teorema
Vol. XXVI/1, 2007, pp. 5-19

Tablas semánticas para fórmulas satisfacibles en dominios finitos*

Ángel Nepomuceno Fernández

ABSTRACT

In this work we define a semantics in terms of finite structures for a first order formal language. We use semantic tableaux, with the δ′–rule instead of the δ–rule, in order to study interpretative structures whose universe has a determined cardinality. These modified tableaux prove to be useful for investigating in the field of finite models, specifically to determine whether a sentence is finitely satisfiable, and also to define its minimal models and if it is a logical consequence of other sentences, in a sense that is specified in the paper.

RESUMEN

En este trabajo definimos una semántica en términos de estructuras finitas para un lenguaje formal de predicados de primer orden. Hacemos uso de las tablas semánticas, con la regla δ′ en lugar de la regla δ, para estudiar estructuras interpretativas cuyo universo es de determinada cardinalidad. Estas tablas modificadas se revelan útiles para algunas indagaciones en el campo de los modelos finitos, concretamente, para determinar si una sentencia es finitamente satisfacible; en su caso, para definir modelos mínimos de ésta y si es consecuencia lógica de otras sentencias, en un sentido que se especifica en el propio trabajo.

I. INTRODUCCIÓN

Aunque en teoría de modelos se suelen tener en cuenta estructuras integradas por un universo o dominio de cardinalidad infinita, así como un conjunto de predicados y relaciones definidos en dicho dominio, hay razones para el estudio de las que tienen un universo de cardinalidad finita. Para justificar una teoría de modelos finitos —más detalle en [Ebbinghaus & Flum (1999)]—, cabe mencionar la propiedad de modelos finitos para ciertas clases de fórmulas de un lenguaje estándar de primer orden; asimismo, en teoría de bases de datos, ciertas bases de datos relacionales se presentan como estructuras (de primer orden) con un dominio finito. En estos casos se suele partir de lenguajes formales de primer orden con identidad, aunque pueden interesar también clases de fórmulas de un lenguaje de segundo orden, con la semántica habitual restringida a estructuras finitas; ahora bien, ciertas nociones semánticas se establecen teniendo en cuenta *algunas* o *todas* las estructuras finitas, con lo que cabe esperar la definición de otras nociones análogas cuando se tengan en cuenta las que tienen un dominio de una cardinalidad determinada, es decir, respecto de subclases de la clase de todas las estructuras finitas.

Por otra parte, el procedimiento de las tablas semánticas fue ideado por Beth y desarrollado, entre otros, por Smullyan y Hintikka. Este método se ha revelado sumamente útil para una aproximación a la lógica clásica y constituye también una vía de acceso a otras lógicas como la lógica de la relevancia, la lógica intuicionista o la lógica trivalente —en [Nepomuceno (2003)] se proponen aproximaciones mediante tablas a estas lógicas así como a lógicas no monótonas—. En términos clásicos, la propiedad fundamental de las tablas semánticas viene a ser un teorema de satisfacción, por el que se puede afirmar que, dado un lenguaje formal —en estos casos es habitual y más sencillo usar lenguajes sin identidad, lo que no excluye la definibilidad de tablas para el tratamiento de ésta—, un conjunto (finito) de sentencias de este lenguaje es satisfacible si y sólo si la tabla semántica que se construye a partir de tales sentencias es abierta, en el sentido de poseer, al menos, una de las sucesiones de sentencias, obtenidas mediante ciertas reglas, acabada y sin que ocurra en ella ningún par de sentencias contradictorias.

En conexión con los modelos finitos, cuando una sentencia de un lenguaje formal de primer orden es satisfacible en un dominio finito, cabría construir una tabla semántica con una de las sucesiones de sentencias totalmente consistente, si bien nada nos garantiza que esta tabla (ya sea de Beth, Smullyan o Hintikka, a las que llamaremos *estándar*) resulte acabada en un número finito de pasos. Un ejemplo lo tenemos en la sentencia $\forall x \exists y Rxy$, cuya tabla estándar tiene una única rama que se extiende indefinidamente y, sin embargo, es satisfacible en un dominio unitario. La modificación de las tablas estándar propuesta en [Boolos (1984)], [Díaz (1993)] y [Peltier (2003)], permite la construcción de una tabla en la que aparece una sucesión de sentencias acabada y abierta, a partir de la cual se pueden definir modelos mínimos de las sentencias de que se trate, aunque también aparezca una rama que se extiende indefinidamente. En el presente trabajo estudiamos cómo estas nuevas tablas constituyen una buena herramienta para trabajar con modelos cuyo dominio tiene una cardinalidad finita.

II. Estructuras finitas

L es un lenguaje sin identidad ni functores, contiene un conjunto (infinito numerable) de constantes —para referirnos a ellas se usarán las primeras letras del alfabeto con subíndices—, así como un conjunto de variables, las cuales, junto con las constantes, forman el conjunto de los términos de L, y un conjunto de signos predicativos de aridad $m \geq 1$. La sintaxis de L es la habitual para lenguajes de este tipo. En concreto, si R es un signo predicativo m–ádico, para $m \geq 1$, y $t_1, t_2,..., t_m$ son m ocurrencias de términos —puede haber repetición—, entonces $Rt_1t_2...t_m$ es una fórmula atómica; por *literal* entenderemos una fórmula atómica (literal *positivo*) o la negación de una fórmula atómica (literal *negativo*); una fórmula atómica y la negación de la misma son literales *complementarios* y decimos que forman *un par de contradicción*. Las variables pueden ocurrir *libres* o *ligadas* en una fórmula; en el segundo caso, se dice que caen bajo el alcance del cuantificador que las tiene como sufijo. Por comodidad, también usaremos L para referirnos al conjunto de las fórmulas de este lenguaje; si φ es una fórmula de L, ello lo indicaremos como $\varphi \in L$, mientras que $\Gamma \subset L$ expresa que Γ es un subconjunto (en este caso propio) de fórmulas de L. Nos interesa una clase especial de fórmulas: la de las sentencias de L, es decir, la clase de las fórmulas en las que no ocurren variables libres.

