LA POLEMICA ENTRE FREGE Y HILBERT ACERCA DEL METODO AXIOMATICO

Jesús Mosterín

A principios de siglo tuvo lugar una polémica memorable entre Frege y Hilbert (o, quizás más exactamente, de Frege contra Hilbert). La polémica resulta memorable tanto por la importancia de sus protagonistas y del tema discutido como por el hecho de que las confusiones y ambigüedades que determinaron su esterilidad aún perviven parcialmente entre nosotros.

Los personajes eran evidentemente importantes. En 1900 Hilbert era probablemente el más grande lógico viviente. Pero ahí se acaba la analogía. A pesar de su juventud –tenía entonces 37 años– Hilbert había cosechado numerosos éxitos profesionales, era catedrático de la prestigiosa Universidad de Göttingen y se había podido permitir el lujo de rechazar varias otras cátedras que le habían sido ofrecidas. Hilbert era ya famoso y su fama no había hecho sino aumentar con la publicación el año anterior de su obra *Grundlagen der Geometrie*.[1] El reconocimiento que recibía de la comunidad matemática quedó reflejado en su participación estelar en el Segundo Congreso Internacional de Matemáticos, celebrado en Paris en 1900, en que propuso a sus colegas de todo el mundo una célebre lista de 100 problemas que debían tratar de resolver durante el siglo XX que entonces comenzaba. Frege, por el contrario, a pesar de su mayor edad –era 14 años más viejo que Hilbert–, era un oscuro docente de la Universidad de Jena que nunca llegaría a alcanzar la posición de profesor ordinario y cuya obra –intrínsecamente importante– no había logrado el reconocimiento ni la difusión que merecía.

El tema de la polémica era nada menos que el de la naturaleza del método axiomático, método que ha gozado siempre de un prestigio incomparable en la tradición científica de Occidente

ya desde la época en que Aristoteles identificó ciencia perfecta con teoría axiomática. Ahora bien ¿qué es una teoría axiomática?

Hasta 1899 se había entendido por teoría axiomática algo distinto de lo que se entendería a partir de la publicación en ese año de los *Grundlagen der Geometrie* por Hilbert. Pero ni Hilbert supo describir adecuadamente lo que hacía ni Frege logró darse cuenta del alcance y el sentido último de ese nuevo hacer. Por ello la polémica resultó estéril.

La esterilidad de la polémica se debió a una razón fundamental. Para hablar de dos métodos distintos, casi podría decirse de dos mundos distintos, tanto Frege como Hilbert empleaban exactamente las mismas palabras. Cuando Frege empleaba la palabra "axioma", quería decir algo completamente distinto que cuando Hilbert empleaba la misma palabra "axioma". Y lo mismo ocurría con las palabras "definición", "prueba", "teoría", etc. Hilbert había revolucionado el método, pero había conservado las viejas palabras para designar las nuevas realidades, con lo cual la comunicación entre los nuevos y viejos axiomáticos resultaba imposible. Esa confusión y ambigüedad de las palabras que empleamos para hablar de las teorías no se ha disipado del todo ni siquiera en nuestros días. Por eso vale la pena rememorar aquella inconclusa polémica.

El desarrollo de la polémica

Frege y Hilbert se habían conocido en 1895 con ocasión de un congreso científico celebrado en Lübeck, donde Frege había presentado una ponencia sobre las ventajas de su escritura conceptual tanto respecto al lenguaje ordinario como respecto al simbolismo de Peano, y donde ambos habían intercambiado opiniones sobre el papel de los signos en las matemáticas, intercambio que tuvo una breve continuación epistolar. Durante el semestre de invierno de 1898-99 Hilbert dio un curso en Göttingen sobre geometría axiomática, entre cuyos oyentes se encontraba Heinrich Liebmann, que envió un ejemplar de los apuntes del curso a Frege, que era amigo de su padre. La reacción de Frege

ante las novedades metodológicas de Hilbert, manifestada en dos cartas a Liebmann,[2] fue negativa, impresión negativa que se confirmó tras la atenta lectura por Frege de los *Grundlagen der Geometrie*, publicados poco después, y que constituían una versión ampliada del curso de Göttingen que Frege ya conocía. El 27 de diciembre de 1899 Frege escribió directamente a Hilbert una larga carta[3] en la que sometía su libro a una crítica dura y algo pedante, acusándole de total falta de rigor. Hilbert debió sentirse irritado, pero apreciaba a Frege y, armándose de paciencia, le contestó dos días después explicándole diversos aspectos esenciales de su nuevo método. El 6 de enero de 1900 replicó Frege con otra larga carta, lúcida y agresivamente polémica, de la que Hilbert se limitó a acusar recibo. La suerte de la polémica estaba echada. Hilbert se expresaba con excesiva falta de precisión para el gusto del lógico genial y pedantemente preciso que era Frege. Y Frege, que tan aguda y lúcidamente criticaba la desafortunada terminología hilbertiana, era incapaz de ver, más allá de los árboles de sus críticas de detalle, el bosque del nuevo método que Hilbert había descubierto y que iba a revolucionar la matemática.

