Lecturas Matemáticas
Volumen **28** *(2007), páginas 41–45*

Euler. Tres siglos después

Diego Pareja Heredia
Universidad del Quindío, Armenia, Colombia

Abstract. Short note on the life and works of L. Euler.

Key words and phrases. Euler, Biography, History of Mathematics.
2000 AMS Mathematics Subject Classification. 01A50, 01A70.

Resumen. Bosquejo de la vida y obra de L. Euler

Leonhard Euler
1707–1783

Leonhard Euler[1] es un matemático cuya vigencia parece no tener límite. Gauss recomendaba a sus discípulos leer a los maestros, y nombraba al matemático suizo, como uno de los grandes. Este año, cuando se cumple el tercer centenario de su nacimiento, nació el 15 de abril de 1707 en Basilea, hay una amplia gama de eventos conmemorativos, en varias partes de Europa y de América, que buscan destacar la enorme importancia de las contribuciones de Euler a las matemáticas y a las ciencias. El liderazgo en estas celebraciones lo tiene la ciudadanía de Basilea, su ciudad natal, con el apoyo de instituciones como la Confederación Suiza, los Cantones de Basilea–Stadt y Basilea–Landschaft, la Universidad de Basilea, la Academia Suiza de Ciencias, la Sociedad Suiza de Naturalistas y la Sociedad Matemática Suiza. El sitio:

`http://www.euler-2007.ch/en/komitee.htm`

ofrece amplia información sobre las actividades a realizarse durante este año para recordar y destacar la magnífica obra de este portento de las matemáticas.

[1] Se pronuncia *Oiler*

Como el siglo de las luces, el siglo de la razón o el siglo del iluminismo o de la ilustración, se conoce al siglo XVIII. Destacarse como el más grande matemático de este siglo, cuando surgieron tantas figuras importantes en las ciencias, las artes, la literatura y la filosofía, dice mucho del sitial de honor que ocupó EULER en su tiempo. TURGOT, contralor general de LUIS XVI, lo calificaba como el "famoso Leonhard Euler" en 1774, cuando el matemático de sesenta y siete años y ya ciego, estaba en el pináculo de su inagotable producción matemática. Tanto escribió de matemáticas y ciencia, que la Academia de Ciencias de San Petersburgo, tuvo material para seguir publicando su obra inédita, aun cincuenta años después de su muerte. La producción de EULER es monumental. Hasta hace unos años se seguía publicando su *Opera Omnia*, ¡más de ochenta volúmenes! Es como imaginarse la *Gran Enciclopedia Espasa* convertida solo a las matemáticas. En 1910 el número de sus publicaciones alcanzó la cifra de 866, incluyendo 25 volúmenes dedicados a áreas específicas que van desde álgebra y análisis, pasando por geometría, teoría de números, mecánica y óptica, hasta llegar a la filosofía y a la música.

Basilea es la cuna de una pléyade de grandes matemáticos. Además de EULER, figura la familia de los BERNOULLI, cuyos troncos mayores fueron JACOB y JOHANN, sucedidos por DANIEL y NICOLÁS y al menos por cinco nombres más, que hacen de este núcleo familiar un caso único en la historia de las matemáticas. Además, Basilea dio dos matemáticos, que aunque no tan conocidos como los anteriores, sí fueron muy destacados: NICOLÁS FUSS (1755-1826) y JACOB HERMANN (1678-1733). FUSS fue secretario de EULER en San Petersburgo, por siete años, y en cierto modo coautor de mucha de la producción matemática de EULER en ese período, puesto que ayudó a preparar doscientos cincuenta de sus artículos para publicación, lo que es mucho decir. La prestancia histórica de Basilea en el aspecto matemático, se reconoce al descubrir que el famoso *Premio Bordin* de la Academia de Ciencias de París, fue otorgado en veintiocho ocasiones a matemáticos de esa ciudad, entre ellos, por supuesto, a EULER en doce oportunidades.