Nos ocupamos de estructuras abstractas finitas adecuadas a L, o estructuras finitas del mismo tipo que L —es decir, si L posee signos predicativos de aridad $n \geq 1$ (n puede estar limitado a cierto número natural), entonces las estructuras finitas adecuadas a L tendrán predicados y relaciones n–ádicas definidos en su universo de discurso—, para mayor simplicidad, las llamaremos *L–estructuras*. Definimos una L–estructura finita $M = \langle D,\Im\rangle$, donde $D \neq \varnothing$ y $|D| < \omega_0$, ω_0 es el cardinal del conjunto de los números naturales, e $\Im$ es la función interpretación, tal que

1. Si b es una constante de L, $\Im(b) \in D$,
2. Si R es un signo predicativo n–ádico, para $n \geq 1$,

$$\Im(R) \subseteq D^n, \text{ o, lo que es lo mismo, } \Im(R) \in P(D^n).$$

Así pues, las L–estructuras aquí consideradas son en todos los casos estructuras finitas, en el sentido de que sus universos de discurso son dominios no vacíos de cardinalidad finita. Dada una L–estructura $M = \langle D,\Im\rangle$, tal que $|D| = n < \omega_0$, por comodidad diremos que M tiene cardinal n, lo que podemos representar como $|\mathrm{M}| = n$. Dada una L–estructura M, para cada sentencia $\varphi \in L$, mediante $M(\varphi)$ representamos el valor de verdad asignado a dicha sentencia en M —es decir, un elemento del conjunto $\{0,1\}$—, lo que se define recursivamente:

1. Si φ es atómica, es decir, de la forma $Rb_1,...,b_m$, $m \geq 1$, donde R es un signo predicativo de aridad m y $b_1,...,b_m$ son m ocurrencias de constantes —puede haber repetición—, entonces $M(\varphi) = 1$ si y sólo si (en lo sucesivo, para abreviar, anotaremos frecuentemente «syss»)

$$\langle \Im(b_1),\ldots,\Im(b_m)\rangle \in \Im(R),$$

2. Si φ es $\neg\psi$, entonces $M(\varphi) = 1$ syss $M(\psi) = 0$,
3. Si φ es $\psi \vee \chi$, entonces $M(\varphi) = 1$ syss $M(\psi) = 1$ o bien $M(\chi) = 1$,
4. Si φ es $\psi \wedge \chi$, entonces $M(\varphi) = 1$ syss $M(\psi) = 1$ y $M(\chi) = 1$,
5. Si φ es $\psi \rightarrow \chi$, entonces $M(\varphi) = 1$ syss $M(\psi) = 0$ o bien $M(\chi) = 1$,
6. Si φ es $\exists x\psi$, entonces $M(\varphi) = 1$ syss existe al menos una M', que difiere de M a lo sumo en cuanto al valor asignado a la constante b por la función $\Im'$ —abreviadamente, $M' =_b M$—, de manera que $M(\psi(b/x)) = 1$ —$\psi(b/x)$ es la sentencia resultante de sustituir en la matriz ψ cada ocurrencia libre de x por la constante b, teniendo en cuenta las restricciones habituales—,
7. Si φ es $\forall x\psi$, entonces $M(\varphi) = 1$ syss para toda $M' =_b M$,

$$M'(\psi(b/x)) = 1.$$

Si una L–estructura M es tal que para la sentencia $\varphi \in L$, $M(\varphi) = 1$, entonces se dice que M satisface φ, lo que se puede expresar como $M \vDash \varphi$ —también se suele decir en este caso que M es un *modelo* de φ—. Teniendo en cuenta lo definido anteriormente, $M \vDash \varphi$ syss $M(\varphi) = 1$. Por otra parte, decimos que una sentencia $\varphi \in L$ es n–satisfacible, $\omega_0 > n \geq 1$, syss existe una L–estructura M tal que $|M| = n$ y $M \vDash \varphi$.

TEOREMA 1. Si una sentencia $\varphi \in L$ es n–satisfacible, $\omega_0 > n \geq 1$, entonces es m–satisfacible, para cada m tal que $\omega_0 > m \geq n$.

Demostración. Sean $\varphi \in L$ y $M = \langle D,\Im\rangle$, $|M| = n$, tal que $M \vDash \varphi$. Tomamos $m = n+k$ y definimos D^* de la siguiente manera:

$$D^* = D \cup \{\boldsymbol{c}_1,\ldots,\boldsymbol{c}_k\},$$

de modo que $\boldsymbol{c}_i \notin D$ para cada $i \leq k$. Definimos entonces la L–estructura $M^* = \langle D^*, \Im^*\rangle$ teniendo en cuenta que para cada constante individual b que ocurra en φ,

$$\Im^*(b) = \Im(b),$$

si b no ocurre en φ, entonces $\Im(b) \in D^*$; asimismo, para cada signo predicativo P de aridad $s \geq 1$ que ocurra en φ:

1) Si $\Im(P) \neq D^s$, entonces $\Im^*(P) = \Im(P)$;
2) Si $\Im(P) = D^s$, entonces $\Im^*(P) = (D^*)^s$.

