Una Aproximación Operativa al Diagnóstico y la Evaluación de la Comprensión del Conocimiento Matemático

Jesús Gallardo y José Luis González

La comprensión del conocimiento matemático constituye un objeto de investigación de interés creciente en educación matemática. No obstante, su elevada complejidad hace que los avances más recientes aún resulten insuficientes y reclama la necesidad de ir adoptando enfoques más operativos y menos preocupados por el estudio directo de sus aspectos internos. En tal sentido, se presentan aquí las bases de una aproximación centrada en los efectos observables de la comprensión, que utiliza el análisis de comportamientos y respuestas adaptadas a situaciones expresamente planificadas derivadas del análisis fenómeno-epistemológico del conocimiento matemático. La operatividad de la propuesta se ilustra con el estudio realizado sobre el algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales.

Términos clave: comprensión, evaluación, metodología, análisis fenómeno-epistemológico, multiplicación.

Understanding mathematics has recently became a research topic of increasing interest in mathematics education. However, its high complexity makes to be insufficient the most recent advances and demands to be adopted more operative and less interested about its internal properties approaches. Therefore, the principles of an approach based on the observable effects of understanding mathematics are exposed here, one of which refers to the individual behaviours and answers analysis when facing to specifically prepared situations derived from the phenomenon-epistemological analysis of concrete mathematical knowledge. The operativity of the proposal is also illustrated with some examples related to a study we have carried out on understanding the written standard algorithm for the multiplication of natural numbers.

Keywords: understanding, assessment, methodology, phenomenon-epistemological analysis, multiplication.

Gallardo, J. y González, J. L. (2006). Una aproximación operativa al diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. *PNA*, *1*(1), 21-31.

En los últimos años se ha venido incrementando el interés por desarrollar una enseñanza de la matemática que favorezca la comprensión. Algunos autores (Hiebert, Carpenter, Fennema, Fuson, Wearne, Murray, et al., 1997) asumen, incluso, que la comprensión debería ser el objetivo fundamental de la Educación Matemática, lo que ha dado lugar a programas de enseñanza experimentales (Carpenter, Fennema, Fuson, Hiebert, Human, Murray, et al., 1999) y proyectos curriculares orientados a garantizar un aprendizaje comprensivo (Goñi, 2000).

La preocupación por la comprensión alcanza también a la investigación en didáctica de la matemática, influyendo en su contenido y desarrollo (Hiebert y Carpenter, 1992) así como en el interés y orientación de algunos autores (Koyama, 1993; Sierpinska, 1994; Pirie y Kieren, 1994; Romero, 2000; Godino, 2000). En la actualidad, el carácter multidimensional de la comprensión sigue provocando que su estudio resulte una tarea altamente compleja y un condicionante para los distintos trabajos en curso.

A pesar de las dificultades, venimos trabajando sobre una aproximación indirecta, menos teórica que las existentes, integradora, basada en la observación cuidadosa de comportamientos relevantes ante situaciones especialmente preparadas y que busca la operatividad entendida como capacidad para proporcionar categorías, tareas, medios e instrumentos válidos y fiables para la observación y el diagnóstico. De dicha aproximación se exponen en el presente documento los principales supuestos teóricos y metodológicos que la fundamentan y unas breves indicaciones sobre los resultados del estudio que hemos realizado en esta línea en torno a la comprensión del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales (Gallardo, 2004).

FUNDAMENTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS

Centramos la atención en los efectos sobre la capacidad de respuesta adaptativa específica de los sujetos así como en los medios e instrumentos necesarios para observar dichas respuestas. En consecuencia:

> *Decimos que un sujeto manifiesta una cierta comprensión en relación con un objeto concreto (conocimiento) cuando elabora y emite a su satisfacción una respuesta adaptada, centrada en dicho objeto, ante una situación de desequilibrio cognitivo que decide voluntariamente abordar.*

Para ello, el sujeto tendrá que analizar la situación, valorar la información disponible, determinar la conveniencia de intervenir y actuar en consecuencia fabricando una respuesta, valorar la intervención en términos de efectividad y adecuación de la misma a la situación de interacción vivida y decidir finalizar la intervención o continuarla retomando algunos pasos del proceso. Es, en este sentido, en el que decimos que:

Comprender es sinónimo de responder o de elaborar y emitir una respuesta adaptada. Si un sujeto emite una respuesta adaptada, podemos decir que comprende en los términos de la situación o del problema propuesto. Alternativamente, si el individuo no responde o la respuesta no es adaptada, no podremos afirmar nada sobre la situación de su comprensión por desconocer los verdaderos motivos de ese proceder.

