^*) = \cup\{\cap\{f^{-1}(S^*_k \;/\; k \in J\} \;/\; J \in H \text{ y } H \subset P^o(K)\} \in T$$

luego para todo $G^* \in T^*$, $f^{-1}(G^*) \in T$ y por lo tanto f es fuzzy continua.

PROPOSICION 6.5. Sean (X, T) y (X*, T*) dos espacios topológicos fuzzy y $f: X \to X^*$ una aplicación. Entonces f es fuzzy continua sii se verifican alguna de las siguientes proposiciones:

6.5.1 Para todo $A \in \mathbf{I}^X$; $f(A^-) \subset f(A)^-$.
6.5.2 Para todo $B \in \mathbf{I}^{X^*}$; $(f^{-1}(B))^- \subset f^{-1}(B^-)$.

Demostración: Primero demostraremos que si f es fuzzy continua entonces vale 6.5.1. En segundo lugar demostraremos que 6.5.1 implica 6.5.2, y por último en tercer lugar que 6.5.2, implica la fuzzy continuidad de f.

1°. Por 1.11.5 y 5.7 tenemos que, para todo $A \in \mathbf{I}^X$;
$A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(f(A)^-)$, luego como por 5.6, $f(A)^-$ es un conjunto fuzzy cerrado, por 5.11.3, $(f(A)^-)^c$ es un conjunto fuzzy abierto y por lo tanto $f^{-1}((f(A)^-)^c) = (f^{-1}(f(A)^-))^c \in T$ o sea $f^{-1}(f(A)^-) \in C_T$ en consecuencia como por definición A^- es el menor cerrado que contiene a A tenemos que: $A^- \subset f^{-1}(f(A)^-)$ y por lo tanto:
$f(A^-) \subset f(f^{-1}(f(A)^-)) \subset f(A)^-$, lo cual implica obviamente que: $f(A^-) \subset f(A)^-$

2°. Por 6.5.1, para todo $B \in \mathbf{I}^{X^*}$, $f(f^{-1}(B)^-) \subset f(f^{-1}(B))^- \subset B^-$, en consecuencia $f^{-1}(f(f^{-1}(B)^-)) \subset f^{-1}(B^-)$, y por lo tanto: $f^{-1}(B)^- \subset f^{-1}(B^-)$.

3°. Para todo $x_\lambda \in Pt(\mathbf{I}^X)$ y para todo $V \in N_{T^*}{}^a(f(x_\lambda))$ (suponemos a V un fuzzy T*-entorno abierto, pues se simplifica la demostración sin perder generalidad) como V^c es fuzzy cerrado, vale decir $(V^c)^- = V^c$, tenemos por 2° que $f^{-1}(V^c)^- \subset f^{-1}((V^c)^-) = f^{-1}(V^c)$ o sea $f^{-1}(V^c)^- \subset f^{-1}(V^c)$, como además $f^{-1}(V^c) \subset f^{-1}(V^c)^-$ tenemos que $f^{-1}(V^c)^- = f^{-1}(V^c)$ y por lo tanto $f^{-1}(V^c) \in C_T$ vale decir $f^{-1}(V) \in T$.

- Las proposiciones 6.2, 6.3, 6.4 y 6.5, dan como síntesis el siguiente Teorema.

TEOREMA 6.6. Sean (X, T) y (X*, T*) dos espacios topológicos fuzzy y $f: X \to X^*$ una aplicación. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:
6.6.1. f es fuzzy continua.
6.6.2. f es fuzzy continua en todo punto fuzzy $x_\lambda \in Pt(\mathbf{I}^X)$.

6.6.3. Existe una base $B^* = (B^*_k)_{k \in K}$ de T^* tal que para todo $k \in K$, $f^{-1}(B^*_k) \in T$.
6.6.4. Existe una subbase $\Sigma^* = (S^*_k)_{k \in K}$ de T^* tal que para todo $k \in K$; $f^{-1}(S^*_k) \in T$.
6.6.5. Para todo $A \in \mathbf{I}^X$, $f(A^-) \subset f(A)^-$.
6.6.6. Para todo $B \in \mathbf{I}^{X^*}$, $(f^{-1}(B))^- \subset f^{-1}(B^-)$.