Si P no ocurre en φ, entonces $\Im^*(P) \in P((D^*)^s)$. $|M^*| = m$ y por inducción sobre el grado de complejidad de φ, fácilmente se demuestra que $M^* \vDash \varphi$. En la base, sea φ un literal positivo, $Rb_1,...,b_s$; dado que $M \vDash \varphi$,

$$\langle \Im(b_1),...,\Im(b_s) \rangle \in \Im(R)$$

tanto si se verifica 1) como 2),

$$\langle \Im^*(b_1),...,\Im^*(b_s) \rangle \in \Im^*(R),$$

por lo que $M^* \vDash \varphi$. ■

Si una sentencia $\varphi \in L$ es tal que todas las L–estructuras la satisfacen, entonces φ es universalmente válida (en el sentido de las estructuras finitas), lo que se representa como $\vDash \varphi$. Dados $\Gamma \subset L$, un conjunto finito de sentencias de L y una sentencia $\varphi \in L$, φ es consecuencia lógica de Γ, ó Γ entraña φ —en símbolos, $\Gamma \vDash \varphi$— syss para toda L-estructura M, si $M \vDash \Gamma$ —abreviatura de «$M \vDash \psi$, para cada $\psi \in \Gamma$»—, entonces $M \vDash \varphi$. De acuerdo con esta definición, por simple contraposición, dados $\Gamma \subset L$ y $\varphi \in L$, conjunto finito de sentencias y sentencia, respectivamente, $\Gamma \nvDash \varphi$ syss existe al menos una L–estructura M tal que $M \vDash \Gamma$ pero $M \nvDash \varphi$, ó, lo que es lo mismo, $M \vDash \neg\varphi$; es decir, $\Gamma \nvDash \varphi$ syss $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es n–satisfacible, para un n finito.

Cabe estudiar una relación de consecuencia más débil, considerando una cierta cardinalidad límite de las L–estructuras correspondientes. Dados un conjunto (finito) de sentencias $\Gamma \subset L$ y la sentencia φ, decimos que φ es n–consecuencia lógica de Γ, o que Γ n–entraña φ, $\omega_0 > n \geq 1$, —en símbolos, $\Gamma \vDash_n \varphi$— syss para cada L–estructura M tal que $|M| \leq n$, si $M \vDash \Gamma$, entonces $M \vDash \varphi$. De aquí se desprende que $\Gamma \vDash_n \varphi$ syss $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ no es n–satisfacible.

III. Tablas semánticas

Adoptamos, con algunas modificaciones de notación, el procedimiento de las tablas semánticas definido en [Beth (1955)]. Ahora nos referimos a fórmulas que sean sentencias de L. Dado un conjunto finito de sentencias $\Delta \subset L$ tal que al menos una de ellas no es un literal, se define la *tabla semántica estándar* de Δ, en símbolos $T(\Delta)$, como un conjunto de sucesiones de sentencias. Cada sucesión, a la que llamaremos *rama*, parte de las sentencias de Δ y a todas aquéllas que no son literales se aplica la regla que corresponde a su clase; habiéndose generado nuevas sentencias, el proceso continúa aplicando la regla que proceda a las nuevas sentencias no literales y así sucesivamente; este proceso se detiene si aparece un par de contradicción, en cuyo caso se dice que la rama es *cerrada*, o bien cuando no queda ninguna sentencia no literal sobre la que no se haya aplicado la regla correspondiente. Todas las ramas comparten como sentencias iniciales todas las de Δ, llamada también por ello *raíz*. Una rama está *acabada* si está cerrada o no queda ninguna sentencia no literal a la que haya que aplicar la regla. Una rama acabada que no es cerrada se dice que es *abierta*. Las reglas se indican a continuación anotando sobre la línea la sentencia a la que se aplica y debajo la(s) resultante(s) o la división que se produce en ese momento, indicando la separación con la barra vertical:

1. Regla de doble negación

$$\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi};$$

2. Regla para sentencias de la clase α:

$$\frac{\varphi\wedge\psi}{\begin{array}{c}\varphi\\ \psi\end{array}}; \qquad \frac{\neg(\varphi\vee\psi)}{\begin{array}{c}\neg\varphi\\ \neg\psi\end{array}}; \qquad \frac{\neg(\varphi\rightarrow\psi)}{\begin{array}{c}\varphi\\ \neg\psi\end{array}};$$

3. Regla para sentencias de la clase β:

$$\frac{\varphi\vee\psi}{\varphi|\psi}; \qquad \frac{\neg(\varphi\wedge\psi)}{\neg\varphi|\neg\psi}; \qquad \frac{\varphi\rightarrow\psi}{\neg\varphi|\psi};$$