Por otra parte, suele haber una variedad de respuestas adaptadas, más o menos completas o evolucionadas, a una situación. En otras palabras:

Lo que un individuo utiliza y cómo lo utiliza para elaborar y emitir voluntariamente una respuesta adaptada a una situación, proporciona información específica sobre lo que comprende y cómo lo comprende.

Configuración de la Estrategia

Dado que en la comprensión intervienen ideas y constructos inobservables, es necesario emplear una estrategia de acercamiento indirecto (estrategia empírica). Asimismo, por tratarse de un fenómeno cognitivo y educativo complejo, es conveniente contar con un cierto apoyo del análisis didáctico (González, 1998) y, en particular, del análisis de la epistemología y fenomenología del conocimiento matemático y de sus múltiples relaciones (estrategia teórica). El *medio* general que se emplea en el modelo coincide con el que proponen Duffin y Simpson (1997), es decir, la interpretación de comportamientos observables provocados ante situaciones problemáticas. La *finalidad* inmediata es encontrar respuestas a las siguientes preguntas: ¿es posible asegurar que un sujeto tiene una cierta comprensión de un conocimiento matemático concreto?; ¿hasta dónde comprende un individuo?; ¿de qué tipo y cuál es la calidad de dicha comprensión?; ¿cuándo (en qué condiciones) y cómo se puede averiguar esto con ciertas garantías? La finalidad a largo plazo es la de clarificar en lo posible la comprensión matemática para orientar adecuadamente los procesos de enseñanza-aprendizaje. No se hacen postulaciones sobre aspectos no observables sino sólo sobre relaciones entre comportamientos y conocimientos concretos y fenómenos que les dan sentido, entendiendo estos fenómenos como medios privilegiados en los que interactúan el sujeto y el objeto de conocimiento.

El *método* específico, a diferencia de los que proponen los autores mencionados, sigue el siguiente proceso: (a) análisis didáctico del conocimiento en cuestión; (b) delimitación lo más precisa posible de las estructuras epistemológica y fenomenológica de dicho conocimiento; (c) elaboración a partir de ellas de una clasificación para las situaciones vinculadas al conocimiento matemático; (d) conversión operativa de dicha clasificación: análisis sistemático y definición clara y precisa de las acciones interpretables de los sujetos; delimitación, categorización y enumeración de las respuestas posibles y de los criterios de valoración; construcción de un modelo centrado en las referencias y categorías que ha de utilizar el observador para interpretar los comportamientos; (e) construcción de los instrumentos de observación (tareas, pruebas, situaciones y protocolos); (f) obtención de datos, categorización y valoración de respuestas y conformación de perfiles de comprensión; y (g) análisis de resultados en función del problema específico (estudio muestral, comparación, estudio causal, longitudinal, etc.).

Entre las características de la aproximación planteada destacan la de ser operativa, indirecta, epistemológica y fenomenológica, positiva, provisional, limitada, abierta, integradora y objetiva.

El Problema de la Determinación y Clasificación de Situaciones

De acuerdo con la aproximación propuesta, la valoración requiere de un análisis situacional que se inicia con una búsqueda de aquellas situaciones en las que tiene sentido el empleo del conocimiento matemático considerado, para lo que se aconseja la realización de una labor de categorización y selección de situaciones que organice, simplifique y haga más manejable el conjunto situacional asociado.