Al pasar los meses sin recibir cabal contestación de Hilbert, Frege volvió a insistir con otra carta, a la que Hilbert volvería a responder escuetamente, por falta de tiempo. En vista de que la discusión epistolar no progresaba, Frege propuso a Hilbert publicar la correspondencia intercambiada, pero Hilbert prefería no hacerlo. En noviembre de 1903 Hilbert escribió a Frege agradeciéndole el envío del tomo II de sus *Grundgesetze* e invitándole a ir a Göttingen, a fin de proseguir oralmente sus discusiones, ya que no tenía tiempo para hacerlo por escrito. Pero Frege no aceptó y ahí se acabó el contacto entre ambos. Frege se fue haciendo huraño con el tiempo. No aceptó la invitación de Couturat a participar en el Congreso de Filosofía de París en 1900, ni tampoco la de Russell a tomar parte en el Congreso Matemático de Cambridge en 1912. Prefería el contacto por escrito al personal.

En 1903 Frege publicó en el Anuario de la Unión Alemana de Matemáticos dos artículos "Sobre los fundamentos de la geometría",[4] en los que recogía y ampliaba sus críticas a Hilbert

anteriormente expresadas en sus cartas. Hilbert no se dignó responder, pero A. Korselt replicó a Frege con un artículo[5] en que salía en defensa de Hilbert. En 1906 Frege replicó a su vez a Korselt publicando una serie de tres artículos "Sobre los fundamentos de la geometría",[6] en que sus análisis resultan especialmente lúcidos y profundos, llegando a exponer las características del nuevo método axiomático iniciado por Hilbert de un modo mucho más claro y explícito de lo que nunca lo había hecho el propio Hilbert, pero sin llegar a aceptar ni entender la importancia ni el sentido último del proceder hilbertiano.

El método axiomático concreto o clásico

Hemos dicho que la esterilidad de la polémica entre Frege y Hilbert se debió fundamentalmente a la falta de comunicación producida por la ambigüedad y confusión de las palabras empleadas por ambos, que eran las mismas, pero se referían a dos concepciones radicalmente distintas del método axiomático; la concepción antigua o tradicional, representada por Frege, y la concepción iniciada por Hilbert y otros matemáticos de su tiempo

La concepción antigua o tradicional del método axiomático aparece ya formulada con toda claridad en los *Analíticos Posteriores* de Aristoteles y encuentra su plasmación paradigmática poco después en los *Elementos* de Euklides.

Una teoría axiomática, según la entendían Aristoteles y Euklides, es un conjunto de verdades acerca de un ámbito determinado de la realidad, conjunto organizado de tal manera que casi todos los conceptos que intervienen en la teoría son definidos a partir de unos pocos conceptos primitivos, que no se definen, y casi todas las verdades que componen la teoría son demostradas a partir de unas pocas verdades primeras o axiomas que no se demuestran. Los conceptos primitivos no necesitan ser definidos, pues los conocemos intuitivamente. Y los principios primeros o axiomas no necesitan ser demostrados, pues su verdad es evidente y la captamos por intuición. Aplicar el método axiomático a un ámbito determinado de la realidad consiste en organizar

nuestro saber acerca de ese ámbito en forma de teoría axiomática.

Esta concepción del método axiomático permaneció básicamente inalterada hasta finales del siglo XIX, si bien algunos detalles terminológicos y epistemológicos sufrieron ciertas variaciones. Así, a los principios primeros indemostrados, a los que Aristoteles llamaba axiomas e hipótesis, Euklides los llamaba principios comunes y postulados. Con el tiempo acabó generalizándose el nombre de axiomas para todos ellos. Así, también, mientras que Aristoteles pensaba que captamos la verdad de los axiomas de la geometría mediante una facultad de intelección a la que él llamaba *νοῦς*, Kant consideraba que la verdad de los axiomas de la geometría se capta en una especial intuición pura del espacio. Pero en que los axiomas eran verdades evidentes captadas por algún tipo de intuición, prácticamente todos estaban de acuerdo. Incluso los empiristas extremos que pretendían que llegábamos a los axiomas por inducción aceptaban al menos que los axiomas eran verdades acerca de un ámbito determinado de la realidad.

Frege expuso y analizó el método axiomático tradicional con más claridad y precisión que nadie. Además lo perfeccionó considerablemente mediante la formalización. El método axiomático clásico consistía en explicitar los axiomas (que eran ideas verdaderas evidentes) y en exigir que todas las demás ideas afirmadas en la teoría fueran demostradas a partir de esos axiomas. Pero Frege se dió cuenta de que para maximizar el rigor de las demostraciones no basta con explicitar su punto de partida –los axiomas–, sino que también es necesario explicitar los métodos admisibles de demostración –las reglas de inferencia. La unívoca explicitación de las reglas de inferencia requería a su vez la formalización o formulación regimentada de axiomas, teoremas y pruebas. Pero para Frege la formalización sólo involucraba una precisión sintáctica, no un cambio semántico. Los enunciados del lenguaje ordinario daban lugar a las fórmulas del lenguaje formal, pero las fórmulas seguían siendo enunciados verdaderos, seguían expresando ideas, seguían cargadas de contenido significativo, seguían siendo *inhaltlich.* Frege representa la

culminación de la concepción tradicional del método axiomático, que él expone con rigor incomparable.