4. Regla para sentencias de la clase γ:

$$\frac{\forall x\varphi}{\begin{array}{c}\varphi(a_1/x)\\ \varphi(a_2/x)\\ \vdots\\ \varphi(a_n/x)\end{array}}; \qquad \frac{\neg\exists x\varphi}{\begin{array}{c}\neg\varphi(a_1/x)\\ \neg\varphi(a_2/x)\\ \vdots\\ \neg\varphi(a_n/x)\end{array}}$$

donde $\varphi(a_i/x)$ —alternativamente, $\neg\varphi(a_i/x)$— representa la instanciación de la matriz para cada constante a_i que ocurre en sentencias de la rama, $i \leq n$; si no ocurría ninguna constante, entonces se instancia con a_1. Esta regla tiene carácter retroactivo, por así decir; a diferencia de las demás, una primera aplicación no significa que se haya terminado de aplicar a la sentencia correspondiente: si cuando se va aplicar habían aparecido cierto número de constantes, se instanciará la correspondiente matriz con estas constantes —si no había ocurrido ninguna, con a_1—, pero si más tarde se introduce una nueva constante —véase la regla siguiente—, entonces hay que volver a instanciar la matriz con la constante nueva.

5. Regla para sentencias de la clase δ:

$$\frac{\exists x\varphi}{\varphi(a_{n+1}/x)} \qquad\qquad \frac{\neg\forall x\varphi}{\neg\varphi(a_{n+1}/x)};$$

donde $\varphi(a_{n+1}/x)$ —alternativamente, $\neg\varphi(a_{n+1}/x)$—, es la instanciación de la matriz para la constante a_{n+1}, habiendo ocurrido previamente en la rama las constantes $a_1, a_2, ..., a_n$, para $n \geq 1$.

Si Δ es un conjunto de sentencias, $T(\Delta)$ representa la tabla estándar de raíz Δ obtenida por aplicación de estas reglas. Así pues, las reglas se han definido de acuerdo con las clases de sentencias y si la rama que contiene al prosecuente de la regla se representa mediante Φ, tras la aplicación de la regla se representará con Φ seguido de + y de las fórmulas del postsecuente. Tendremos, en cada caso,

1. Doble negación: tras la aplicación de la regla la rama prosigue como $\Phi + \varphi$
2. Regla α: $\varphi \wedge \psi$, $\neg(\varphi \vee \psi)$, $\neg(\varphi \rightarrow \psi)$ decimos que son sentencias de tipo α y sus componentes son α_1: φ, $\neg\varphi$ y φ; y α_2: ψ,$\neg\psi$ y $\neg\psi$, respectivamente. Tras su aplicación, la rama prosigue como $\Phi + \alpha_1 + \alpha_2$
3. Regla β: $\varphi \vee \psi$, $\neg(\varphi \wedge \psi)$ y $\varphi \rightarrow \psi$ decimos que son sentencias de tipo β y sus componentes son β_1: φ, $\neg\varphi$ y $\neg\varphi$; y β_2: ψ, $\neg\psi$ y ψ, respectivamente. Tras su aplicación, la rama Φ se subdivide, resultando $\Phi + \beta_1$, de un lado, y $\Phi + \beta_2$, de otro.
4. Regla γ: sentencias de la forma $\forall x\varphi$ y $\neg\exists x\varphi$ son de tipo γ y al aplicar la regla se obtienen $\varphi(a_i/x)$ ó $\neg\varphi(a_i/x)$, para todo $i \leq n$, quedando la rama tras su aplicación, como

$$\Phi + \varphi(a_1/x) + \ldots + \varphi(a_n/x), \text{ ó } \Phi + \neg\varphi(a_1/x) + \ldots + \neg\varphi\ (a_n/x)$$

5. Regla δ: sentencias de la forma $\exists x\varphi$ y $\neg\forall x\varphi$ son de tipo δ y al aplicar la regla se obtienen $\varphi(a_{n+1}/x)$ ó $\neg\varphi(a_{n+1}/x)$, por lo que prosigue la rama como $\Phi + \varphi(a_{n+1}/x)$ ó $\Phi + \neg\varphi(a_{n+1}/x)$.

IV. TABLAS DBP Y MODELOS FINITOS

Consideramos una modificación de la regla δ y obtenemos la regla que denominaremos δ':

$$\frac{\exists x\varphi}{\varphi(a_1/x)\mid\varphi(a_2/x)\mid\ldots\mid\varphi(a_n/x)\mid\varphi(a_{n+1}/x)}$$

$$\frac{\neg\forall x\varphi}{\neg\varphi(a_1/x)\mid\neg\varphi(a_2/x)\mid\ldots\mid\neg\varphi(a_n/x)\mid\neg\varphi(a_{n+1}/x)}$$

donde $\varphi(a_i/x)$ —alternativamente, $\neg\varphi(a_i/x)$— representa la instanciación de la matriz para las constantes a_i, $i \leq n$, que ocurren en sentencias previas en la rama, mientras que a_{n+1} es una constante nueva.

$T_{DBP}(\Delta)$ representa la *DBP-tableau*, o *tabla DBP*, que tiene a las sentencias de Δ como raíz y se ha obtenido por aplicación de las reglas de doble negación, α, β, γ y δ'.

