Relime Vol. 8, Núm. 1, marzo, 2005 pp.7-23

¿Cuántos puntos hay?
Concepciones de los estudiantes en tareas de construcción

Claudia Acuña[1]

RESUMEN

Los estudiantes de bachillerato tienen dificultades para aceptar que los puntos representados en el plano cartesiano mediante un rasgo sean del mismo tipo que aquellos que subyacen en una recta; sin embargo, por lo general se supone que tal problema desaparece si el alumno conoce el concepto abstracto de punto. En este trabajo partimos de la existencia de dicha dificultad, pero deseamos indagar en sus características; para ello, los estudiantes debían identificar y describir –por escrito y gráficamente– un conjunto infinito de puntos como una recta. Así, propusimos a tres grupos (de 16, 17 y 19 años) una tarea que podría arrojar información sobre el tipo de recursos que empleaban para describir ese conjunto, hallando que muchos de quienes se refieren a un conjunto infinito lo asocian a las marcas (infinitas o finitas) de las unidades de la escala sobre el eje; frecuentemente, esta es la razón por la que su representación en esta tarea suele ser discreta. Se perfilan tres tipos distintos de respuestas para la interpretación del conjunto señalado; en dos se aprecia la idea de punto abstracto, pero sólo uno establece una solución satisfactoria.

PALABRAS CLAVE: *Puntos, rectas, tratamientos figurales, concepciones.*

How many points it is? Conceptions of the students in tasks of construction

ABSTRACT

The high school students have difficulties to identify points that have a discrete representation, as of the same type that those that underlie in a straight line. It is considered generally that this identification is consequence of an abstract idea of point. In this work we consider this difficulty as a fact and we intend to deepen in its characteristics, for it we proposed to three group of students (16, 17 and 19 years) a task of identification, numbering and construction of an infinite set of points that results to be a straight line. The proposed tasks require of the description of the set of points through a graphic and a written description. We find that there is a group of students, the youngest, that reduce the solution to the marks of the scale that appear in the graphic, there is who consider an infinity of solutions, but these only take a shape in the entire marks of the scale, other, also choose for the infinite solution, but indicate points among the marks, suggesting rational numbers, very few arrive to the idea of a continuous infinity of solutions that they represented by a straight line.

KEY WORDS: Points and straight lines, figural treatment, conceptions.

Quantos pontos existem? Concepções dos estudantes nas tarefas de construção

---

Fecha de recepción: Mayo de 2004

[1] Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav, IPN. México

RESUMO

Os estudantes de ensino médio possuem dificuldades para aceitar que os pontos, representados mediante um corte sobre o plano cartesiano, sejam do mesmo tipo que aqueles que estão na reta. Em general, se supõe que esta dificuldade desaparece se o estudante possui o conceito abstrato de ponto. Neste trabalho partimos da existência de tal dificuldade, mas gostaríamos indagar que características possuem esta dificuldade, para isso os estudantes devem identificar e descrever por escrito e graficamente um conjunto infinito de pontos como uma reta. Propusemos a três grupos de estudantes (16, 17 19 anos) uma tarefa que poderia proporcionar informação sobre o tipo de recursos que o estudante possui em mãos para descrever esse conjunto. Encontramos que, muitos dos que se referem a um conjunto infinito o associam às marcas (infinitas ou finitas) das unidades da escala sobre o eixo. Esta é, freqüentemente, a razão pela qual a representação de tal conjunto nessa tarefa se habitua ser discreta. Melhorando três tipos distintos de respostas para a interpretação do conjunto distinguido, em dois desses tipos se observa a idéia de ponto abstrato, mas somente um tipo constitui uma resposta satisfatória.

PALAVRAS CHAVE: Pontos, retas, tratamentos figurais, concepções

¿Combien des points il y a t- il? Des conceptions des étudiants sur les devoirs en construction

RÉSUMÉ

Les étudiants du lycée ont des difficultés pour identifier les points qui ont une représentation discrète, similaires auxquels subjacent une droite. On considère en général que cette identification est conséquence d' une idée abstraite de l' idée de point. Dans ce travail on considère cette difficulté et on prétend approfondir dans ces caractéristiques ; pour cet objectif on a proposé à trois groupes d' étudiants (16, 17 et 19 ans) du lycée un devoir d' identification, numération et construction d' un ensemble infini des points qui a pour effet une droite. Les devoirs proposés requièrent de la description de l' ensemble des points dans un graphique plus une description écrite. On a trouvé qu' il y a un groupe d' étudiants, le plus jeunes, qui réduisent la solution aux marques de l' échelle qui apparaissent dans le graphique ; un autre groupe considère une infinité des solutions mais celles- ci envisagent seulement les marques entières de l' échelle ; un troisième groupe d' élèves choisissent une infinité des solutions, mais identifiquent seulement des points entre les marques de l' échelle ; un dernier petit groupe arrive à l' idée d' une infinité continue des solutions, représentée par une droite.

MOTS CLÉS: Points et droite, traitement figural, conceptions.