Las geometrías no euklídeas

En la segunda mitad del siglo XIX se había reavivado el interés por el método axiomático, al tiempo que entraban en crisis algunos de sus supuestros tradicionales. A esta crisis contribuyó poderosamente el desarrollo de las geometrías no-euklídeas. Ya Gauss había descubierto la posibilidad de desarrollar geometrías distintas de la euklídea e incompatibles con ella, pero había renunciado a publicar sus resultados por miedo al escándalo de los espíritus obtusos.[7] Bolyai y Lobatchevski desarrollaron geometrías que tomaban como axioma la negación del axioma euklídeo de las paralelas, y no vacilaron en publicar sus resultados. Así pues, en la segunda mitad del siglo XIX había diversos axiomas sobre las paralelas (correspondientes a teorías geométricas distintas) incompatibles entre sí. Todos estos axiomas no podían ser verdaderos al mismo tiempo. A lo sumo uno de ellos podía ser verdadero. Entre los geómetras se fue abriendo paso la opinión de que no había más razón para considerar verdadero a uno de estos axiomas que a los otros. Por tanto, ninguno de ellos era verdadero. Y si el axioma de las paralelas no era verdadero, tampoco tenían por qué serlo los demás. Así acabó considerándose que los axiomas son unos meros esquemas abstractos, que en sí mismo no son verdaderos ni falsos. Estos desarrollos resultaban inaceptables para los defensores de la concepción clásica del método axiomático, no sólo para los espíritus obtusos (como ya había previsto Gauss), sino incluso para mentes tan agudas como la de Frege.

Frege se opuso tenazmente a la nueva tendencia (que cada vez se abría más paso entre los geómetras) a considerar que en la matemática hay sitio para distintas geometrías, que cada geometría describe una estructura abstracta distinta y que ningun geometría es en sí misma verdadera ni falsa. En su escrito póstumo "Sobre geometría euklídea", redactado durante la época de su polémica con Hilbert, escribe Frege patéticamente: "Nadi

puede servir a la vez a dos señores. No es posible servir a la vez a la verdad y a la falsedad. Si la geometría euklídea es verdadera, entonces la geometría no-euklídea es falsa; y si la geometría no-euklídea es verdadera, entonces la geometría euklídea es falsa. Si por un punto exterior a una recta pasa siempre una paralela a esa recta y sólo una, entonces para cada recta y para cada punto exterior a ella hay una paralela a esa recta que pasa por ese punto y cada paralela a esa recta por ese punto coincide con ella. Quien reconoce la geometría euklídea como verdadera, debe rechazar como falsa la no-euklídea, y quien reconoce la no-euklídea como verdadera, debe rechazar la euklídea ... Ahora se trata de arrojar a una de ellas, a la geometría euklídea o a la no-euklídea, fuera de la lista de las ciencias y colocarla como momia junto a la alquimia y a la astrología ... ¡Dentro o fuera! ¿A cuál hay que arrojar fuera, a la geometría euklídea o a la no-euklídea? Esta es la cuestión".[8] La pregunta era retórica, pues para Frege resultaba claro que la geometría euklídea era la única verdadera y que todas las geometrías no-euklídeas eran falsas.

La postura de Frege frente a las geometrías no-euklídeas es completamente retrógrada y es un síntoma de su falta de comprensión y simpatía hacia las nuevas tendencias que se abrían camino en la matemática. Según el nuevo punto de vista, cada geometría describe una estructura abstracta. Los teoremas de la teoría no expresan de por sí ideas verdaderas o falsas acerca de ningún ámbito determinado de la realidad, aunque sean susceptibles de interpretación en diversos ámbitos. En definitiva, una geometría no es verdadera o falsa, aunque sí es verdadera o falsa la afirmación de que esa geometría es aplicable en un ámbito determinado de la realidad. Alguien podría haber pensado que, a pesar de todo, hay un ámbito privilegiado, el espacio físico y que la geometría verdadera sería la aplicable en ese ámbito. Pero esa postura tampoco habría aportado consuelo duradero a los defensores a ultranza de la geometría euklídea, como Frege. En efecto, pocos años después descubriría Einstein que si identificamos los puntos con las partículas físicas y las rectas con los rayos de luz, entonces resultaba que en el espacio físico así definido

lo que se cumple no es la geometría euklídea, sino la geometrí de Riemann, que es una geometría no-euklídea.

¿De donde le venía a Frege su seguridad en la verdad de l geometría euklídea? De su concepción kantiana de la geometría cuyos axiomas se captarían por una intuición pura del espacio "Al llamar sintéticas a priori a las verdades de la geometría, Kan ha descubierto su verdadera esencia".[9] Pero al juzgar que Kan había descubierto la verdadera esencia de la geometría Frege n se equivocaba menos que el mismo Kant se había equivocad cuando juzgó que la lógica había salido perfecta e incapaz de pro greso de la mente de Aristoteles. Y lo mismo que la obra de Freg era la refutación más palpable del juicio kantiano sobre la lógica la obra de los geómetras no-euklídeos y de Hilbert era la más pal pable refutación del juicio de Frege sobre la concepción kantian de la geometría. En descargo de Kant habría que decir que ést no podía conocer una lógica que se desarrollaría 100 años má tarde, mientras que Frege sí conocía la geometría no-euklídea En general la actitud de Frege respecto a la geometría es bastant paradójica. Frege, fundador del programa logicista de reducció de la matemática a la lógica, excluye por completo a la geometrí de su programa. Y Frege, crítico implacable de la concepció kantiana de la aritmética, acepta sin más y como definitiva l concepción kantiana de la geometría.