En el caso de la regla δ', la rama se subdivide en tantas ramas como constantes ocurrieran previamente más una; es decir, aparecen las siguientes ramas

$\Phi + \varphi(a_1/x)$; $\Phi + \varphi(a_2/x)$;…$\Phi + \varphi(a_n/x)$; $\Phi + \varphi(a_{n+1}/x)$ ó bien

$\Phi + \neg\varphi(a_1/x)$; $\Phi + \neg\, \varphi(a_2/x)$;…$\Phi + \neg\, \varphi(a_n/x)$; $\Phi + \neg\, \varphi(a_{n+1}/x)$

Atendiendo a la definición de las tablas, se verifica que

TEOREMA 2. Dado un conjunto finito de sentencias Δ, $T(\Delta) \subseteq T_{DBP}(\Delta)$.

Sea Δ la propia raíz, la cual es compartida por $T(\Delta)$ y $T_{DBP}(\Delta)$. Antes de que se aplique la regla δ, la(s) rama(s) de ambas tablas coinciden; sea Φ una de estas ramas, tras la aplicación de la regla δ la rama continúa como $\Phi + \varphi(a_{n+1}/x)$ ó $\Phi + \neg\varphi(a_{n+1}/x)$, según sea la cuantificación, mientras que en el caso de δ', se subdivide la rama, pero una de las ramas resultantes es precisamente $\Phi + \varphi(a_{n+1}/x)$ ó $\Phi + \neg\varphi(a_{n+1}/x)$. Este proceso se repite cada vez que se aplican dichas reglas.

Como antes se ha indicado, si Δ es un conjunto finito de sentencias de *L*, la propiedad fundamental (originariamente probada en [Beth (1955)], una adaptación aparece en [Nepomuceno (2003)]) nos viene a decir que Δ es satisfacible si y sólo si $T(\Delta)$ tiene al menos una rama abierta. A través de una rama tal, es definible una estructura interpretativa que satisface las fórmulas de la raíz; tal estructura es un modelo canónico, entendiendo por tal la *L*–estructura cuyo universo es el conjunto de las constantes que ocurren en las sentencias de la rama, para las cuales la función interpretación es una función identidad, mientras que los signos predicativos se interpretan de manera que esta *L*–estructura satisface las sentencias de la rama. Ello se establece en el siguiente lema.

LEMA 3. Si $\Gamma \subset L$ es un conjunto finito de sentencias n–satisfacible, $n < \omega_0$, entonces es definible un modelo canónico M_c tal que $|M_c| = n$ y $M_c \vDash \Gamma$.

Demostración. Dado que Γ es n–satisfacible, sea M tal que $|M| = n < \omega_0$, $M \vDash \varphi$, para cada $\varphi \in \Gamma$. El universo de discurso de M es de cardinal n, es decir,

$$D = \{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, ..., \boldsymbol{c}_n\}.$$

Tomamos las n primeras constantes como nuevo universo de discurso

$$D_c = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$$

y definimos $g{:}D \mapsto D_c$, siendo $g(\boldsymbol{c}_i) = a_i$, para cada $i \leq n$; además, definimos $\Im_c$ tal que

$$\Im_c(a_i) = g(\boldsymbol{c}_i) = a_i,$$

para cada $i \leq n$, y cada signo predicativo R de aridad m ≤ 1,

$$\Im_c(R) = \left\{ \langle g(\boldsymbol{c}_{i_1}), ..., g(\boldsymbol{c}_{i_m}) \rangle \in D_c^m : \langle \boldsymbol{c}_{i_1}, ..., \boldsymbol{c}_{i_m} \rangle \in \Im(R) \right\}.$$

(las constantes y signos predicativos que no ocurren en sentencias de Γ se interpretan con valor constante, resultando irrelevantes para la demostración).

Ahora $M_c = \langle D_c, \Im_c \rangle$ y para cada $\varphi \in \Gamma$, $M_c \vDash \varphi$. En efecto, sea φ una sentencia atómica, es decir de la forma $Rb_1...b_m$ y $M \vDash Rb_1...b_m$; en tal caso, sea $\Im(b_j) = c_{i_j} \in D$, para cada $j \leq m$; por la definición de g, se verifica que $\langle g(c_{i_1}), \ldots, g(c_{i_m}) \rangle \in \Im_c(R)$, pero

$$\langle g(\boldsymbol{c}_{i_1}), \ldots, g(\boldsymbol{c}_{i_m}) \rangle = \langle \Im_c(g(\boldsymbol{c}_{i_1})), \ldots, \Im_c(g(\boldsymbol{c}_{i_m})) \rangle = \langle b_1, \ldots, b_m \rangle$$

por lo que $M_c \vDash Rb_1...b_m$. Prosiguiendo por inducción sobre el grado de complejidad de φ se concluye la demostración, lo que omitimos para abreviar. ■

COROLARIO 4. $\Gamma \subset L$ es un conjunto finito de sentencias n–satisfacible, $n < \omega_0$,, entonces es definible un modelo canónico M_c tal que $|M_c| = n$ y $M_c \vDash \Gamma$, para cada $m \geq n$.

Demostración. Consecuencia del Teorema 1 y el Lema 3. ■

Nos referiremos ahora a las tablas *DBP*, desde las cuales también es definible un modelo canónico cuyo universo es de cierta cardinalidad. Previamente convenimos en denominar *peso* de una rama al número de constantes que ocurren en sentencias de la misma; así, si en una rama ocurren las constantes a_1, ..., a_n, para $n \geq 1$, su peso es n.

LEMA 5. Sea $\Gamma \subset L$ un conjunto finito de sentencias; si $T_{DBP}(\Gamma)$ posee una rama abierta acabada Φ de peso $n < \omega_0$, entonces es definible un modelo canónico M_c tal que $|M_c| = n$ y $M_c \vDash \Gamma$.