1. Antecedentes teóricos

Las representaciones gráficas en el plano cartesiano requieren de un tratamiento visual, además del algebraico, ya que los puntos –como objetos matemáticos– tienen propiedades figurales y espaciales que deben ser considerados en la enseñanza. Una de las actividades cognitivas ligadas al tratamiento de las representaciones gráficas es la visualización, noción sobre la que hay diferentes concepciones en la investigación de la enseñanza de la matemática. Aquí tomaremos la usada por Shama y Dreyfus (1994), quienes afirman: “[Lo] visual se refiere al uso de propiedades espaciales y relaciones de representaciones particulares en los cuales un problema es presentado y procesado” (1994, p. 45). Estos autores abundan en el significado de la estrategia visual, a la cual definen como un método de solución que involucra imaginación visual, y que resulta adecuada para los fines del presente artículo, debido a que solicitamos a los estudiantes trabajos de identificación de puntos que forman una recta en una tarea de construcción.

El presente estudio trata sobre aquellos puntos que no tienen dimensión, pero sí cuentan con una representación en el plano cartesiano. Los puntos como objetos geométricos son *conceptos figurales* en el sentido de Fischbein: "Entidades mentales que poseen simultáneamente características conceptuales y figurales que, por un lado, pueden tener propiedades espaciales (aspecto, posición, magnitud), y que al mismo tiempo poseen cualidades conceptuales (como idealidad, abstracción, generalidad, perfección)" (1993, p.143). Ahora bien, el punto como concepto figural puede ser concebido como un objeto abstracto con propiedades conceptuales –en particular carece de dimensión– o como un objeto concreto con propiedades figurales que sí tiene posición.

Podemos observar un tratamiento de los puntos que tiene su origen en la matemática y en la ciencia en general, que es reproducido frecuentemente en la enseñanza. Tal procedimiento consiste en asignar a los puntos varios usos específicos que rebasan sus propiedades figurales o conceptuales; por ejemplo, Freudenthal (1985), citado por Mesquita, refiere que "la notación de un punto, por ejemplo, comienza como geográfica: La notación A significa un *punto en A* (y no en ningún otro lugar)... el punto en A se convierte en un *punto A* y después A (donde A denota un elemento de un conjunto, con algunas propiedades). La notación A permanece igual en todos los tres casos, aunque su significado cambie de una notación geográfica (donde la situación es importante) a una abstracta" (1998, p. 187).

El uso que se hace de los puntos representados a través de rasgos sobre el papel puede ir, como podemos ver en la cita anterior, de la posición de un objeto gráfico al objeto mismo al margen de la posición específica; este objeto matemático también puede prescindir de su colocación para adoptar otras propiedades distintas de la ausencia de dimensión, como ser el centro de algún círculo, anota Goldenberg (1988).

Debido a las distintas maneras de concebir al punto, es de esperarse que en el proceso de enseñanza tal diferencia sea una de las mayores dificultades para los estudiantes; sin embargo, se requiere de un análisis más detallado para detectar que el alumno no sólo debe resolver esta dualidad planteada en un nivel abstracto (no dimensión–posición) y los usos dados a una misma asignación nominativa, sino también está el problema de los diferentes empleos que puede darse a la representación del punto. En este caso, se trata del uso dado al rasgo que aparece sobre el plano, es decir, cómo se le concibe como dibujo o como figura (Hölzl, 1995; Parzysz, 1988; Laborde and Caponni, 1994; Robotti, 2001).

Considerar la representación gráfica del punto como dibujo implica pensarla en los términos de sus propiedades específicas actuales; una de ellas puede ser la posición, pero determinada por la representación actual. Eso incluye, por ejemplo, bocetos elaborados sin énfasis en la precisión; aquí la posición está sólo sugerida. El grosor del rasgo es una propiedad física de la representación, mas puede inducir a considerar que el punto está donde posiblemente no se encuentra; tal es el caso de la tangencia entre un círculo y una recta, decidida a ojo.

En cambio, pensarla como figura es razonarla como el representante de una clase de equivalencia de todas las posibles representaciones de ese objeto; es decir, como un punto abstracto. Un fenómeno frecuente en el uso de la representación gráfica consiste en confundir las propiedades de la figura (abstractas) con las peculiaridades del dibujo presente (concretas y a la vista). Sobre todo los estudiantes más jóvenes suelen asignar a los objetos representados las propiedades presentes de la expresión gráfica.

Hasta este momento hemos mencionado algunas convenciones que el estudiante debe aceptar respecto a los puntos sobre el plano: que el punto no tiene dimensión, pero es un objeto visible y corpóreo; que ocupa una posición, o eventualmente puede prescindir de ella para adquirir propiedades diversas; que el objeto que aparece como un rasgo no es más que un representante de una clase de equivalencia de posibles representaciones, todas nacidas del concepto de punto. Está de más decir que tales ideas duales no son frecuentemente compartidas por los estudiantes.