El método axiomático abstracto o hilbertiano

Al mismo tiempo que se daban a conocer las geometría no-euklídeas, un análisis más cuidadoso de los *Elementos* d Euklides revelaba sus numerosas lagunas, que serían rellenada en 1882 con la publicación por Moritz Pasch de la primera axio matización lógicamente satisfactoria de la geometría euklídea. diversos matemáticos de la escuela italiana –Pieri, Veronese Peano, etc.– habían empezado a propugnar explícitamente un concepción más abstracta del método axiomático. Todos esto fermentos culminaron en 1899 con la publicación por Hilber de sus *Grundlagen der Geometrie*.

Con Hilbert el nuevo método axiomático alcanza su madurez, al menos respecto a la práctica del mismo. En el capítulo primero de los *Grundlagen der Geometrie* presenta los axiomas de la geometría euklídea, divididos en cinco grupos (de incidencia, de orden, de congruencia, de paralelas y de continuidad). Aquí no se hace uso de intuición ni conocimiento previo ninguno, sino que lo único que es lícito suponer de los puntos, rectas y planos, etc., es lo que explícitamente se dice de ellos en los axiomas. A la inversa, cualquier sistema de cosas de las que se pueda decir lo mismo que los axiomas dicen de los puntos, rectas, etc. puede considerarse como un modelo de geometría. Como Hilbert indica a Frege en su carta del 29-12-1899: "Cada teoría no es sino un tinglado o esquema de conceptos junto con ciertas relaciones necesarias entre ellos, y sus elementos básicos pueden ser pensados arbitrariamente. Si entiendo por puntos, etc. cualquier sistema de cosas, por ejemplo el sistema formado por amor, ley, deshollinador, etc. y considero que todos mis axiomas resultan válidos para esas cosas, entonces también resultan válidos para esas cosas mis teoremas, como, por ejemplo, el de Pythagoras. Con otras palabras: cada teoría puede ser aplicada a una infinidad de sistemas de elementos básicos."[10]

Grundlagen der Geometrie aportó muchas y notables novedades a la geometría, desde el desarrollo de la geometría plana, y en especial de la teoría de las proporciones, con independencia del axioma arximediano, cuya prescindibilidad mostró Hilbert, hasta las pruebas de consistencia e independencia ya aludidas, pasando por importantes resultados sobre los teoremas de Desargues y de Pascal. Con la publicación de esta obra se impuso el nuevo método axiomático, y ello a pesar de que Hilbert no exponía en absoluto en qué consistía este método , limitándose a aplicarlo sin comentarios. Pero, como ha señalado Freudenthal, "en el ejemplo profundamente elaborado de una teoría axiomática, como lo son los *Grundlagen*, hay una fuerza de convicción infinitamente mayor que en las exposiciones filosóficas y programáticas..."[11]

Frege, analista del método hilbertiano.

Frege, que se oponía frontalmente al nuevo método axio mático, acompañó (sobre todo en sus artículos de 1906) sus críti cas de análisis frecuentemente iluminadores y profundos de aspec tos del mismo, análisis muy superiores a cuanto el mismo Hilber había dicho de su propio método.

Así, analizando el funcionamiento de las palabras "pun to", "recta", etc. en la geometría axiomática de Hilbert, Frege s da cuenta de que dichas palabras son como lugares vacios que sir ven para expresar generalidad, lo mismo que ocurre con las letra en el álgebra. E incluso llega a proponer y ejemplificar el uso d letras para indicar tales lugares, tal y como haríamos ahora. "S las palabras "punto", "recta", etc. no designan nada, sino que s limitan a indicar generalidad como las letras en la aritmética sería muy útil para una más clara comprensión de la situació que empleásemos efectivamente letras para esa finalidad. Vamos estipular lo siguiente: En vez de "el punto A está en el plano α' diremos "A está en la relación-p con α". En vez de "el punto A está en la recta a" diremos "A está en la relación-q con a". En ve de "A es un punto" diremos "A es un π" ".[12]

Analizando las múltiples interpretaciones a que Hilber somete sus conceptos, Frege propone comparar la teoría axiomá tica de Hilbert con un sistema de ecuaciones con varias incógnitas Cada sistema de conceptos que satisface la teoría es como una so lución de esas ecuaciones.[13] Con esto Frege se acerca mucho a l posterior aclaración de la situación por Tarski en función del con cepto de modelo. Pero Frege se deja llevar por su espíritu polémi co, preguntándose: "¿Quién nos dice que este sistema de ecuacio nes tenga alguna solución y que ésta sea unívoca?"[14] Que el siste ma tiene alguna solución debiera estar claro para Frege, pues Hil bert mismo la ha presentado en el modelo aritmético que le sirv para probar su consistencia. Pero la solución no es, ni pretend ser, unívoca. Precisamente en la multiplicidad de soluciones, in terpretaciones o modelos ve Hilbert –y con él toda la matemátic posterior– la principal ventaja del nuevo método axiomático.

Frege es un crítico implacable del uso más bien confun

dente que Hilbert hace de las palabras "definir" y "definición", que tan pronto emplea en el sentido de definiciones nominales explícitas –como cuando define el triángulo– como en el sentido de determinación mediante los axiomas. Contra las definiciones explícitas Frege no tiene nada: son meras estipulaciones. Pero se niega a aceptar que los axiomas definan –implícitamente, se diría luego, aunque la expresión no es de Hilbert– los conceptos (de primer orden) de *punto*, *recta*, *plano*, *...incide con...*, *...es congruente con...*, *...está entre... y...*, como pretendía Hilbert. En esto tenía razón Frege. Pero Hilbert veía claro que con sus axiomas algo quedaba definido, aunque no sabía expresarlo bien. El propio Frege se lo articuló mejor en su carta del 6 de enero de 1900, cuando le escribe: "Me parece que lo que usted en realidad quiere definir son conceptos de segundo orden, pero que usted no los distingue claramente de los de primer orden".[15] En efecto, los axiomas de Hilbert definen algo –como él decía–, pero lo que definen –y no implícita, sino explícitamente– no son los conceptos de primer orden de punto, recta, etc., sino el concepto de segundo orden de espacio euklídeo, o, como hoy diríamos, la estructura abstracta de espacio euklídeo.