Demostración. Sea Φ la rama abierta acabada de peso $n < \omega_0$. Definimos los siguientes conjuntos de sentencias:

1) B_0 es el conjunto de todos los literales de Φ;
2) para cada $m \geq 1$, B_{m+1} es el más pequeño conjunto de sentencias que verifica

i) si $\varphi \in B_m$, entonces $\neg\neg\,\varphi \in B_{m+1}$,
ii) si $\alpha_1,\alpha_2 \in B_m$ y son componentes de una sentencia φ del tipo α, entonces $\varphi \in B_{m+1}$,
iii) si $\beta_1 \in B_m$ o bien $\beta_2 \in B_m$ y son componentes de una sentencia φ de tipo β, entonces $\varphi \in B_{m+1}$,
iv) si $\varphi(a_i/x) \in B_m$ —ó $\neg\varphi(a_i/x) \in B_m$— para todo $i \leq n$, entonces

$$\forall x\varphi \in B_{m+1} \text{ —ó } \neg\exists x\varphi \in B_{m+1}\text{—}$$

v) si $\varphi(a_i/x) \in B_m$ —ó $\neg\varphi(a_i/x) \in B_m$— para algún $i \leq n$, entonces

$$\exists x\varphi \in B_{m+1} \text{ —ó } \neg\forall x\varphi \in B_{m+1}\text{—}$$

Sea $B = \bigcup B_i$ por construcción, si $\varphi \in \Phi$, $\varphi \in B$. Definimos entonces un modelo canónico: $M_c = \langle D,\Im\rangle$ tal que

$$D = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$$

—todas las constantes de la rama Φ—; $\Im(a_i) = a_i$, para toda $i \leq n$ (para las demás constantes, a_j, $j > n$ basta que $\Im(a_j) = a_k$, $k \leq n$); además, para cada predicado k–ádico R, $k \geq 1$, que ocurra en la rama

$$\langle b_1,...,b_k\rangle \in \Im(R) \text{ syss } Rb_1...b_k \in B_0$$

(si S es un signo predicativo, de cualquier aridad, que no ocurre en la rama, basta con que $\Im(S) = \varnothing$). Por inducción sobre las cláusulas definitorias de B, veamos que para toda $\varphi \in B$, $M_c \vDash \varphi$:
1) φ es el literal $Rb_1...b_k$; dado que $\varphi \in B_0$, por definición

$$\langle b_1...b_k\rangle \in \Im(R);$$

luego $M_c \vDash \varphi$,

2) Hipótesis de inducción: para cada sentencia $\psi \in B_m$, $M_c \vDash \psi$. Hemos de probar que M_c satisface también las sentencias de B_{m+1}, de acuerdo con las cláusulas que definen B_{m+1}:

2.i) $\neg\neg\varphi \in B_{m+1}$, siendo $\varphi \in B_m$; $M_c \vDash \varphi$, por evaluación de $\neg$, $M_c \nvDash \neg\varphi$, por lo que $M_c \vDash \neg\neg\varphi$,
2.ii) $\varphi \in B_{m+1}$, es de tipo α, sus componentes

$$\alpha_1 \in B_m \text{ y } \alpha_2 \in B_m,\ M_c \vDash \alpha_1 \text{ y } M_c \vDash \alpha_2.$$

Entonces, φ es de la forma $\psi \wedge \chi$, en cuyo caso, como

$$M_c \vDash \psi \text{ y } M_c \vDash \chi, \text{ entonces } M_c \vDash \psi \wedge \chi;$$

ó bien φ es $\neg(\psi \vee \chi)$, entonces por hipótesis $M_c \vDash \neg\psi$ y $M_c \vDash \neg\chi$, por lo que $M_c \vDash \neg\psi \wedge \neg\chi$, de donde $M_c \vDash \neg(\psi \vee \chi)$; ó bien

$$\varphi \text{ es } \neg(\psi \to \chi), \text{ y por hipótesis } M_c \vDash \psi \text{ y } M_c \vDash \neg\chi,$$

por lo que $M_c \vDash \psi \wedge\neg\chi$, $M_c \vDash \neg(\psi \to \chi)$,
2.iii) $\varphi \in B_{m+1}$, es de tipo β, sus componentes β_1 y β_2, de manera que

$$\beta_1 \in B_m \text{ ó } \beta_2 \in B_m, \text{ y por hipótesis } M_c \vDash \beta_1 \text{ ó } M_c \vDash \beta_2.$$

Entonces, φ es de la forma $\psi \vee \chi$, en cuyo caso, como

$$M_c \vDash \psi \text{ ó } M_c \vDash \chi, \text{ entonces } M_c \vDash \psi \vee \chi;$$

ó bien φ es $\neg(\varphi \wedge \chi)$, por hipótesis $M_c \vDash \neg\psi$ ó $M_c \vDash \neg\chi$, por lo que $M_c \vDash \neg\psi \vee \neg\chi$, de donde $M_c \vDash\neg(\psi \wedge \chi)$; ó bien

$$\varphi \text{ es } \psi \to \chi, \text{ por hipótesis } M_c \vDash \neg\psi \text{ o } M_c \vDash\chi,$$

por lo que $M_c \vDash \neg\psi \vee \chi$, de donde $M_c \vDash \psi \to \chi$,
2.iv) $\forall x\varphi \in B_{m+1}$, $\varphi(a_i/x) \in B_m$ —ó $\neg\varphi(a_i/x) \in B_m$—, por hipótesis $M_c \vDash \varphi(a_i/x)$, para todo $i \leq n$. Entonces, por evaluación de $\forall$,

$$M_c \vDash \forall x\varphi \text{ —ó } M_c \vDash \neg\exists x\varphi\text{—},$$