Por otro lado, tenemos que la representación gráfica posee la propiedad de permitir un trabajo heurístico a través de la visión y la visualización (Duval, 1998). La representación externa actúa como apoyo a la intuición y sugiere transformaciones que conducen a la solución del problema planteado (Mesquita, 1998); además, las formas gráficas proveen de elementos para desarrollar experimentos mentales adecuados para el descubrimiento de propiedades matemáticas (Lakatos, 1981). Pero al mismo tiempo la representación gráfica insinúa la existencia de características adicionales (Hershkowitz, 1989) propias del dibujo presente, que podrían distraer e, incluso, equivocar la interpretación de la figura.

Por ejemplo, la siguiente construcción fue elaborada por un estudiante de 10 años. La consigna del ejercicio fue *construir dos circunferencias con únicamente dos puntos en común: A y B.*

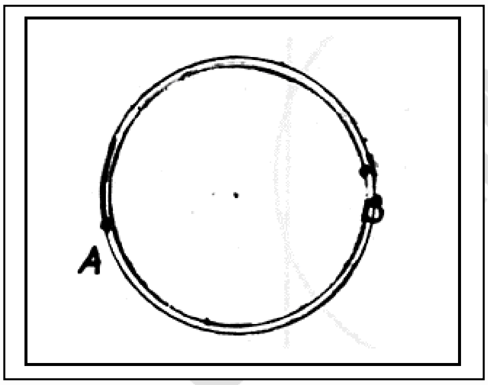


Figura 1. El estudiante hace uso de los puntos como pequeños círculos con grosor.

Esta respuesta ilustra una idea muy generalizada entre los estudiantes, ya que para ellos los puntos adquieren grosor –como en el ejemplo anterior– volumen e incluso peso (Tsamir, 1997).

Los primeros estudios sobre la interpretación de los puntos reportan que los estudiantes desconocen la noción abstracta de punto (Kerslake, 1980; Herscovics, 1980) cuando realizan tareas de identificación. Esta situación puede contribuir a pensar que los puntos marcados o localizados en una recta son esencialmente distintos de los que la forman. Unos puntos tienen una representación gráfica (el rasgo); sin embargo, los que están en una recta como unión infinita no muestran tal representación y de alguna manera se disuelven en la recta. Al asignar a los puntos dimensión y corporeidad mediante el rasgo es difícil concebirlos sin ellos.

Kerslake (1980), en entrevistas preliminares a su investigación sobre graficación, halló que una gran cantidad de estudiantes tienen dificultades con la idea de que existan varios puntos sobre la recta además de aquellos que han localizado y que, ocasionalmente, aceptan la existencia del punto medio. También apunta que “parece más difícil pensar una infinidad de puntos apiñados entre dos puntos dados que pensar en una infinidad de puntos apiñados en una recta” (1977, p.23).

Herscovics comenta al respecto: “Ellos [los estudiantes] no tienen la noción abstracta de punto y lo conciben como una marca o un círculo pequeño, de ahí que, de acuerdo con ellos, solamente un número finito de puntos podrían ser dibujados en un segmento de recta” (1980, p. 362). Dunhan y Osborne (1991) opinan de manera semejante.

La posición es una característica relevante para el punto como concepto figural. En el plano cartesiano puede adquirir una forma algebraica a través de la pareja ordenada; si bien la indicación contenida en la pareja de dos entradas no da opción a ambigüedades, en este caso se trata de una posición únicamente sugerida. No tiene en este momento un lugar sobre el plano ni se aplican sobre ella las propiedades espaciales que son regidas por la orientación y la numerabilidad de los ejes.

Asimismo, la posición del punto gráfico, es decir, del rasgo que es colocado sobre el plano cartesiano, tiene una posición que nos permite decir dónde se encuentra espacialmente en referencia a los demás objetos. Cabe aclarar que la relación espacial de los puntos resulta más elemental y es anterior a la algebrización del espacio, ya que su posición sólo requiere de las referencias con respecto a los otros objetos, en independencia de su cuantificación. Estas diferencias juegan un papel importante en la percepción de los estudiantes acerca de la existencia y localización de los puntos.

Respecto a la existencia de los puntos, hemos observado –Acuña (1998)– que muchos estudiantes están convencidos sobre la presencia de ciertos puntos cuando tienen certeza de la posibilidad de su localización, es decir, no les es suficiente tener a la mano una pareja ordenada para aceptar la existencia de un punto si no cuentan, por ejemplo, con una marca sobre los ejes que les permita dibujar el rasgo correspondiente. Aunque, curiosamente, admiten sin problemas la posibilidad de la existencia de los puntos a los que no ven o no pueden dibujar debido que están fuera de la hoja de papel.

La relación entre el punto (discreto) y la recta (continua) requiere de un cambio cualitativo en la apreciación de los puntos y sus conjuntos. Duval afirma: "El sistema semiótico de representación gráfica permite definir una regla de codificación: a un punto del plano le corresponde una pareja de números. Luego, cualquier pareja de números codifica un punto del plano así localizado [...] Ello permite marcar tantos puntos como se quiera, pero no hacer el trazo continuo de una recta o una parábola. Para ello es necesario interpolar y aceptar la pertinencia de la ley gestaltista de contigüidad" (op. cit., p. 180).