Precisamente, la consideración de las estructuras epistemológica y fenomenológica constitutivas del conocimiento en estudio, que surgen del correspondiente análisis fenómeno-epistemológico, nos permite establecer unas dimensiones o categorías de situaciones utilizables desde un punto de vista práctico para el diagnóstico y evaluación de la comprensión. La comprensión se valorará entonces en términos de capacidad de enfrentar con éxito situaciones pertenecientes a las distintas categorías surgidas del cruce de tales estructuras. Se trata, en definitiva, de garantizar un cierto grado de suficiencia y representatividad en la muestra de tareas, lo que se consigue mediante las fuentes consultadas para el análisis epistemológico y fenomenológico, entre otras:

- Estudios, trabajos e investigaciones en Educación Matemática relacionados con la enseñanza-aprendizaje del conocimiento matemático en estudio.
- Libros de texto y obras de divulgación matemática.
- Conocimiento de los especialistas en Matemáticas y en Didáctica de la Matemática.

Comprensión del Algoritmo Estándar Escrito para la Multiplicación de Números Naturales

Los planteamientos teóricos expuestos en el apartado anterior exigen una primera confrontación empírica con la que mostrar la verdadera potencialidad operativa de la aproximación adoptada. En este apartado presentamos, a modo de ejemplo, la aplicación de la misma al caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales.

Estructuras Asociadas al Algoritmo

El análisis epistemológico y fenomenológico del algoritmo constituye el medio que posibilita la identificación y delimitación de las estructuras que se describen a continuación:

Estructura Epistemológica

El algoritmo, en su faceta de tópico escolar, es considerado un método de cálculo con una *sintaxis* claramente definida. Su registro escrito, reducido a la clásica y extendida representación en columnas, se sustenta en la estructura del sistema de numeración decimal posicional, en la descomposición numérica, en las tablas de multiplicar y en la propiedad distributiva del producto respecto de la suma (Gómez, 1999), siendo ésta la base de *conocimientos previos* que lo conforman. Estos conocimientos constitutivos se muestran relacionados entre sí, pudiéndose establecer tres grupos de *relaciones* claramente diferenciados:

Relaciones externas a nivel técnico (grupo 1). Son las relaciones usuales entre los elementos básicos del algoritmo que hacen posible recorrer la secuencia procedimental establecida en el sentido apropiado.

Relaciones externas a nivel analítico (grupo 2). Son aquellas relaciones externas no incluidas en el grupo 1. Por ejemplo, relaciones no-usuales como: el número total de resultados parciales depende del número de cifras del multiplicador, mientras que el número de cifras de éstos (su extensión o tamaño) depende del de las cifras del multiplicando o el producto de una de las cifras del multiplicador por una de las del multiplicando, además de un resultado, proporciona información acerca de la posición relativa que ha de ocupar entre el resto de cifras que configuran el espacio de resultados parciales.

Relaciones internas a nivel formal (grupo 3). Son las relaciones que sustentan y validan el mecanismo subyacente al algoritmo, entre ellas las derivadas de las propiedades del sistema de numeración decimal posicional.

Estructura Fenomenológica

Es específica del algoritmo en cuanto que las situaciones consideradas son las propias del conjunto situacional asociado. Asimismo, resulta oportuno limitar este conjunto al constituido por las situaciones directamente vinculadas con el algoritmo, de forma que el resto de situaciones, sin conexión alguna o bien relacionadas indirectamente a través de otros conocimientos matemáticos, no son contempladas en este nivel de análisis. Esta decisión nos permite reducir considerablemente la extensión del conjunto situacional, proporcionando una mayor garantía operativa. Otro aspecto tiene que ver con que algunas situaciones exigen un uso obligado del algoritmo, no siendo resolubles a menos que se aplique de algún modo este método de cálculo. En otras, en cambio, el algoritmo no es más que una alternativa de resolución, existiendo otros conocimientos matemáticos cuyo uso también conduce a la solución.