Las matemáticas se enriquecieron con las contribuciones de EULER, no únicamente por sus contenidos, sino también por su metodología y presentación. Con pequeñas diferencias, los textos que EULER escribió, tienen la presentación que hoy vemos en los libros donde aprendimos cálculo, ecuaciones diferenciales o inclusive álgebra. Mucho de esto se debe a que EULER introdujo una simbología que pasó a ser estándar en las matemáticas, como por ejemplo: la constante

$$\gamma = \text{lím}_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right) = 0,57721\ldots$$

de Euler, e (de Euler) para designar la base de los logaritmos naturales, i para designar a la unidad imaginaria, $f(x)$ para denotar una función, $\sin x$, $\cos x$

y $\operatorname{tag} x$,[2] para las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente, Δ para el incremento de una función y $\sum$ para denotar suma, entre otros muchos símbolos y denominaciones, que se usan todavía en la literatura matemática actual. Más aún, la obra de EULER podemos leerla pues está impresa casi toda o se conserva en los archivos. Curiosamente aún se traducen del latín o el alemán a otros idiomas algunos de sus libros de capital importancia histórica y científica. Este es el caso de los *Elementos de álgebra*, publicados inicalmente en alemán por la Academia de San Petersburgo (1770), traducidos al francés en el siglo XVIII, y en 1840 del francés al inglés como *Elements of Algebra*, por JOHN HEWLETT. Esta traducción es la que publica la editorial Springer, con prólogo de C. TRUESDELL, en 1984. Por otra parte, es fácil constatar el número de títulos de libros que están en circulación y a los cuales podemos acceder y cerciorarnos de qué tan vigente sigue EULER en nuestros días.

EULER fue partícipe de una época heroica en el acontecer matemático del siglo de las luces. Me refiero a la creación de dos grandes academias de ciencias: la Academia de San Petersburgo y la Academia de Berlín, creadas en cierto modo, a imagen de las ya reconocidas e influyentes, Academia de París y la Real Sociedad de Londres. Invitado por DANIEL BERNOULLI, uno de los convocados por PEDRO EL GRANDE para conformar la recién creada Academia de San Petersburgo, EULER llegó a ser su secretario y su figura más representativa. Posteriormente pasaría a hacer parte de la Academia de Ciencias de Berlín, creada por sugerencia de LEIBNIZ y con el patronazgo de FEDERICO II, emperador de Prusia, monarca, muy relacionado con las esferas cultas del humanismo europeo. Figuras como VOLTAIRE y D´ALAMBERT, por ejemplo, estuvieron relacionadas con el famoso emperador. La relación de EULER y el emperador, sin embargo, no fue muy cordial. Tampoco hubo empatía con VOLTAIRE. EULER después de algunos años volvió a San Petersburgo, hasta su muerte en 1783. El tiempo que permaneció en Rusia, unido a la gran producción matemática lograda allá, explica porqué los matemáticos rusos, tengan a EULER, como a uno más de los suyos.

En EULER tenemos suficiente motivación para emprender cualquier aventura matemática, tanto en las matemáticas elementales ligadas a la teoría de números, como en las matemáticas avanzadas en conexión con el análisis matemático o la topología, por ejemplo. En teoría de números encontramos fascinantes relaciones descubiertas por EULER. Para sólo citar dos, empecemos con la ley de reciprocidad cuadrática que relaciona, la solución de congruencias cuadráticas con números primos. Este aspecto de la teoría de números lo culmina GAUSS en sus famosas *Disquisitiones Arithmeticae.* En el análisis matemático las funciones *beta, gama* y *zeta* tienen su origen en trabajos de EULER. Posteriormente, ellas darían pie para estudios profundos. Este es el caso de la función zeta (véase más adelante la ecuación (2)), estudiada después

[2]Abreviaturas de las palabras latinas *sinus, cosinus* y *tangens*, respectivamente. De allí deriva el uso en español de las expresiones $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ y $\operatorname{tg} x$.

por RIEMANN, quien conjeturó que todos los ceros no triviales de esta función en el plano complejo caen en la recta $x = 1/2$. A propósito, esta conjetura está en la galería de los *Problemas del milenio* del Instituto Clay, que promete un premio de un millón de dólares para quienes los resuelvan.[3]