En el caso del punto gráfico sobre el plano se requiere también de la relación Gestalt entre la figura-fondo y la figura-forma, de manera que siempre es un punto referido a un marco de referencia (Duval, 1996) tanto cualitativa (posición relativa) como cuantitativamente (posición exacta).

El doble carácter antagónico de los puntos sobre las rectas (continuidad-discreción) es una buena razón para tener dificultades ante la proposición matemática que dice: *un punto fuera de una recta es del mismo tipo que aquellos que están en el interior de ella*.

Dentro de la actividad docente hay un uso extensivo del método de graficación llamado punteo o graficación punto por punto, el cual consiste en la construcción de la gráfica a través del cálculo de ordenadas y abscisas de puntos que pertenecen a la gráfica para luego unirlos a través de una línea continua. Sin embargo, es insuficiente para entender[2] la gráfica, debido a que gran cantidad de significados gráficos y espaciales asociados a los puntos escapan a la simple decodificación entre puntos gráficos y parejas ordenadas.

El uso del punteo fomenta la relación punto-pareja con el punto-gráfico a través de un procedimiento que se parece a un algoritmo. Frecuentemente se considera que, si el estudiante elabora gráficas apoyado en el punteo, está listo para hacer una interpretación espacial de la posición de los puntos, pero hemos visto que esto no es así (Acuña, 2004).

En este trabajo partimos de que existe dificultad para considerar a los puntos gráficos como parte integral de las rectas continuas. Las preguntas que deseamos responder se relacionan con

[2] Se considera frecuentemente por entender la gráfica hacer una interpretación de la misma. Friel, Curcio y Bright (2001) sugieren por comprensión de la gráfica la habilidad de los lectores para derivar significado de gráficas creadas por otros o por ellos mismos (2001, p. 132).

la interpretación y construcción de un conjunto infinito de puntos que detallaremos más adelante.

2. Metodología

La investigación cualitativa que hemos desarrollado se refiere a las representaciones gráficas en la aplicación de tareas fundamentalmente figurales, en el sentido antes mencionado, donde se requiere del uso de visualización y de las habilidades de procesamiento espacial[3].

Aplicamos a tres muestras de estudiantes –cuyas edades promedio eran de 16, 17 y 19 años– un cuestionario que versaba sobre la construcción de puntos, su identificación en contexto y su interpretación en tareas apoyadas sobre consignas cualitativas como, por ejemplo, las relaciones mayor-menor en ordenada o abscisa. Los dos primeros grupos (A y B) cursaban el tercer y quinto semestre de bachillerato, mientras que el último (C) había concluido este ciclo[4].

El propósito de plantear una misma tarea a grupos de distintos niveles de información obedeció a la intención de observar qué frecuencia tenía la recta como representación de un número infinito de puntos entre los alumnos. Dicha tarea es propuesta sobre un plano cartesiano sin marcas de escala o están reducidas al mínimo. Las coordenadas de todos los puntos son enteras y nunca aparecen números en la escala.

Por su parte, el registro semiótico[5] de la lengua natural aparece en todos los casos como un medio a través del cual podemos observar el desarrollo del tratamiento en cuestión. No ha sido utilizado como un registro de llegada, sino como un medio para la relación gráfico-expresión escrita-gráfico.

En el cuestionario hemos introducido una consigna al inicio que hace recordar la diferencia entre ordenada y abscisa, así como su relación con el orden de las entradas de las parejas ordenadas. Con ello deseamos evitar que la confusión entre la posición de los ejes, las entradas y la designación ordenada-abscisa sea el error más relevante.

3. La tarea

Todos los estudiantes tienen los conocimientos suficientes para identificar la recta como el conjunto infinito de puntos; sin embargo, como hemos visto, sólo ven los puntos como objetos discretos. En el presente trabajo deseamos indagar si nuestros alumnos pueden concebir la recta constructivamente mediante indicaciones cualitativas; de no ser así, determinaremos cuáles son los obstáculos que les impiden llegar a esta idea.

Nosotros abordamos la investigación sobre el problema de la relación entre los puntos y las rectas desde una perspectiva constructiva[6]. La tarea que hemos propuesto inicia con el inciso a), donde solicitamos la construcción de un punto con requerimientos cualitativos sobre la abscisa y la ordenada de un punto dado P. En el inciso b) se debe, por un lado, reconocer la posición de otra posible solución y, por otro, decidir cuántos puntos pertenecen al conjunto que forma la solución; tal pregunta ofrece la posibilidad al estudiante de responder de manera imprecisa con

[3] Habilidad de procesamiento espacial que, a decir de Gorgorió, consiste en "la habilidad necesaria para completar la operación mental combinada requerida para resolver una tarea espacial. Esto incluye no solamente la habilidad para imaginar objetos espaciales, relaciones y transformaciones y decodificarlas visualmente, sino también la habilidad para decodificarla en términos verbales o mixtos. Además, incluye no sólo la habilidad para manipular las imágenes visuales de entes matemáticos en el espacio, es también la habilidad para resolver las tareas usando procesos que no son meramente visuales" (1998, p 210).
[4] Con 87, 77 y 42 estudiantes, respectivamente.
[5] Registro se refiere a los diferentes sistemas semióticos utilizados para presentar la información o para objetivar una representación (Duval, 1988) En geometría son usados básicamente, tres registros semióticos distintos: el de la lengua natural, el del lenguaje simbólico y el figurativo.
[6] Construcción en el sentido de Leinhardt, Zaslavsky and Stein (1990).

frases como *muchos*, *algunos*, *varios más*, sin cometer realmente un error. Por ello hemos propuesto el inciso c), que solicita la construcción del conjunto solución. Así tenemos dos respuestas, una escrita y otra gráfica, sobre la misma petición, de manera que nos permite profundizar sobre el significado de sus soluciones y podemos observar la coherencia entre ellas.