PROPOSICION 6.7. Sean (X, T), (X*, T*) y (X**, T**) tres espacios topológicos fuzzy. Entonces si $f: X \to X^*$ y $g: X^* \to X^{**}$ son aplicaciones fuzzy continuas entonces la composición $g \circ f: X \to X^{**}$ es fuzzy continua.

Demostración: Es obvia.

• Una diferencia importante entre los espacios topológicos fuzzy y los espacios topológicos es que las aplicaciones constantes no son necesariamente fuzzy continuas.

DEFINICION 6.8. Dado un espacio topológico fuzzy (X, T) se dice que:
6.9.1. Es estratificado sii T contiene los conjuntos fuzzy constantes.
6.9.2. Es puramente estratificado sii para todo $G \in T$ y para todo $x, y \in X$, $G(x) = G(y)$
6.9.3. Es simplemente estratificado sii $T = \{\lambda 1_X \ / \ \lambda \in [0, 1]\}$.

PROPOSICION 6.9. Sean (X, T) y (X*, T*) dos espacios topológicos fuzzy y $f: X \to X^*$ una aplicación. Entonces si f es constante y (X, T) es estratificado, f es fuzzy continua.

Demostración: Es obvia.

DEFINICION 6.10. Sean (X, T) y (X*, T*) dos espacios topológicos fuzzy y $f: X \to X^*$ una aplicación. Se dice que la aplicación f es:
6.11.1. Un fuzzy homeomorfismo o un F-homeomorfismo si la aplicación f es biyectiva y las aplicaciones f y f^{-1} son fuzzy continuas.
6.11.2. Fuzzy abierta o F-abierta si para cada conjunto fuzzy $G \in T$, la imagen fuzzy $f(G) \in T^*$.
6.11.3. Fuzzy cerrada o F-cerrada si para cada conjunto fuzzy $F \in C_T$ la imagen fuzzy $f(F) \in C_{T'}$.

TEOREMA 6.11. Sean (X, T) y (X*, T*) dos espacios topológicos fuzzy y f: X $\rightarrow$ X* una aplicación biyectiva. Entonces se verifican las siguientes proposiciones:
6.12.1. f es un fuzzy homeomorfismo.
6.12.2. f es fuzzy continua y fuzzy abierta.
6.12.3. f es fuzzy continua y fuzzy cerrada.
6.12.4. Para todo A $\in$ $\mathbf{I}^X$: $f(A)^{-} = f(A^{-})$.

Demostración: Lo proponemos como trabajo final para el lector.

7 - BIBLIOGRAFIA

[1] BOURBAKI, N .: *Topologie Générale*. Act. Sc. Indust., 1045, 1948.
[2] CHANG, C.L.: *Fuzzy Topological Spaces*. J. Math. Anal. Appl. 24, 1968, 182-189.
[3] DUBOIS D. y PRADE H.: *Fuzzy Sets and Systems*. Academic Press Inc., Boston 1980.
[4] DUGUNDJI, J.: *Topology*. Allyn and Bacon, Boston, 1966.
[5] KELLEY, J. L.: *Topología General*. Eudeba, 1963.
[6] LOWEN, R.: *Foundations of Fuzzy Sets*. Fuzzy Sets and Systems Vol 40, 257-296.
[7] LOWEN, R.: *Mathematics and Fuzziness*. Fuzzy Sets Theory and Applications 1986.
[8] NAGATA J.: *Modern General Topology*. North Holland 1968.
[9] PU PAO-MING y LIU YING MING: *Fuzzy Topology I*. J. Math. Anal. Appl. 76, 571-599.
[10] PU PAO-MING y LIU YING MING: *Fuzzy Topology II*. J. Math. Anal. Appl. 77, 20-37.
[11] ZADEH, L. A.: *Fuzzy Sets*. Information and Control 8,1965.