TEOREMA DE SCHRÖDER-BERNSTEIN

Antonio González Carlomán

3.- Teorema de Schröder-Bernstein

Si existen las aplicaciones inyectivas $\varphi: E \rightarrow E'$ y $\varphi': E' \rightarrow E$, entonces existe una biyección $\beta: E \rightarrow E'$

Puesto que:

Serían unívocas (aparte de inyectivas y suprayectivas) las correspondencias de $\varphi^{-1} \subseteq E' \times E$, $\varphi'^{-1} \subseteq E \times E'$ y también lo serían todas las correspondencias de E(E') en E(E') (A.I-VI -7.10, 7.11, 7.12) pertenecientes a la familia F(F') definida recursivamente de la siguiente manera:

$\delta'(x') = (\delta'(y') \Rightarrow x' = y'$

Demostración:

$\delta'(x') = \delta'(y') \Rightarrow \varphi'(x') = \varphi'(y') \Rightarrow x' = y'$

4.b.- La aplicación $\delta: D \rightarrow D'$ tal que $\delta = \delta'^{-1}$, es biyectiva

Ya que:

Es la recíproca de $\delta': D' \rightarrow D$

5.- La correspondencia $\beta \subseteq E \times E'$ en que $\beta = \alpha \cup \gamma \cup \delta$ es una biyección.

En efecto:

Es consecuencia de 1-, 2.a, 3.a y 4.b según A.I-VI-9.12.8

En adelante convenimos en representar abreviadamente el teorema de Schöder-Bernstein de la siguiente manera:

$E \preccurlyeq E' \wedge E' \preccurlyeq E \Rightarrow E \cong E'$

significando:

$E \preccurlyeq E'$ (existe una aplicación inyectiva de E en E')

$E' \preccurlyeq E$ (existe una aplicación inyectiva de E' en E)

$E \cong E'$ (existe una aplicación biyectiva de E en E')

Siendo A y B conjuntos cualesquiera, convenimos también que - $A \prec B$ (léase A estríctamente inyectivo a B) represente a la expresion $A \preccurlyeq B \wedge A \not\cong B$

* Las citas indicadas por A.I, se refieren al libro "Lenguaje Matemático (Algebra I)" editado por el Servicio de Publicaciones de la Universidad de Oviedo.

1º.- Es suprayectiva

$x' \in A' \Rightarrow \exists_x (\alpha(x) = x')$

Demostración:

$$x' \in A' \Rightarrow \forall_{h' \in H'} (h'(\{x'\}) \neq \emptyset) \Rightarrow \forall_{h \in H} ((\varphi^{-1} . h)(\{x'\}) \neq \emptyset) \Rightarrow \forall_{h \in H} (h(\varphi^{-1}(\{x'\})) \neq \emptyset$$
$$\overset{1}{\Rightarrow} \exists_x (\{x\} = \varphi^{-1}(\{x'\})) \overset{2}{\Rightarrow} \exists_x (\varphi(x) = x') \Rightarrow \exists_x (\alpha(x) = x')$$

1. Por ser $\varphi^{-1}(\{x'\}) \neq \emptyset$ y φ^{-1} unívoca
2. Por A.I-VI-4

2º Es inyectiva

$\alpha(x) = \alpha(y) \Rightarrow x = y$

Demostración:

$\alpha(x) = \alpha(y) \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow x = y$

3- $x \in C \Rightarrow \varphi(x) \in C'$

En efecto:

$$x\in C\Rightarrow\exists_{h\in F}(h(\{x\})\neq\emptyset \wedge(h.\varphi'^{-1}(\{x\})=\emptyset)\Rightarrow\exists_{h\in F}((\varphi.\varphi^{-1}.h)(\{x\})\neq \emptyset \wedge(\varphi.\varphi^{-1}.h.\varphi'^{-1})(\{x\})=\emptyset)\Rightarrow\exists_{h\in F}((\varphi^{-1}.h)(\varphi(\{x\}))\neq \emptyset \wedge(\varphi^{-1}.h.\varphi'^{-1})(\varphi(\{x\}))=\emptyset\Rightarrow\exists_{h'\in G'}(h'(\{\varphi(x)\})\neq\emptyset\wedge(h'.\varphi'^{-1})(\{\varphi(x)\})=\emptyset)\Rightarrow \varphi(x)\in C'$$