EULER tenía un estilo de trabajo poco cercano a los estándares actuales (en su época el cálculo y análisis no se habían sometido al rigor impuesto por CAUCHY y WEIERSTRASS), lo que le permitió deambular libremente por senderos donde la intuición y la imaginación forman un telón de fondo que propicia métodos no convencionales de aproximación a problemas muy profundos. Un ejemplo, digno de mención es su acercamiento a la función zeta a través de una igualdad, que para los cánones actuales no tiene sentido:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}, \tag{1}$$

donde p, en el producto de la derecha, recorre el conjunto de todos los números primos $\{p\,;\, p = 2, 3, 5, \ldots\}$. Tanto la serie como el producto divergen, y así: ¿cómo pueden ser iguales, dos cosas que van a infinito? La serie armónica de la izquierda "sería el valor de la función zeta de Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \text{donde} \quad s = \sigma + ti\,,\ \sigma > 1\,. \tag{2}$$

en $s = 1$." Al producto de la derecha llega EULER, al interpretar la serie $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ como un polinomio "de grado infinito" que podría factorizarse en términos de sus raíces:

$$\left(1 - \frac{x}{r_1}\right)\left(1 - \frac{x}{r_2}\right)\left(1 - \frac{x}{r_3}\right)\cdots.$$

Ilustrativo de esta manipulación formal euleriana es también el caso de la función $1 - \operatorname{sen} x$, que expresada como polinomio infinito e igualando los coeficientes de x que resultan en el producto dado arriba, encuentra que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots,$$

valor que previamente había hallado LEIBNIZ, aunque por diferente camino.

Aun hoy, después de más de doscientos años de su muerte (en 1783), seguimos hablando de sus sorprendentes resultados y recorriendo los caminos abiertos por él en busca de nuevas aventuras y nuevos enfoques matemáticos. No es únicamente la celebración del tricentenario, lo que en este año vamos a compartir. Es además, la gran variedad de literatura relacionada con EULER que tendremos a disposición. Empezando con lo inmediato: lo que circula en la red. Una página en Internet que funciona desde hace algunos años es la del profesor EDWARD SANDIFER,[4] con un nombre muy sugestivo: *¿Cómo lo hizo* EULER*?* En febrero

[3] Detalles de estos problemas pueden verse en `http://www.claymath.org/millennium/`

[4] `http://www.maa.org/`

de 2007 dedicó esta página a los diez grandes exitazos matemáticos de EULER, entre los cuales figuran fórmulas como éstas:

- ★ $V - E + F = 2$, donde V, E y F, representan el número de vértices, aristas y caras, respectivamente, de un poliedro convexo.
- ★ $e^{\pi i} + 1 = 0$. Aquí i es la unidad imaginaria y π el área del círculo de radio 1. Esta fórmula llama la atención porque en ella aparecen juntos cinco números muy especiales: π, e, i, 1 y 0.
- ★ $\displaystyle\sum_p \frac{1}{p} = \infty$ (léase, la serie diverge), donde la suma se toma sobre todos los números primos. Consecuencia de esto, es el hecho de que el conjunto de los números primos es infinito.[5] Esta es la primera prueba alternativa de la infinitud de los primos que encuentra EULER después de la dada por EUCLIDES, dos mil años antes, en la Proposición 20 del libro IX de los *Elementos*.
- ★ $\displaystyle\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Esta evaluación de la función ζ de Riemann en 2 se conoce como el *problema de Basilea*.[6]

Mucho hay que ver y decir sobre la obra de EULER. Para empezar, bueno es visitar la columna de SANDIFER, citada arriba, en el portal de la MAA, y si queremos conocer el Archivo Euler visitar

`http://math.dartmouth.edu/~euler/`

y así darnos cuenta de cuánto más podemos aprender de este prolífico matemático.

Agradecimientos. El autor agradece las valiosas observaciones hechas por el editor, que han contribuido a dar al presente artículo, su presentación final.

(Recibido en enero de 2007. Versión final en marzo de 2007.)

DIEGO PAREJA HEREDIA
DEPARTMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DEL QUINDÍO
ARMENIA, COLOMBIA
e-mail: depehache@yahoo.es

---

[5] El hecho de que la serie diverge se prueba fácilmente usando el criterio de la integral. Teniendo esto, si la cantidad de primos fuese finita la suma de sus recíprocos sería también finita. Esta contradicción muestra que la cantidad de números primos es infinita.

[6] Llamado así pues, como problema por resolver, el cálculo del valor de esta serie estuvo circulando en Basilea entre los Bernoulli. Sólo en 1735 EULER le dio solución en forma poco convencional.