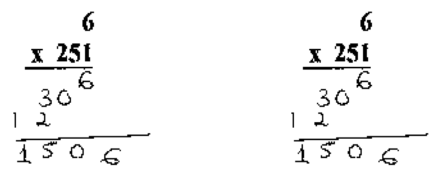
Extensión al Plano Cognitivo: Facetas de Comprensión del Algoritmo

La organización obtenida del conjunto situacional del algoritmo, de origen exclusivamente fenómeno-epistemológico, llega a ser relevante a nivel cognitivo por cuanto posibilita la caracterización en los sujetos de diversas facetas de comprensión vinculadas a las distintas categorías situacionales establecidas. Con ella llegamos a identificar los siguientes ámbitos de comprensión:

Comprensión Técnica, Analítica y Formal

Desde un punto de vista epistemológico, se identifican tres categorías situacionales que permiten establecer diferencias en la comprensión del algoritmo:

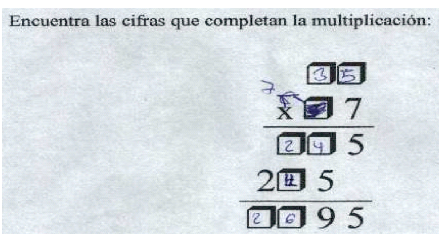
1. *Categoría Técnica*. Reúne a aquellas situaciones donde el algoritmo se emplea de forma mecánica o rutinaria como un instrumento de cálculo. La comprensión exigida para solventarlas se limita al establecimiento de relaciones propias del grupo 1. Dentro del uso técnico se identifican a su vez tres aspectos distintos interpretables en términos de comprensión: *reconocimiento*, *destreza* e *independencia a la disposición de factores*. La Figura 1 muestra un ejemplo de la relevancia de este último aspecto característico de la comprensión técnica del algoritmo.



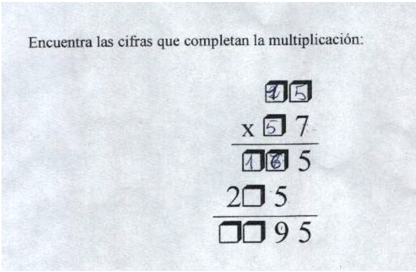
Guillermina (1º Bach.) Raúl (3º ESO)

Figura 1. *Categoría técnica (ejemplo)*

2. *Categoría Analítica*. Constituida por las situaciones que requieren para su resolución el análisis de la estructura y el funcionamiento externos del algoritmo, lo que conlleva el empleo premeditado de relaciones propias del grupo 2. La Figura 2 recoge un ejemplo de las diferencias que pueden llegar a establecerse en la faceta de comprensión analítica del algoritmo a través de una situación de esta categoría.



Esteban (1º Bachillerato).- [...] y como para que te dé aquí 9 al final, tienes que sumar aquí 4, pues multiplicando he probado el 3. 7 por 3 son 21 más 3, 24 y entonces te sale [trasciende al orden estándar de la secuencia algorítmica. Indicio de uso analítico].



Cristian (5º Primaria).- Pues es que no me da. Con el único 7 que puedo multiplicar es el 7 por 5 que es 35, lo pongo aquí el 5. Aquí tiene que ser un 4 y un 5 para dar un 9.
Y si hago 7 por 5, 35, me llevo 3 y 7 por 1, 7, 8, 9 y 10... 0 y 5 pues ya es que no puedo. […] No consigo que me dé 9 [no fija la cifra 4. Dependencia del orden y de las relaciones externas usuales].

Figura 2. *Categoría analítica (ejemplo)*

3. *Categoría Formal*. Incluye todas las situaciones que demandan del resolutor un uso explícito de las relaciones del grupo 3. La Figura 3 reúne las respuestas de tres alumnos a una cuestión propia de esta categoría representativas de diferentes estados de comprensión formal del algoritmo.

¿Por qué al multiplicar con el algoritmo hay que ir desplazando los productos parciales un lugar hacia la izquierda, esto es, por qué se deja un "hueco"?

Ausencia de Comprensión Formal

Mirella (5º Pri.).- Porque siempre hay que ponerla debajo de la cifra que estás multiplicando. […] por eso siempre se deja hueco, porque se pone debajo de la cifra que se multiplica. [Ningún indicio de uso formal; permanece en el ámbito de las relaciones externas].

Comprensión Formal Incipiente

Miguel Ángel (3º ESO).- [Utiliza como apoyo visual la multiplicación 15 x 32, resuelta con el algoritmo]. *El espacio ese es como si hubiera un 0* [indicio de uso formal].

Investigador.- ¿Y por qué?