3.a.- La aplicación $\gamma:C\rightarrow C'$ tal que $x\in C\Rightarrow \gamma(x)=\varphi(x)$ es biyectiva

Ya que:

1º.- Es suprayectiva

$x'\in C' \Rightarrow\exists_x(\gamma(x)=x')$

Demostración:

$$x'\in C'\Rightarrow\exists_{h'\in G'}(h'(\{x'\})\neq\emptyset \wedge(h'.\varphi'^{-1})(\{x'\})=\emptyset)\Rightarrow \exists_{h\in F}((\varphi^{-1}.h)(\{x'\})\neq\emptyset \wedge(\varphi^{-1}.h.\varphi'^{-1})(\{x'\})=\emptyset)\Rightarrow\exists_{h\in F}(h(\varphi^{-1}(\{x'\}))\neq\emptyset\wedge(h.\varphi'^{-1})(\varphi^{-1}(\{x'\}))=\emptyset)\Rightarrow\exists_x(\{x\}=\varphi^{-1}(\{x'\}))\Rightarrow\exists_x(\varphi(x)=x')\Rightarrow\exists_x(\gamma(x)=x')$$

2º.- Es inyectiva

$\gamma(x)=\gamma(y)\Rightarrow x=y$

Demostración:

$\gamma(x)=\gamma(y)\Rightarrow \varphi(x)=\varphi(y)\Rightarrow x=y$

4.- $x'\in D'\Rightarrow \varphi'(x')\in D$

En efecto:

$$x'\in D'\Rightarrow\exists_{h'\in F'}(h'(\{x'\})\neq \emptyset \wedge(h'.\varphi^{-1})(\{x'\})=\emptyset)\Rightarrow\exists_{h'\in F'}((\varphi'.\varphi'^{-1}.h')(\{x'\})\neq\emptyset\wedge(\varphi'.\varphi'^{-1}.h'.\varphi^{-1})(\{x'\})=\emptyset)\Rightarrow\exists_{h'\in F'}(\varphi'^{-1}.h')(\varphi'(\{x'\})\neq\emptyset\wedge(\varphi'^{-1}.h'.\varphi^{-1})(\varphi'(\{x'\}))=\emptyset)\Rightarrow\exists_{h\in G}(h(\{\varphi'(x')\})\neq\emptyset \wedge (h.\varphi^{-1})(\{\varphi'(x')\})=\emptyset)\Rightarrow \varphi'(x')\in D$$

4.a.- La aplicación δ': $D'\rightarrow D$ tal que $x'\in D'\Rightarrow\delta'(x')=\varphi'(x')$ es biyectiva

Ya que:

1º.- Es suprayectiva

$x\in D\Rightarrow\exists_{x'}(\delta'(x')=x)$

Demostración:

$x\in D\Rightarrow\exists_{h\in G}(h(\{x\})\neq\emptyset\wedge(h.\varphi^{-1})(\{x\})=\emptyset)\Rightarrow\exists_{h'\in F'}((\varphi'^{-1}.h')(\{x\})\neq\emptyset\ \wedge(\varphi'^{-1}.h'.\varphi^{-1})(\{x\})=\emptyset)\Rightarrow\exists_{h'\in F'}(h'(\varphi'^{-1}(\{x\}))\neq\emptyset\wedge(h'.\varphi^{-1})(\varphi'^{-1}(\{x\}))=\emptyset)\Rightarrow$
$\exists_{x'}(\{x'\}=\varphi'^{-1}(\{x\})\Rightarrow\exists_{x'}(\varphi'(x')=x)\Rightarrow\exists_{x'}(\delta'(x')=x)$

2º Es inyectiva

$C'\cap D'=\emptyset$ se demostraría de la misma manera

2º.- $E=A\cup B$ $(E'=A'\cup B')$ y $A\cap B=\emptyset$ $(A'\cap B'=\emptyset)$

Demostración:

a) $E=A\cup B$ $(E'=A'\cup B')$

Ya que:

$x\in E\Leftrightarrow\neg\ \exists_{h\in H}\ (h(\{x\})=\emptyset)\ \vee\ \exists_{h\in H}(h(\{x\})=\emptyset)\Leftrightarrow\forall_{h\in H}(h(\{x\})\neq\emptyset)\vee\exists_{h\in H}(h(\{x\})=\emptyset)\Leftrightarrow\ x\in A\vee x\in B\Leftrightarrow x\in A\cup B$

$E'=A'\cup B'$ se demostraría de la misma manera

b) $A\cap B=\emptyset$

Ya que:

$x\in A\cap B\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in B\Leftrightarrow\forall_{h\in H}(h(\{x\})\neq\emptyset)\wedge\exists_{h\in H}(h(\{x\})=\emptyset)\Leftrightarrow\neg\ \exists_{h\in H}(h(\{x\})=\emptyset)\wedge\exists_{h\in H}(h(\{x\})=\emptyset)\Leftrightarrow x\in\emptyset$

$A'\cap B'=\emptyset$ se demostraria de la misma manera

2- $x\in A\Rightarrow\varphi\ (x)\in A'$

En efecto:

$x\in A\Rightarrow \forall_{h\in H}(h(\{x\})\neq\emptyset)\overset{1}{\Rightarrow}\forall_{h\in H}((\varphi.\varphi^{-1}.h)(\{x\})\neq\emptyset)\Rightarrow\forall_{h\in H}((\varphi^{-1}.h)(\varphi(\{x\}))\neq\emptyset)$
$\overset{2}{\Rightarrow}\forall_{h'\in H'}(h'(\{\varphi(x)\})\neq\emptyset)\Rightarrow \varphi(x)\in A'$

1.- Por ser $\varphi.\varphi^{-1}=I_E$(A.I-VI-7.4, 7.7)
2.- Si $h'=I_{E'}$ es evidente, y si h recorre H desde I_E entonces h' recorre H' desde $\varphi^{-1}(\{\varphi^{-1}\}.F=G', \{\varphi^{-1}\}.G=F'-\{I_{E'}\})$

2.a.- La aplicación α: $A\to A'$ tal que $x\in A\Rightarrow\alpha(x)=\varphi(x)$ es biyectiva

Ya que:

En efecto:

1º- $B=C\cup D$ ($B'=C'\cup D'$) y $C\cap D=\emptyset$ ($C'\cap D'=\emptyset$)

Demostración:

a) $B=C\cup D$ ($B'=C'\cup D'$)

Ya que:

$x\in B\Leftrightarrow\exists_{h\in H}(h(\{x\})=\emptyset)\overset{1}{\Leftrightarrow}\exists_{h\in H}(h(\{x\})\neq\emptyset)\wedge\exists_{h\in H}(h\{x\}=\emptyset)\overset{2}{\Leftrightarrow}\exists_{h\in F}(h(\{x\})\neq\emptyset$ - $\wedge(h.\varphi'^{-1})(\{x\})=\emptyset)\vee\exists_{h\in G}(h(\{x\})\neq\emptyset\wedge(h.\varphi^{-1})(\{x\})=\emptyset)\Leftrightarrow x\in C\vee x\in D\Leftrightarrow$ - $x\in C\cup D$

1. La correspondencia $I_E\in H$ y además $I_E(\{x\})=\{x\}\neq\emptyset$

2.- Si ordenamos H comenzando por I_E, siguiendo con φ'^{-1} y las si-- guientes atendiendo al número de los factores; si llamamos h a la - última de estas correspondencias tal que $h(\{x\})\neq\emptyset$, entonces la pri- mera cuya imagen de $\{x\}$ es el conjunto vacío sería del tipo $h.\varphi'^{-1}$ si $h\in F$ o del tipo $h.\varphi^{-1}$ si $h\in G$

$B'=C'\cup D'$ se demostraría dela misma manera

b) $C\cap D=\emptyset$ ($C'\cap D'=\emptyset$)

Ya que:

$x\in C\cap D\Leftrightarrow x\in C\wedge x\in D\Leftrightarrow\exists_{h\in F}(h(\{x\})\neq\emptyset\wedge(h.\varphi'^{-1})(\{x\})=\emptyset)\wedge\exists_{h\in G}(h(\{x\})\neq\emptyset\wedge$ -- $(h.\varphi^{-1})(\{x\})=\emptyset)\overset{1}{\Leftrightarrow}x\in\emptyset$

1.- Por ser falsa la conjunción de existenciales, pues si se cumple uno sería falso el otro

1º.- $I_E \in F$ $(I_{E'} \in F')$

2º.- $f \in F \Rightarrow f.\varphi'^{-1}.\varphi^{-1} \in F$ $(f' \in F' \Rightarrow f'.\varphi^{-1}.\varphi'^{-1} \in F')$

También serían unívocas las correspondencias de E(E´) en E´(E) pertenecientes a la familia $G = F.\{\varphi'^{-1}\}$ $(G' = F'.\{\varphi^{-1}\})$ (A.I-VIII-6.2)

Resumiendo:

$F = \{I_E, \varphi'^{-1}.\varphi^{-1}, \varphi'^{-1}.\varphi^{-1}.\varphi'^{-1}.\varphi^{-1}, \ldots\}$ $(F' = \{I_{E'}, \varphi^{-1}.\varphi'^{-1}, \varphi^{-1}.\varphi'^{-1}.\varphi^{-1}.\varphi'^{-1}, \ldots\})$

Además de la correspondencia identidad en E(E´), pertenecen a F (F´) todos los productos alternativos por φ'^{-1} y φ^{-1} (φ^{-1} y φ'^{-1}) con número par de factores que empiezan con φ'^{-1}(φ^{-1}) y acaban con φ^{-1}(φ'^{-1})

$G = \{\varphi'^{-1}, \varphi'^{-1}.\varphi^{-1}.\varphi'^{-1}, \varphi'^{-1}.\varphi^{-1}.\varphi'^{-1}.\varphi^{-1}.\varphi'^{-1}, \ldots\}$ $(G' = \{\varphi^{-1}, \varphi^{-1}.\varphi'^{-1}.\varphi^{-1}, \varphi^{-1}.\varphi'^{-1}.\varphi^{-1}.\varphi'^{-1}.\varphi^{-1}, \ldots\})$

Además de la correspondencia φ'^{-1}(φ^{-1}) pertenecen a G(G´) todos los productos alternativos por φ'^{-1} y φ^{-1} (φ^{-1} y φ'^{-1}) con número impar de factores que empiezan con φ'^{-1}(φ^{-1}) y acaban con φ'^{-1}(φ^{-1})

Si $H = F \cup G$ $(H' = F' \cup G')$ y consideramos los subconjuntos de E(E´)

$A = \{x \mid \forall_{h \in H}(h(\{x\}) \neq \emptyset)\}$ - $(A' = \{x' \mid \forall_{h' \in H'}(h'(\{x'\}) \neq \emptyset)\})$

$B = \{x \mid \exists_{h \in H}(h(\{x\}) = \emptyset)\}$ - $(B' = \{x' \mid \exists_{h' \in H'}(h'(\{x'\}) = \emptyset)\})$

$C = \{x \mid \exists_{h \in F}(h(\{x\}) \neq \emptyset \wedge (h.\varphi'^{-1})(\{x\}) = \emptyset)\}$ - $(C' = \{x' \mid \exists_{h' \in G'}(h'(\{x'\}) \neq \emptyset \wedge (h'.\varphi'^{-1})(\{x'\}) = \emptyset)\})$

$D = \{x \mid \exists_{h \in G}(h(\{x\}) \neq \emptyset \wedge (h.\varphi^{-1})(\{x\}) = \emptyset)\}$ - $(D' = \{x' \mid \exists_{h' \in F'}(h'(\{x'\}) \neq \emptyset \wedge (h'.\varphi^{-1})(\{x'\}) = \emptyset)\})$

lo demostraríamos haciendo los siguientes pasos:

1.- Los conjuntos A,C,D (A´,C´,D´) definen una participación en E(E´) (A.I-X-23.2)