Aquí como en tantas otras cosas Frege podía hacer aportaciones esenciales al desarrollo, aclaración y explicitación del nuevo método axiomático, con lo que se hubieran quemado etapas que luego costaría arduos esfuerzos y largo tiempo recorrer. Pero el carácter polémico y huraño de Frege, unido a una cierta altivez de Hilbert, condujeron la polémica al estéril marasmo en que acabó.

Consistencia.

En el capítulo segundo de sus *Grundlagen* ofrece Hilbert una prueba de la consistencia de sus axiomas, indicando un modelo numérico, es decir, un sistema de cosas que satisfacen todos los axiomas de la teoría y donde los puntos son ciertos pares de números algebraicos, las rectas, ciertos tríos de números algebraicos, donde la incidencia de una recta con un punto quiere decir la vali-

dez de una cierta ecuación numérica, etc. Con esto queda probada la consistencia de los axiomas, no la consistencia absoluta, claro, pero sí la consistencia relativa al análisis matemático.

La falta de comprensión por Frege del nuevo método se manifiesta en sus críticas a la prueba de consistencia de Hilbert, a quien echa en cara el cambio de significado de palabras como "punto", que en el libro de Hilbert tan pronto significan punto como par de números algebraicos (que es algo muy distinto), etc. Hilbert, por el contrario, ve en esa multiplicidad de interpretaciones la principal ventaja del nuevo método axiomático.

Frege considera completamente inútil ofrecer una prueba de consistencia de los axiomas, pues la consistencia se sigue de la verdad y los axiomas son por definición verdaderos. Frege escribe a Hilbert: "Llamo axiomas a los enunciados verdaderos, pero indemostrados... De la verdad de los axiomas ya se sigue que estos no se contradicen entre sí. Por tanto esto no requiere prueba alguna adicional".[16] Como señala Dummett,[17] no deja de resultar irónico que Frege dijera esto precisamente poco antes que Russell descubriese que los axiomas del propio Frege eran contradictorios. Pero Frege mantuvo hasta el final su concepción tradicional de la verdad de los axiomas y de la superfluidad de las pruebas de consistencia de los mismos.

En su carta de respuesta a la citada de Frege, Hilbert responde a la objeción fregeana de que no es necesario probar la consistencia de los axiomas, pues ésta se sigue de su verdad: "Siempre que yo pienso, escribo y hablo sobre estos temas, cada vez digo precisamente lo contrario: Si los axiomas arbitrariamente establecidos, junto con sus consecuencias, no se contradicen entre sí, entonces son verdaderos, entonces existen las cosas definidas por los axiomas. Este es para mí el criterio de la verdad y de la existencia".[18] La manera de expresarse de Hilbert no es correcta. Si los axiomas no son contradictorios, son consistentes, pero no verdaderos. Los axiomas abstractos en el sentido de Hilbert no son el tipo de entidad de la que pueda predicarse la verdad o falsedad. ¿Qué decir de su segunda afirmación, la de que de la consistencia de los axiomas se sigue —en terminología actual— la existencia de un modelo? Hoy sabemos que toda teoría consistente de primer

orden posee un modelo. Por tanto Hilbert tenía parte de razón. Pero no tenía toda la razón, pues su geometría axiomatizada era una teoría de segundo orden (por el axioma de continuidad) y no ocurre que toda teoría consistente de segundo orden tenga un modelo. De todos modos, si aceptamos modelos generales no-standard de segundo orden, entonces sí que también cada teoría consistente de segundo orden tiene un modelo, pero es dudoso que Hilbert los aceptase o pudiese pensar siquiera en ellos.

Dummett ha escrito recientemente que "cuando nos las habemos con una teoría genuina, es decir, una para la que tenemos una interpretación determinada, bajo la cual creemos que sus axiomas son verdaderos, no tiene sentido hablar de que encontramos un tal modelo (es decir, uno que sirva para probar su consistencia), pues ya tenemos un modelo".[19] Esto parece una defensa de la postura de Frege, pero no lo es. Dummett se refiere a la aritmética, no a la geometría. Y en el caso de la geometría euklídea, que es el que nos ocupa, no poseemos tal modelo (el candidato más obvio, que sería el espacio físico, no lo es o al menos es muy discutible que lo sea). De ahí el interés en buscar un tal modelo en zonas más seguras, como pueda ser el análisis matemático (restringido a números algebraicos).

Independencia.

Su concepción abstracta del método axiomático permite a Hilbert ofrecer pruebas de independencia de sus axiomas, probando que cada axioma es independiente de los demás mediante la indicación de un sistema que satisface a los demás axiomas, pero no a aquél cuya independencia se trata de probar. Con lo cual, al tiempo que prueba la independencia del axioma de las paralelas, prueba la consistencia de la geometría no euklídea (relativa a la euklídea). El proceder de Hilbert en sus pruebas de independencia es irreprochable, pero Frege no las aceptaba, pues le echaba en cara el uso de modelos en que ningún axioma resultaba falso, lo cual sería absurdo, pues un axioma no puede ser falso.