La presentación original de la tarea es la siguiente:

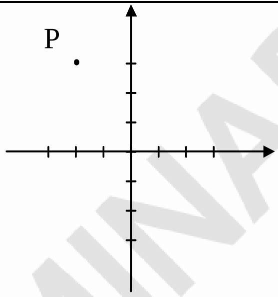
2. El punto P tiene coordenadas (-2,3) Dibuja un punto de igual ordenada y menor abscisa, llámale A. ¿Cuántos puntos con estas características puedes encontrar? ______________________________ Si son más de uno márcalos en la gráfica.	

Figura 2. Tarea propuesta a los estudiantes.

La habilidad de procesamiento espacial necesaria para resolver el inciso a) de la tarea coincide con los requisitos para la localización de puntos (Acuña, 2001a) que son: lectura de las entradas; positividad o elección del sentido de la dirección de desplazamiento, y numerabilidad o contabilización de las unidades de desplazamiento.

En cuanto a las actividades que esperamos se desarrollen, atañen a la orientación de los puntos propuestos cualitativamente, la discriminación de las soluciones gráficas posibles y la aceptación de un número infinito de soluciones representado de manera continua. La solución gráfica debe pasar de considerar muchos puntos aglomerados a la solución de una infinidad de puntos representados únicamente a través de una recta; tal aceptación se apoya en la transición de la idea discreta de punto a la del conjunto continuo de puntos en una recta.

La localización del punto requiere de las siguientes proposiciones y conceptos asociados con actividades cognitivas tocantes al orden, la orientación espacial y al reconocimiento de diversas relaciones que a continuación se detallan:

Conceptos:
Par coordenado, ordenada, abscisa Proyecciones horizontales y verticales sobre los ejes Orientación positiva y negativa sobre los ejes La primera entrada del par coordenado está ligada a las abscisas La segunda entrada del par coordenado está ligada a las ordenadas
Proposiciones:

Relación : primera entrada–abscisa–eje horizontal
Relación: segunda entrada –ordenada–eje vertical
Relación: orientación negativa y signo negativo (-) respecto a las ordenadas o las abscisas
Relación: orientación positiva y signo positivo (+) o ausencia de este respecto a las ordenadas o abscisas

Las marcas de la escala sobre los ejes están sobre las unidades o sobre partes proporcionales de ellas
El valor de las entradas determina los desplazamientos de las proyecciones paralelas
La orientación está determinada por el signo de las entradas respectivas
El orden sobre ordenadas o abscisas es el de la recta
Los puntos gráficos se encuentran sobre el cruce de las proyecciones horizontal y vertical

Figura 3. Lista de conceptos y proposiciones que los estudiantes necesitan para localizar puntos sobre el plano

Las preguntas que deseamos responder a lo largo de esta investigación pueden ser propuestas de la siguiente manera:

- ¿Qué características tiene la dificultad de no poseer una idea abstracta de punto, especialmente cuando los estudiantes deben identificar[7], construir y numerar puntos expresados como un conjunto infinito que resulta ser una recta?

- ¿Qué tipo de obstáculos encuentran nuestros estudiantes al construir puntos sobre el plano apoyados en indicaciones cualitativas sobre las ordenadas y las abscisas de un punto dado?

- ¿Cuáles de nuestros estudiantes pueden identificar la cardinalidad infinita del conjunto solución de los puntos con abscisa menor que un punto dado?

- ¿Las respuestas se ven influidas por el nivel académico?

- ¿Qué características asignan a los puntos y cómo los usan en las tareas encomendadas?

- Y eventualmente ¿Qué tipos distintos de respuestas se perfilan en las distintas poblaciones estudiadas?

4. Respuestas y análisis

La localización del punto A tiene menos éxito que la de un punto cualquiera sobre el plano, por un lado, porque la localización sobre el plano es heterogénea (Acuña, 1997), por otro, porque las indicaciones para la localización son cualitativas y no cuantitativas o numéricas; en este sentido, la tarea requiere de la decisión sobre la posición de un punto con una abscisa menor respecto a una abscisa negativa de un punto dado (Acuña, 1999 y 2001b). Las frecuencias de respuestas correctas al inciso a) en los grupos se detallan a continuación (Figura 4):

Muestra	A (16 años)	B (17 años)	C (19 años)

[7] Identificación en el sentido de Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990).