M.A..- Ya es más difícil. ¿Por qué? Porque... 0 no vale. […] 450 sale de... de sumar así esta multiplicación. ¡Qué no sé! Que no sé lo del 0 ni lo del espacio de donde viene [ausencia de justificación].

Comprensión Formal Consolidada

*Esteban (1º Bach.).- [*Como apoyo visual se emplea la multiplicación 703 x 36 resuelta con el algoritmo*]. Porque aquí coges el... ésta es la multiplicación de 6 y ésta es la multiplicación de 30. […] ¡Claro!, de 30, por eso se deja aquí este 0. [valor de la posición]. [...] Y si hubiera cen-*

tenas pues sería otro hueco... [indicio de uso formal]. *[...] O sea, va multiplicando unidades primero, después decenas y después las centenas y después las sumas* [indicio de uso formal].

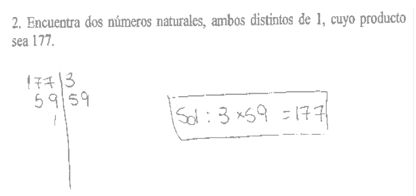
Figura 3. *Categoría formal (ejemplos)*

Comprensión Fundamental y Extendida

La posibilidad de que el algoritmo intervenga en una situación de forma necesaria o como alternativa entre varios conocimientos matemáticos constituye el criterio fenomenológico del que se derivan, respectivamente, dos tipos de situaciones, *exclusivas* y *no-exclusivas*. El uso del algoritmo en las primeras permite caracterizar un primer ámbito de comprensión (*comprensión fundamental*), que se amplía con un segundo (*comprensión extendida*) identificado a través del desempeño ante situaciones no-exclusivas. Ambas facetas son complementarias por lo que su consideración resulta precisa para conformar estados y perfiles de comprensión entre los sujetos.

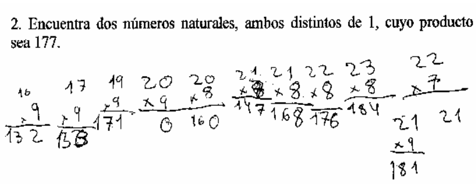
En la Figura 4 se muestra un ejemplo de situación no-exclusiva a la que los sujetos responden mediante el uso de distintos conocimientos matemáticos, uno de ellos el algoritmo empleado de forma técnica y analítica.

Ejemplo A



Rosa (14 años).- Descomponiendo el número.
Investigador.- Descomponiendo. ¿Y se te hubiese ocurrido hacerlo de otro modo?
Ro.- Puede ser pero es que ahora mismo se me ha ocurrido ese.
I.- ¿Ese nada más?
Ro.- Sí, ahora mismo ese. Pero a lo mejor hay otro modo, claro.

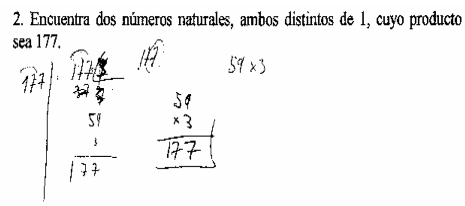
Ejemplo B



Miguel (12 años).- Pues multiplicando.
I.- Multiplicando números…
Mi.- Naturales. [...] Ésta es la que más se acerca.
I.- ¿Cuál?
Mi.- Ésta, el 8 por 21. Entonces, 9 por 21…181.
I.- Bueno, ¿qué pasa? ¿No das con

el número?
Mi.- No. 21 por 7... que va, sale demasiado chico: 147.

Ejemplo C



David (19 años).- [...] he intentado hacer al revés. Pues he buscado un número que multiplicado por otro me diera la terminación en 7 [indicio de uso analítico], *primero, que eso es 3 por 9. Yo sabía que aquí ya tenía un 7, entonces tenía que buscar otro número que multiplicado por 3 me diera 17 o aproximado para que sumándole 2* [nueva reflexión analítica]... *entonces salía mejor el 5. Me daba 15 y 2, 17.*

Figura 4. *Ejemplo de situación no-exclusiva*

CONCLUSIÓN

En este documento hemos querido presentar las ideas centrales que configuran el marco teórico y metodológico desde el que proponemos examinar la comprensión del conocimiento matemático. Dada la complejidad que encierra dicho fenómeno y el estado actual en el que se encuentran los conocimientos relacionados con él, consideramos más factible y adecuado aproximarnos a su estudio desde una perspectiva integradora, que contemple todos los aspectos relevantes vinculados a la comprensión, y al mismo tiempo operativa, con el énfasis puesto en aquellos aspectos que permiten ser observados por el investigador.