En 1900 y 1903, Frege se limita a rechazar las pruebas hil-

bertianas de independencia. Pero luego dedica mayor atención al tema y en sus artículos de 1906 llega a hacer propuestas constructivas al respecto. Empieza por definir la independencia de una idea respecto a otras cómo la imposibilidad de inferir la primera a partir de las últimas en un número finito de pasos.[20] (Esto, sabemos hoy, sólo es aceptable si el cálculo es suficiente –o semánticamente completo–, lo cual no es el caso del de Frege ni de ninguno de segundo orden.)

Luego Frege, adelantándose a Tarski, constata que con las pruebas de independencia se inicia una nueva actividad en la matemática. "¿Cómo podemos probar la independencia de una idea respecto de un grupo de otras ideas? Lo primero sobre lo que hay que llamar la atención es que con esta pregunta penetramos en un territorio que hasta ahora ha sido ajeno a la matemática. Pues aunque la actividad matemática como la de cualquier otra ciencia se realiza mediante ideas, las ideas mismas no son por lo demás objeto de su consideración. También la independencia de una idea respecto a un grupo de ideas es distinta de las relaciones que normalmente son objeto de la investigación matemática..."[21]

A continuación Frege propone un método para probar la independencia de ideas.[22] El método para probar que una idea a es independiente de n ideas $\beta_1 \ldots \beta_n$ consiste en sustituir las constantes no-lógicas que aparecen en $a, \beta_1 \ldots \beta_n$ por otras constantes distintas de la misma categoría tales que $\beta_1 \ldots \beta_n$ se transforman en ideas verdaderas y a en una idea falsa. Lo cual, como ya señaló Steiner,[23] es equivalente al proceder hilbertiano, aunque Frege parece no haberse dado cuenta de ello. En cualquier caso aquí abandonó sus por lo demás muy prometedoras reflexiones sobre el tema.

Deducción.

En una teoría axiomática abstracta los teoremas se prueban a partir de los axiomas según reglas de inferencia establecidas y sin tener en cuenta para nada las posibles interpretaciones de los mismos. Lo único que una tal prueba nos garantiza entonces –si

las reglas son correctas– es que cada interpretación que satisfaga los axiomas –que los convierta en ideas verdaderas– satisfará también los teoremas –los convertirá igualmente en ideas verdaderas–. Esta manera abstracta y formal de proceder es descrita correctamente por Frege "como si hubiera que probar una mera formulación que no exprese idea alguna, y como si luego hubiera que asignar a esa formulación ideas distintas en dominios distintos". Pero a continuación añade: "¡absurdo! Una mera formulación sin contenido no puede ser probada".[24]

Frege no admite las pruebas abstractas por dos razones. En primer lugar, porque parten de axiomas abstractos o –como él dice– pseudoaxiomas, que no expresan idea alguna, mientras que una inferencia sólo puede partir de una idea y llevar a otra. "De que los pseudoaxiomas no expresan idea alguna se sigue además que no pueden ser premisas de una cadena de inferencias... Con los pseudoaxiomas no tenemos todavía ninguna idea y por lo tanto tampoco premisa alguna".[25]

En segundo lugar Frege no acepta la inferencia basada en las solas reglas de inferencia, capaces de aplicarse a meras formulaciones, sino que exige que la inferencia se base en actos psíquicos de juicio. "Una inferencia no pertenece al campo de los signos, sino que es un acto de enjuiciamiento (Urteilsfällung) que se realiza sobre la base de juicios anteriores según leyes lógicas. Cada premisa es una idea reconocida como verdadera y en el juicio inferencial se reconoce igualmente una cierta idea como verdadera".[26] Como ha señalado Resnik,[27] de ahí se sigue que no se puede hacer una inferencia a partir de una premisa cuya verdad no se reconoce y que la inferencia lógica pierde su intersubjetividad. Si fulano acepta α como verdad, puede inferir $\alpha \vee \beta$ a partir de α. Si mengano no acepta α como verdad, no puede inferir $\alpha \vee \beta$ a partir de α. La inferencia lógica pasa así a depender de hechos psíquicos subjetivos, tales como el de que alguien acepte o no la verdad de una idea. Como el mismo Resnik ha indicado,[28] con esto cae Frege en el psicologismo, que él tanto había combatido, y abandona sin darse cuenta su principio de separación tajante entre lógica y psicología. (Y además, como ha señalado P. Geach,[29] en el suplemento a *Grundgesetze II* el mismo Frege se ve obligado

a realizar –y realiza– inferencias a partir de premisas no aseveradas).

Es curioso que Hilbert, empleando palabras cargadas de significado intuitivo –"punto", "recta", etc.–, pretenda emplearlas como signos vacíos de significación, *inhaltsleer*, y que, careciendo de un cálculo deductivo o de reglas de inferencia explícitamente formuladas, pretenda proceder de un modo formal y abstracto en sus deducciones, mientras que Frege, empleando signos y expresiones formalizadas, pretende escribir enunciados de significación unívoca, *inhaltlich*, y, disponiendo de un cálculo deductivo formal perfectamente desarrollado, pretenda limitarse a registrar la cadena de juicios por la que un sujeto va reconociendo la verdad de ciertas ideas.