Pregunta 2a)	18.4%	38.9%	59.5%

Figura 4. Frecuencias de localización correcta del punto A

Las respuestas del inciso b) están fuertemente influidas por las marcas sobre el eje horizontal. Identificamos la concepción de los estudiantes que hemos comentado antes, referente a que los *puntos* son aquellos que están representados mediante un rasgo discreto. En este inciso obtuvimos respuestas (correctas o no, es decir bien y mal orientadas) que incluían solamente a los puntos con igual ordenada, pero abscisas sobre las marcas de la escala dibujada (numerales de 1 a 6), al igual que afirmaciones como *varios o algunos.*

El hecho de agregar la respuesta *muchos* a la que indica una *infinidad* obedeció a que consideramos que la contradicción más importante en la tarea estaba entre las respuestas que se apoyaban en las marcas de la escala (el dibujo) en contra de admitir más posibilidades que las rebasaran (la figura), y no en las consideraciones abstractas de numerabilidad: Un número finito de puntos en contra de un número infinito de ellos.

Pregunta 2 b)	Infinito o muchos	Finito o de 1 a 6 puntos	Sin respuesta u otros
A	15.7%	65.7%	18.6%
B	20.8%	62.3%	16.9%
C	76.1%	21.6%	2.3%

Figura 5. Descripción textual del conjunto solución de la pregunta 2 b)

Las respuestas que incluían un número infinito de puntos van desde los niveles escolares de los más jóvenes a los mayores, siendo este último del 76.1% en el Grupo C, donde la consigna sobre el número infinito de puntos en una recta está más presente en clase; sin embargo, llama la atención que todavía un 21.6% conteste *finito* o el número de puntos sobre las marcas de la escala.

Las construcciones de la gráfica solicitada en el inciso c) muestran que los más jóvenes construyen gráficas discretas y sólo algunos (10,5%) consideran una infinidad de puntos, pero estos se encuentran solamente sobre las marcas de la escala.
Unos estudiantes del Grupo B construyen gráficas que no están sobre las marcas enteras, pero tampoco delinean rectas, sino de preferencia muchos pequeños puntos alineados (9%); otros ya proponen rectas (7.7%), mas las gráficas discretas siguen siendo la mayoría (64.5%). Algunas de ellas son aumentadas en los extremos para indicar la continuidad, con la cardinalidad de los naturales.

Respecto al inciso c) tenemos los siguientes resultados:

Pregunta 2 c)	Finito	Infinito $\mathbb{R}$	Infinito $\mathbb{N}$ o $\mathbb{Q}$	Gráfica Discreta	Gráfica Continua
A	71%	----	10.5%	81.5%	---
B	41.5%	9%[8]	23.3%	64.5%	7.7%
C	19%	26%	40.4%	59.5%	33.3%

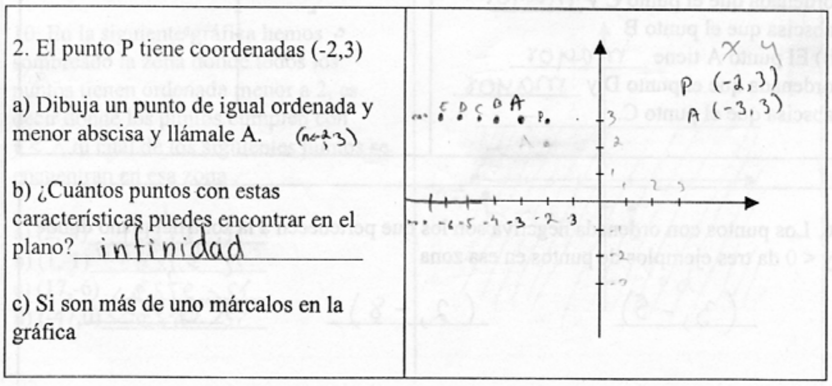
Figura 6. Descripción gráfica del conjunto solución de la pregunta 2 c)

El Grupo C tiene el mayor número de construcciones que ignoran las marcas de la escala como posición de los puntos solución. Las gráficas de rectas son también más frecuentes (33.3%),

[8] Algunos estudiantes construyeron gráficas que sugieren un número infinito de puntos entre las abscisas enteras, pero no construyeron rectas. Por eso los de la respuesta *infinito* y de gráficas de *gráfica continua* no son iguales.

pero las rectas aún pasan desapercibidas para muchos de ellos (59.5%).

Las dos respuestas muestran la idea que tienen los estudiantes sobre el conjunto solución, pero no necesariamente coinciden. Muchos manifiestan consignas aprendidas en clase sobre una cantidad *infinita de puntos*; sin embargo, no significa que asocien una recta como representación gráfica de este conjunto.