2.v) $\exists x\varphi \in B_{m+1}$, $\varphi(a_i/x) \in B_m$ —ó $\neg\varphi(a_i/x) \in B_m$—, por hipótesis $M_c \vDash \varphi(a_i/x)$, para algún $i \leq n$. Entonces, por evaluación de $\exists$,

$$M_c \vDash \exists x\varphi \text{ —ó } M_c \vDash \neg\forall x\varphi\text{—}$$

Así pues, para todo $j \geq 1$, si $\varphi \in B_j$, entonces $M_c \vDash \varphi$, pero $B = \bigcup B_j$, por lo que

$$\text{si } \varphi \in B, \text{ entonces } M_c \vDash \varphi.$$

Pero $\Phi \subseteq B$, y Γ es la raíz de Φ, luego $M_c \vDash \Gamma$. ■

Dada una rama acabada y abierta Φ de una tabla (estándar o *DBP*), una ampliación de Φ mediante una sentencia no literal ψ es una rama acabada de la tabla correspondiente de raíz $\Phi \cup \{\psi\}$. Una ampliación Φ' tendrá la forma

$$\Phi' = \Phi + \psi + \rho_1 + \ldots + \rho_k,$$

$k \geq 0$, donde ρ_1 se obtiene por aplicación de las reglas correspondientes a ψ y, en su caso, a sentencias no literales de Φ, y ρ_i, por aplicación de las reglas a sentencias precedentes no literales, para $1 < i \leq k$.

LEMA 6. Sea $\Gamma \subset \mathrm{L}$ un conjunto finito de sentencias. Si M es una L–estructura tal que $\mathrm{M} \vDash \Gamma$ y $|\mathrm{M}| = n < \omega_0$, entonces $\mathrm{T_{DBP}}(\Gamma)$ posee una rama acabada abierta Φ de peso n, o se obtiene una ampliación consistente Φ' de peso n.

Demostración. Sea $\Gamma \subset L$ y M de cardinal $n < \omega_0$ tal que $M \vDash \Gamma$. De acuerdo con el lema anterior, podemos definir M_c tal que

$$M_c \vDash \Gamma \text{ y } D_c = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$$

Sea Φ_1 la raíz de la $T_{DBP}(\Gamma)$, de manera que por hipótesis, $M_c \vDash \varphi$ para cada $\varphi \in \Phi_1$. Hacemos un recorrido por las reglas, tomando como hipótesis que M_c satisface la fórmula a la cual se va aplicar la regla correspondiente:

1) φ es $\neg\neg\eta$; de acuerdo con la evaluación de $\neg$, $M_c \nvDash \neg\eta$, luego $M_c \vDash \eta$;
2) φ es una α–sentencia; naturalmente, si sus componentes son α_1, α_2,

$$M_c \vDash \alpha_1 \text{ y } M_c \vDash \alpha_2;$$

3) φ es una β–sentencia y sus componentes β_1 y β_2; en tal caso, $M_c \vDash \beta_1$ ó bien $M_c \vDash \beta_2$
4) si φ es una γ–sentencia, $\forall x\psi$ $(\neg\exists x\psi)$, entonces

$$M_c \vDash \psi(a_i/x)\ (\neg\psi(a_i/x))$$

para cada $i \leq n$;
5) si φ es una δ–sentencia, $\exists x\psi$ $(\neg\forall x\psi)$, entonces

$$M_c \vDash \psi(a_i/x)\ (\neg\psi(a_i/x))$$

para algún $i \leq n$.

Así pues, las reglas son correctas y cada aplicación da lugar a nuevas fórmulas a las que satisface M_c. Nótese que en el caso de la regla δ', para las sentencias de la clase δ, se produce alguna rama abierta, dada la evaluación de $\exists$. En el caso de que en la rama no exista ninguna sentencia de la clase δ, se toma una sentencia sin cuantificadores ψ tal que $M \vDash \psi$, en la que ocurre una constante a_k y se amplía la rama con la sentencia $\exists x\psi(x/a_k)$; naturalmente, puesto que $M_c \vDash \psi$, por la evaluación de $\exists$, también $M_c \vDash \exists x\psi(x/a_k)$. Si la rama acabara (quedando abierta) y las constantes que ocurren en ella son $a_1,\ldots,a_m$, para $m < n$, se procede a una ampliación, como en el caso anterior, con $\exists x\psi(x/a_k)$, siendo ψ una sentencia de la rama sin cuantificadores y en la que ocurre a_k, para $k \leq m$, hasta conseguir que tenga peso n. Así pues, por existir en la rama sentencias de la clase δ o por alguna ampliación en la forma indicada, se obtienen ramas de peso n por aplicación de δ', las cuales son acabadas y abiertas—si no acaba una rama, su peso sería mayor que n, pues habría que operar sobre fórmulas de la clase γ o de la clase δ—. Supongamos ahora que todas las ramas de peso n fueran cerradas; el modelo M_c definido ha de satisfacer alguna de las sentencias que encabezan las nuevas ramas producto de aplicar la regla δ', de manera que, iterando el proceso, M_c satisface todas las sentencias de al menos una de las ramas de peso n, es decir, M_c ha de satisfacer dos literales complementarios, dado el supuesto de que todas las ramas de este peso eran cerradas, lo cual es absurdo. En consecuencia, al menos una rama de peso n es abierta.