En realidad Frege podría haber aportado a las deducciones formales abstractas de Hilbert el soporte de un sistema explicitado de reglas de inferencia que aquéllas requerían para su perfección. Pero Frege prefirió polemizar, en vez de colaborar en la empresa hilbertiana, y Hilbert no echó mano del cálculo de Frege, sino que acabó desarrollando el suyo propio treinta años más tarde, aunque reconociendo la primacía de Frege en este campo.

Teorías concretas y abstractas.

La polémica resultó estéril, a pesar de que entre sus dos protagonistas ya poseían todos los prerrequisitos necesarios para zanjarla mediante un salto hacia adelante. Pasaron los años, Frege murió y Hilbert acabó dándose cuenta de que en realidad Frege y él habían estado hablando de cosas distintas. Así, en la introducción al tomo I de sus *Grundlagen der Mathematik*,[30] publicado en 1934, Hilbert distingue claramente entre lo que llama allí *inhaltliche Axiomatik* y *formale Axiomatik*, o, como diríamos nosotros, entre teorías concretas y teorías abstractas. Cuando él había hablado antes de teoría se refería siempre a las teorías abstractas, mientras que Frege lo hacía a las concretas. Por eso no se entendían y la polémica fue un diálogo de sordos.

Según Hilbert, el desarrollo consecuente del método axio-

mático conduce a las teorías abstractas, tanto en la matemática como en la física. Ya en su carta a Frege del 29-12-1899 Hilbert señala que "naturalmente todos los teoremas de una teoría electromagnética son también válidos para cada sistema de cosas que pongamos en lugar de la electricidad, el magnetismo, etc., siempre que resulten satisfechos los correspondientes axiomas."[31] Y 35 años más tarde, en *Grundlagen der Mathematik*, pone como ejemplos de teoría axiomática abstracta, junto a la geometría euklídea, la mecánica de Newton y la termodinámica de Clausius.[32] E incluso postula la necesidad de probar la consistencia de las teorías abstractas de la física mediante la indicación de modelos aritméticos de las mismas.[33]

Pero en definitiva ¿qué es una teoría abstracta y qué es una teoría concreta? ¿En qué se diferencian? La ontología fregeana puede ayudarnos a responder a esta cuestión.

Como es bien sabido, las categorías fundamentales de la ontología de Frege son las de objeto y función.[34] Todo lo que hay o es objeto o es función. Un objeto es algo completo o saturado *–gesättigt*. Una función es algo incompleto o insaturado *–ungesättigt–*. Pero al añadir un objeto (el argumento) a la función (monaria), la completamos o saturamos, obteniendo así otro objeto (el valor de esa función para el primer objeto). Frege exigía que la función estuviese determinada o definida para todos los objetos sin excepción, es decir, que asignase un valor a cada uno de ellos. De todos modos esa exigencia representa una complicación innecesaria e inesencial de su concepción. De hecho nos basta con que la función esté definida para los objetos de un ámbito o dominio determinado, su dominio de definición.

Una teoría abstracta es homóloga con un sistema (o entidad formada en el caso más sencillo por una clase no-vacía –su universo– y una serie de relaciones y funciones sobre esa clase) cuando tiene tantos conceptos abstractos relacionales y funcionales como relaciones y funciones tiene el sistema y cuando los correspondientes números arios son los mismos.

Haciendo uso de las categorías ontológicas fregeanas, podríamos decir que una teoría concreta es un determinado objeto, a saber, un conjunto de ideas (verdaderas o falsas) sobre un

cierto sistema. Una teoría abstracta, por el contrario, no sería u objeto, sino una función, a saber, una función que tiene como d minio de definición el conjunto de los sistemas homólogos co ella y tal que a cada sistema homólogo aplica unívocamente un teoría concreta determinada. A la teoría concreta que la teor abstracta aplica a un sistema dado se la llama también la inte pretación de esa teoría abstracta en ese sistema.

Una teoría abstracta es una función compuesta. Cada un de las fórmulas que la componen es a su vez una función qu a cada sistema homólogo aplica unívocamente una idea. Segú que esa idea sea verdadera o falsa, decimos que el sistema satisf ce o no esa fórmula. El conjunto de las ideas que las diversas fó mulas de la teoría abstracta aplican a un sistema determinad constituye precisamente la teoría concreta que esa teoría abstra ta aplica a ese sistema (o, equivalentemente, la interpretación d esa teoría abstracta en ese sistema). Y si la teoría concreta aplic da por la teoría abstracta es verdadera (es decir, si todas sus ide lo son), entonces decimos que ese sistema es un modelo de es teoría abstracta.

Como vemos, no sólo a nivel sintáctico, metodológico semántico, sino incluso a nivel ontológico Frege poseía los instru mentos conceptuales para obtener una clarificación del métod axiomático abstracto. Desde su polémica con Hilbert ha llovid mucho y mucho se ha progresado. Pero la completa clarificació de lo que sea una teoría abstracta y una concreta y de las interr laciones entre ambas –tanto en la matemática (donde las cosas s han aclarado bastante, gracias al desarrollo de la teoría de mod los) como en la física (donde el asunto apenas empieza a ser inve tigado) y aún en otros campos– sigue constituyendo un reto pa cualquier filosofía rigurosa de la ciencia.

NOTAS

[1] D. Hilbert: *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig 1899. (10 edición, B. G. Teubner, Stuttgart 1972).

[2] La correspondencia entre H. Liebmann y Frege está recogida en G. Frege: *Wissenschaftlicher Briefwechsel* (ed. por G. Gabriel, H. Hermes, F. Kambartel, C. Thiel y A. Veraart), Felix Meiner Verlag, Hamburg 1976, p. 147-151.