2. El punto P tiene coordenadas (-2,3)

a) Dibuja un punto de igual ordenada y menor abscisa y llámale A. (n<-2,3)

b) ¿Cuántos puntos con estas características puedes encontrar en el plano? infinidad

c) Si son más de uno márcalos en la gráfica

Figura 7. Ejemplo de la muestra C con respuesta: *infinidad de puntos-N*,
nota: en la respuesta aparece la indicación (n < - 2,3)

Muchos de los estudiantes que contestan en b) *infinito* luego marcan solamente los puntos sobre las marcas de la escala, e indican eventualmente que los puntos se prolongan más allá de los márgenes de la gráfica. Las respuestas *infinito-marcas sobre las unidades*, pese a ser correctas de manera general, no son exhaustivas; son ciertamente parte de la solución, pero lo más valioso de ellas es que nos proporcionan información sobre el alcance y tipo de recursos con los que cuentan los estudiantes para detectar una parte de la solución (N o Q).

Conclusiones

Para determinar la orientación de los puntos que componen la solución se debe decidir, en principio, la ubicación del punto A, lo cual implica hacer una elección en lo que concierne a su posición[9] respecto a los ejes, a derecha o izquierda, dependiendo del carácter positivo o negativo del valor de la entrada.

Respecto a su localización exacta, numérica y analítica (posicionamiento)[10], la orientación se resuelve a partir de la información proporcionada por el signo de la entrada respectiva; de este modo, queda referida a propiedades tanto cualitativas como cuantitativas.

En general, la ubicación se acompaña, además de la orientación, de las indicaciones de tipo cualitativo establecidas por los valores numéricos de las entradas o, como en el caso del presente trabajo, por restricciones cualitativas.

Asimismo, siempre está presente la dualidad que presupone manejar representaciones actuales (el dibujo) de objetos matemáticos ideales (la figura), como en el caso donde se piensa que el *rasgo* (de carácter externo e icónico) es precisamente el *punto* (de carácter abstracto). Los estudiantes se esmeran también por buscar referentes perceptuales como las marcas sobre el eje para darles corporeidad, poder anclarlos y asignarles referentes. Ello muestra que la idea abstracta de punto no es la que domina su comportamiento.

[9] La posición en general también hace referencia a la relación entre el objeto y otros objetos gráficos además de los ejes.
[10] El posicionamiento hace referencia a la propiedad cuantitativa que asigna a cada punto un lugar determinado.

Pese a que los estudiantes saben localizar parejas ordenadas sobre el plano, no están en condiciones de decidir sobre la posición de los puntos de abscisa menor de un número negativo. Los obstáculos que tuvieron se refieren al tratamiento de la representación como dibujo que, en este caso, deriva en considerar solamente los puntos sobre las marcas. Resolver la tarea propuesta requiere que, a partir de la localización del punto A, los alumnos puedan dar a la representación un tratamiento como figura, es decir, como una colección de puntos infinitos que se agrupan continuamente en una recta.

Los estudiantes que se detienen sobre las marcas de la escala para dar posición a los puntos se encaminan en dos procesos de identificación: los que se restringen a las marcas que aparecen en la representación gráfica (6 en total) y los que exceden esas marcas, pero que también las toman como referencia. Si bien las respuestas asociadas a dichos métodos nos parecen esencialmente distintas porque muestran una concepción sobre los puntos ligada a las marcas, quienes optan por la segunda alternativa son capaces de obtener otros puntos, ya que construyen nuevas marcas sobre el eje horizontal e indican otras soluciones no consideradas en la representación presente. De esta inspección surgen entonces las respuestas de *1 a 6* unidades, por un lado, y *muchas e infinitas*, por otro.

Aparentemente, el tratamiento como dibujo es más común entre los estudiantes que pertenecen a niveles de menor instrucción, mientras que el tratamiento como figura aparece entre los estudiantes de mayor edad (Grupo C), quienes conciben a la recta como respuesta. Podemos sugerir, entonces, que el tipo de tratamiento se asocia al nivel académico que implica mayor edad y madurez, así como más formación en la materia. Consideramos que la mayoría de los estudiantes con quienes trabajamos reconocen a los conjuntos infinitos de puntos con una representación gráfica discreta.

Las soluciones gráficas no coinciden necesariamente con las respuestas escritas. La construcción del punto A suele colocarse sobre el punto (-3, 3) y las respuestas discretas infinitas se presentan de dos maneras: se muestran sobre las unidades marcadas o se ilustran muy juntas. En este caso se podría sugerir la idea de que se incluye a los racionales, pero de manera discreta. Los puntos no se funden, conservando su corporeidad como ente físico y generalmente son confinados a porciones de espacio que no sugieren una prolongación infinita.

Si hacemos a un lado el problema de la orientación, las concepciones de los estudiantes se pueden tipificar de la siguiente manera:

Respuesta tipo A: Los estudiantes quedan cautivos de las seis marcas que aparecen en el eje horizontal. De este modo, ilustran la concepción que sugiere que los puntos existen solamente cuando están marcados; esta puede ser un modo de pensamiento perceptual sujeto al dibujo presente.

Respuesta tipo B: Los estudiantes observan que las soluciones posibles son infinitas (o muchas más que las marcas de la escala), pero colocan los puntos sólo sobre las abscisas enteras. No obstante, gráficamente muestran que pueden construir los puntos que exceden los márgenes del dibujo. Este tipo de respuesta es abstracta; sin embargo, todavía está sujeta a la presencia de la representación. Creemos que aquí ya existe la idea abstracta de punto, mas el obstáculo se sitúa en la contraposición discreto continuo; no se concibe la recta como un conjunto infinito de puntos que, además, es continuo.