Con objeto de ir aportando datos empíricos en favor de esta aproximación, hemos concluido un primer estudio descriptivo en el que, mediante entrevistas semiestructuradas realizadas sobre cuestionario escrito a muestras reducidas de alumnos, se han extraído los primeros resultados y conclusiones acerca de la operatividad real de la propuesta para observar, diagnosticar y valorar la comprensión de los sujetos en el caso particular del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales.

NOTAS

1. La fase teórica de aplicación de la Aproximación ha sido completada con dos estudios empíricos exploratorios, uno cuantitativo y otro cualitativo, dirigidos a contrastar la extensión a nivel cognitivo. De ellos se han obtenido las referencias precisas, en cuanto a instrumentos, respuestas y comportamientos tipo e interpre-

taciones en términos de comprensión, para el desarrollo de un nuevo estudio empírico cualitativo, en el que utilizando la entrevista semiestructurada sobre cuestionario escrito, se ha llegado a caracterizar de forma detallada los estados y perfiles de comprensión del algoritmo asociados a una muestra de 24 alumnos y aportar nueva información sobre las particularidades de la comprensión del algoritmo a partir de los matices y relaciones identificados. Para más detalles consúltese la tesis doctoral de Gallardo (2004).

2. Conviene subrayar que no se considera la preferencia en el uso como criterio de comprensión, sino el reconocimiento de vínculos entre el algoritmo y las situaciones No-Exclusivas que también le dan sentido. De este modo, entendemos que un individuo que no reconoce una situación como susceptible de ser resuelta con el algoritmo manifiesta, en este caso, una comprensión más limitada respecto de aquel que sí establece el vínculo situación-algoritmo, todo ello con independencia del procedimiento de resolución que al final decida emplear.

REFERENCIAS

Carpenter, T., Fennema, E., Fuson, K., Hiebert, J., Human, P., Murray, H., Olivier, A. y Wearne, D. (1999). Learning basic number concepts and skills as problem solving. En E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 45-61). Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Duffin, J. y Simpson, A. (1997). Towards a new theory of understanding. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Vol 4* (pp. 166-173). Lhati, Finland: PME.

Gallardo, J. (2004). *Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. El caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales*. Tesis doctoral inédita. Málaga: Universidad de Málaga.

Godino, J. D. (2000). Significado y comprensión de los conceptos matemáticos. *Uno*, *25*, 77-87.

Gómez, B. (1999). El futuro del cálculo. *Uno*, *22*, 20-27.

González, J. L. (1998). Didactical analysis: A non empirical qualitative method for research in mathematics education. En I. Schwank (Ed.), *Proceedings of the First Conference of the European Society in Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 245-256). Osnabrück, Germany: ERME.

Goñi, J. M. (2000). La enseñanza de las matemáticas, aspectos sociológicos y pedagógicos. En J. M. Goñi (Coord.), *El currículum de matemáticas en los inicios del siglo XXI* (pp. 23-57). Barcelona: Grao.

Hiebert, J. y Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. A. Grouws (Ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York: MacMillan Publishing Company.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K.C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A. y Human, P. (1997). *Making sense: teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth, N. H.: Heinemann.

Koyama, M. (1993). Building a two axes process model of understanding mathematics. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, *1*, 63-73.

Pirie, S. y Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: how can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 165-190.

Romero, I. (2000). *Representación y comprensión en pensamiento numérico*. Trabajo presentado en el IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), Huelva.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. London: The Falmer Press.

Este trabajo fue publicado originalmente como Gallardo, J. y González, J. L. (2005). Una aproximación operativa al diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Actas del IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM* (pp. 197-204). Córdoba: Universidad de Córdoba.

Jesús Gallardo
Universidad de Málaga
gamu@arrakis.es

José Luis González
Universidad de Málaga
gmari@uma.es