[3] La correspondencia entre D. Hilbert y G. Frege está recogida en G. Frege: *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, Felix Meiner Verlag, Hamburg 1976, p. 55-80.

[4] G. Frege: *Über die Grundlagen der Geometrie*. Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, vol 12 (1903), p. 319-324 y 368-375. Reimpreso en G. Frege: *Kleine Schriften* (ed. por I. Angelelli), G. Olms. Hildesheim 1967, p. 262-272.

[5] A. Korselt: *Über die Grundlagen der Geometrie*. Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, vol. 12 (1903), p. 402-407.

[6] G. Frege: *Über die Grundlagen der Geometrie* (I, II y III). Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, vol. 15 (1906), p. 293-309, 377-403 y 423-430. Reimpreso en G. Frege: *Kleine Schriften* (ed. por I. Angelelli), Hildesheim 1967, p. 281-323.

[7] Véase, por ejemplo, la carta de C.F. Gauss a F.A. Taurinus de 1824.

[8] G. Frege: *Über Euklidische Geometrie*. Publicado póstumamente en G. Frege: *Nachgelassene Schriften* (ed. por H. Hermes, F. Kambartel y F. Kaulbach), Felix Meiner Verlag, Hamburg 1969, p. 182-184.

[9] G. Frege: *Die Grundlagen der Arithmetik*. Breslau 1884, p. 101. Reimpreso en G. Olms Verlag, Hildesheim 1977.

[10] G. Frege: *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, Hamburg, 1976, p. 67.

[11] H. Freudenthal: *Die Grundlagen der Geometrie und die Wende des 19. Jahrhunderts*. Mathematisch-Physikalische Semesterberichte, vol. 7 (1961), p. 16-17.

[12] G. Frege: *Über die Grundlagen der Geometrie, II*. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, vol. 15 (1906), p. 388. Reimpreso en G. Frege: *Kleine Schriften* (ed. por I. Angelelli), Hildesheim 1967, p. 304-305.

[13] G. Frege: *Über die Grundlagen der Geometrie*. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, vol. 12 (1903), p. 370. Reimpreso en G. Frege: *Kleine Schriften*, Hildesheim 1967, p. 268.

[14] ibidem.

[15] G. Frege: *Wissenschaftlicher Briefwechsel*. Hamburg 1976, p. 74.

[16] G. Frege: *Wissenschaftlicher Briefwechsel*. Hamburg 1976, p. 63.

[17] M. Dummet: *Frege on the Consistency of Mathematical Theories*. En M. Schirn (ed): *Studien zu Frege I. Logik und Philosophie der Mathe-*

matik. Frommann-Holzboog. Stuttgart 1976, p. 241.

[18] En G. Frege: *Wissenschaftlicher Briefwechsel*. Hamburg 197 p. 66.

[19] M. Dummett: *Frege on the Consistency of Mathematical Theori* En M. Schirn (ed): *Studien zu Frege I. Logik und Philosophie der Math matik*. Stuttgart 1976, p. 242.

[20] G. Frege: *Über die Grundlagen der Geometrie III*. Jahresberic der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, vol. 15 (1906), p. 423-424. R impreso en G. Frege: *Kleine Schriften*, Hildesheim 1967, p. 318.

[21] ibidem. Reimpreso en G. Frege: *Kleine Schriften*, p. 320.

[22] ibidem. Reimpreso en G. Frege: *Kleine Schriften*, p. 321-322.

[23] H.G. Steiner: *Frege und die Grundlagen der Geometrie, II*. Math matisch-Physikalische Semesterberichte, vol. 11 (1964), p. 42.

[24] G. Frege: *Über die Grundlagen der Geometrie, II*. Jahresberic der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, vol. 15 (1906), p. 385. Rei preso en G. Frege: *Kleine Schriften*, Hildesheim 1967, p. 302.

[25] ibidem. Reimpreso en G. Frege: *Kleine Schriften*, p. 306.

[26] ibidem. Reimpreso en G. Frege: *Kleine Schriften*, p. 303-304.

[27] M.D. Resmik: *The Frege-Hilbert Controversy*. Philosophy a Phenomenological Research, vol. 34 (1973-74), p. 386-403. Publicado alemán en M. Schirn (ed): *Studien zu Frege I. Logik und Philosophie d Mathematik*, Stuttgart 1976, p. 210.

[28] ibidem. Véase M. Schirn (ed): *Studien zu Frege I*. p. 211-212.

[29] P. Geach: *Second Order Quantification in Frege*. Actas del Si posio sobre Lógica y Filosofía en Frege, celebrado en Peñíscola en n viembre de 1979.

[30] D. Hilbert y P. Bernays: *Grundlagen der Mathematik I*, Spri ger-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1934 (2 edición, 1968), p. 2.

[31] G. Frege: *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, Hamburg 1976, p. 6

[32] D. Hilbert y P. Bernays: *Grundlagen der Mathematik I*, p.1.

[33] ibidem. p. 3.

[34] La ontología fregeana está claramente expuesta en sus artícul *Funktion und Begriff, Über Begriff und Gegenstand* y *Was ist eine Fun tion?*, reimpresos en *Kleine Schriften* (ed. por I. Angelelli) y traducidos español por U. Moulines en G. Frege: *Estudios sobre semántica*, Ariel, B celona 1971.