TEOREMA 7. Un conjunto finito de sentencias $\Gamma \subset L$ es n–satisfacible syss $T_{DBP}(\Gamma)$ tiene una rama acabada abierta de peso n, $\omega_0 > n \geq 1$.

Demostración. Consecuencia de los lemas 5 y 6. ■

V. CONSIDERACIONES FINALES

Las tablas *DBP* permiten establecer que, dados el conjunto finito de sentencias Γ y la sentencia φ, si $T_{DBP}(\Gamma \cup \{\neg\varphi\})$ posee una rama acabada abierta de peso n tal que $\omega_0 > n \geq 1$, entonces $\Gamma \nvDash \varphi$. En efecto, si encontramos una rama tal, entonces es definible un modelo canónico que satisface todas las sentencias de la misma, con lo que la raíz inicial es satisfacible, ya que es definible un modelo canónico de cardinalidad n (en este caso, finita) que satisface todas las sentencias de la rama.

Naturalmente, el problema de la semidecidibilidad de la lógica de primer orden no se resuelve porque se haga uso de estas tablas. De hecho, podría suceder, siguiendo con el ejemplo, que no aparezca ninguna rama acabada abierta de peso $k \geq 1$, pero ¿Se hallará alguna con estas características y de peso $m > k$? Únicamente cabe conjeturar que, si para un peso k arbitrariamente grande no se ha obtenido ninguna rama acabada abierta, no habrá ninguna que sea tal y de peso finito, con lo que es probable que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ no sea finitamente satisfacible y, en consecuencia, sea aceptable (provisionalmente) la mencionada relación de consecuencia lógica. Sea φ la siguiente sentencia

$$\forall xyz \exists u(\neg Rxx \wedge Rxu \wedge (Rxy \wedge Ryz \rightarrow Rxz)).$$

En este caso la $T_{DBP}(\varphi)$ no posee, en efecto, ninguna rama acabada abierta de peso finito, aunque una rama Φ se extiende indefinidamente, rama que comparte con $T(\varphi)$; dado que representa una relación de orden parcial sin elemento máximo, se trata de una sentencia satisfacible, pero no finitamente satisfacible.

Determinadas clases de sentencias poseen la propiedad de modelos finitos. En el caso de nuestro lenguaje *L*, entre otras, poseen esta propiedad las sentencias que tienen un prefijo de la forma $\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \ldots \exists x_n$, para $n \geq 3$, lo que podemos abreviar como la clase $[\forall^2 \exists^*]$, indicando '*' un número (natural) de $\exists$; es decir, si $\varphi \in [\forall^2 \exists^*]$ y es satisfacible, entonces existe una *L*–estructura *M* tal que $|M| < \omega_0$ y $M \vDash \varphi$. Respecto de las sentencias de esta clase, las tablas *DBP* constituyen un método de verificación de dicha propiedad, proporcionando, en su caso, modelos mínimos.

Se pueden estudiar aplicaciones en el ámbito de estudios lingüísticos, en concreto en la generación de modelos mínimos para la teoría de la representación del discurso, o para el estudio de problemas abductivos no tratables con los métodos clásicos. No obstante, ello excede los límites propios de este trabajo.**

Departamento de Filosofía, Lógica y Filosofía de la Ciencia
Universidad de Sevilla
Calle Camilo José Cela s/n. 41018 Sevilla
E–mail: nepomuce@us.es

NOTAS

* Este trabajo se ha realizado en el marco del Proyecto de Investigación HUM2004-01255 del Ministerio de Educación y Ciencia.

** Hemos de agradecer al/a la *referee* de **teorema** sus comentarios y sugerencias, lo que ha permitido la mejora del texto.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

D'AGOSTINO, M.; GABBAY, D.M.; HÄHNLE, y R.; POSEGGA, J. (1999), *Handbook of Tableau Methods*, Dordrecth/Boston/Londres, Kluwer Academic Press.

BETH, E.V. (1955), «Semantic Entailment and Formal Derivability», en Hintikka, J. (1969), *The Philosophy of Mathematics*, Londres, Oxford University Press, pp. 9-41.

BOOLOS, G. (1984), «Trees and Finite Satisfacibility», *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 25, pp.110-115.

DÍAZ, E. (1993), «Árboles semánticos y modelos mínimos». *Actas del I Congreso de la Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia en España*. Madrid, pp. 40-43.

EBBINGHAUS, H.D. y FLUM, G. (1999), *Finite Model Theory*, Berlín, Heidelberg, Nueva York, Springer-Verlag.

NEPOMUCENO, A. (2003), *El método de las tablas semánticas*, Sevilla, editorial Kronos.

PELTIER, N. (2003), «A More Efficient Tableaux Procedures for Simultaneous Search for Refutations and Finite Models», en TABLEAUX'03, *International Conference on Automated Reasoning with Analytic Tableaux and Related Methods*, Springer, LNAI 2003 (Roma, Italy). Texto completo disponible en http://www-leibniz.imag.fr/perso/27/peltier/public_html, pp. 1-20.