Respuesta tipo C: Los estudiantes hablan de un número infinito de puntos y construyen rectas o segmentos de recta; así, consideran a la recta como la solución. En este caso se tiene no sólo la idea abstracta de punto, sino que se ha dado el paso cualitativo entre conjunto discreto y conjunto continuo.

En las tareas de construcción que hemos propuesto a los estudiantes se aprecia que el tratamiento dominante sobre la gráfica es como si se tratase de un dibujo que, además, está relacionado con una expresión pictórica discreta. Respecto al caso de la detección de un conjunto infinito, está localizado sobre los enteros, en particular sobre las marcas de la escala de la representación presente.

Bibliografía

Acuña, C. (1997). La ubicación espacial de conjuntos de puntos en el plano. *XXXV Aniversario del Cinvestav*, 203-223.

Acuña, C. (1998). Difficulty of the high school students to make difference between draw-point and pair-point. *Proceedings of XX PME-NA Meeting*, 313.

Acuña, C. (1999). Conceptions of high school students about smaller abscissa and bigger ordinate between points on the cartesian plane. *Proceedings of the Nineteen Annual Meeting of Psychology of Mathematics Education NA*, pp. 445-446.

Acuña, C. (2001a). Concepciones en graficación. El orden entre las coordenadas de los puntos del plano cartesiano. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 4* (3), 203-217.

Acuña, C. (2001b). Conversión entre gráficas y ecuaciones a través de la descripción de semiplanos. *Educación Matemática*, 203-217.

Acuña, C. (2004). Synoptic and epistemological vision of points in a figural task on the cartesian plane. *Proceedings of XXVIII PME International Meeting* (1), 370.

Dunhan, P. & Osborne, A. (1991). Learning to see: students' graphing difficulties. *Focus on Learning Problems in Mathematics 13* (4).

Duval, R. (1988). Graphiques et équations: l'articulation de deux registres. *Annales de Didactique et Sciences Cognitive 1*, 235-253.

Duval, R. (1996). Les représentations graphiques: fonctionnement et conditions de leur apprentissage. En *Actes de la 46ème Rencontre Internationale de la CIEAEM Meeting Représentations Graphique et Symbolique de Maternelle à L'Université* (tome 1, pp. 3-15). Toulouse, France: Université Paul Sabatier-Ed.Antibi.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Didáctica. Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization cognitive function in mathematical thinking. *Proceedings of the twenty first Annual Meeting PME-NA* 1.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics 24*, 139-162.

Freudenthal, H. (1985). Notation mathématique. En *Enciclopedia universalis* (tome 13), 144-150.

Friel, S.; Curcio, F. and Bright, G. (2001). Making sense graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education 32* (2), pp.124-158.

Goldenberg, P. (1988). Mathematics, metaphors, and human factors: mathematical and pedagogical challenges in the educational use of graphical representation of functions. *Journal of Mathematical Behavior 7*, 135-173.

Gorgorió, N. (1998). Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation problems. *Educational Studies in Mathematics 35*, 207-231.

Herscovics, N. (1980). Constructing meaning for linear equations: a problem of representation, *Recherché en Didactique des Mathématiques 1* (3), 351-385.

Hershkowitz. (1989). Visualization in geometry- two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics 11* (1), 61-75.

Hölzl, R. (1995). Between drawing and figure. *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education*. Germany: Sutherland and Mason.

Kerslake, D. (1977). The understanding of graphs. *Mathematics in School 6* (2), 22-25.

Kerslake, D. (1980). Children's understanding mathematics. In *The CSMS mathematics team. Graphs* (pp. 11-16). UK: Kathleen Hart.

Laborde, C. and Caponni, B. (1994). Cabri-géomètre d'un milieu pour apprentissage de la notion de figures géométriques. *Recherches in Didactique des Mathématiques 4* (12), 165-210.

Lakatos, I. (1981). *Matemáticas, ciencia y epistemología*. Madrid, España: Alianza Editorial.

Leinhardt, G.; Zaslavsky, O. and Stein, M. (1990). Functions, graphs and graphing: task, learning and teaching. *Review of Educational Research 60* (1), 16.

Mesquita, A. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *Journal of Mathematical Behavior 17* (2), 183-195.

Parzysz, B. (1988). *Knowing* vs. *seeing*. Problems on the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics 19*, 79-92.

Robotti, E. (2001). Verbalization as a mediator between figural and theoretical objects. *Proceedings of XXV PME Meeting*.

Shama, G. and Dreyfus, T. (1994). Visual, algebraic and mixed strategies in visually presented linear programming problems. *Educational Studies in Mathematics 26*, 45-70.

Tsamir, P. (1997). Representations of points. *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 4*, 246-253.

Dra. Claudia Acuña
Departamento de Matemática Educativa
Cinvestav-IPN
México, D.F.
E-mail: claudiamargarita_as@hotmail.com