LA CUANTIFICACION DE SEGUNDO ORDEN DE FREGE

P.T. Geach
University of Leeds

En primer lugar debo explicar una cuestión terminológica con el mero objeto de evitar una posible confusión. Lo que en el lenguaje de la lógica moderna se llaman cuantificaciones de *primer* orden y de *segundo* orden corresponden respectivamente a las expresiones funcionales de Frege para una función de *segundo* y de *tercer* nivel *(Stufe)*. Creo que una simple mención de esto será suficiente: no hay necesidad de explicar aquí la taxonomía de las funciones y expresiones funcionales de Frege.

Frege introdujo por vez primera la cuantificación de segundo orden en la *Begriffsschrift*, junto con la cuantificación de primer orden. En esta obra la utilizó esencialmente para definir la ancestral de una relación dada, tópico al cual regresaremos al final de este artículo. Pero si bien las derivaciones formales por medio de este recurso, que nos proporcionan un buen número de teoremas sobre ancestrales, son una suprema manifestación del genio de Frege, sus propias explicaciones son muy insatisfactorias; hasta cierto punto, la diferencia esencial entre la cuantificación de primer orden y de segundo orden podría no existir para Frege. En sus demostraciones formales no hay confusión: por el contrario, la aserción de van Heijenoort me parece que es simplemente errónea. (Me alegro de saber que en este punto de la interpretación el Profesor Christian Thiel comparte mi opinión.) Pero esto no remedia el desliz de la explicación de Frege con respecto a lo que está haciendo.

Incluso en los *Grundgesetze* hay deslices expositivos. En esta obra, la distinción entre objeto y concepto está ciertamente

rigurosamente trazada, y esto debe llevar consigo una distinción entre cuantificación de segundo orden sobre objetos y cuantificación de primer orden sobre conceptos. Pero ni el uno ni el otro tipo de cuantificación están suficientemente explicados. La cuantificación de segundo orden se explica con una breve frase que nos dice que la explicación de la cuantificación de primer orden puede extenderse a la cuantificación de segundo orden 'in ähnlicher Weise'; Frege ni siquiera se molestó en añadir, como debía haber añadido: ¡*mutatis mutandis*! Y la explicación de la cuantificación de primer nivel ha suscitado a su vez la cuestión de si Frege la concibe como 'objetual' o 'sustitucional'; por tanto, su suficiencia puede ser puesta en duda (*Grundgesetze* vol. i, p. 49).

Creo que Frege puede ser defendido en este último punto: la duda ha surgido no por una falta de exactitud en la explicación de Frege, sino a causa de que la dicotomía 'sustitucional'/ 'objetual' es confusa. Por lo que yo sé, es a Gareth Evans[1] a quien hay que dar crédito en lo referente al esclarecimiento de esta discusión. Para exponer la cuestión Evans siguió mi propia vía: el término 'semántica sustitucional de la cuantificación' se emplea confusamente para cubrir dos tipos muy diferentes de semántica, un tipo en el que tenemos (¡teóricamente!) a nuestra disposición un lenguaje en el que *todo* objeto es *nombrado* si los cuantificadores lo contienen en su rango, y otro tipo en el que nuestro lenguaje puede extenderse a voluntad añadiendo un nombre de *cualquier* objeto *dado*. La semántica de Frege para la cuantificación de primer orden es claramente una semántica en la que cada objeto es supuestamente *nombrable*, no una semántica en la que todo objeto es supuestamente nombrado. La diferencia resulta más clara si consideramos, p. ej., los números reales: la suposición de que podemos extender a voluntad nuestro lenguaje añadiendo el nombre de *cualquier* número real es razonable, no siendo ningún número real por su naturaleza innombrable, pero es un esfuerzo teórico mucho mayor suponer que nuestros billetes, esto es, el lenguaje realmente utilizado en la matemática, sólo tienen valor gracias al oro inaccesible de los subterráneos del banco, un lenguaje en el

[1] Véase su artículo "Pronouns, Quantifiers and Relative Clauses (1)", *Canadian Journal of Philosophy*, 7 (1977), pp. 471-477.

que todos los números reales son nombrados de una vez.

Hecha esta distinción, no hay ninguna ambigüedad real por lo que toca a la manera en que Frege explica la cuantificación que liga variables de objeto, en el pasaje de los *Grundgesetze* antes citado. Una proposición universalmente cuantificada sólo es verdadera en el caso de que cada resultado de eliminar el cuantificador prenexo y reemplazar su variable ligada por un nombre no-vacío (*bedeutungsvoll*) de un objeto sea verdadero; Frege *no* requiere que el nombre así sustituido deba ser construible en su propio lenguaje formalizado o que esté disponible en algún lenguaje que podamos tratar teóricamente. En cuanto a la pretensión de manipular, incluso indirectamente, un lenguaje, p. ej., con tantos nombres como números reales existan, yo querría expresar un escepticismo extremo.

Frege habla de cualquier nombre no-vacío de un objeto, no de un objeto en algún dominio restringido: y hay quien encuentra objetable una tal cuantificación no restringida. (Se ha supuesto que yo mismo tengo tal objeción: debo decir una vez más que esto es un malentendido.) Es difícil encontrar una buena base para tales objeciones. La lógica de la cuantificación de primer orden está felizmente bajo nuestro control: se sabe que posee un procedimiento completo de demostración y que tal procedimiento ha sido formulado exactamente. El temor de que las cosas puedan funcionar de alguna manera mal si el universo de discurso es muy grande parece bastante pueril, y en cualquier caso carece evidentemente de fundamento; es sabido que todo *esquema* consistente de lógica de predicados de primer orden tiene una interpretación verdadera en la que los cuantificadores se restringen a los números naturales y se considera que las letras predicativas representan predicados (uniposicionales ó pluriposicionales) aplicables a los números naturales. Finalmente, el temor al círculo vicioso parece asimismo infundado si sólo tenemos la lógica de primer orden. Tal como se presenta, el principio de que no se puede elegir un objeto de un universo dado mediante un predicado que contenga cuantificación sobre todo objeto de ese universo es meramente absurdo. Considérese el ejemplo de Quine del hombre más típico de Yale, elegido de alguna forma entre los hombres de Yale

"sobre la base de los promedios de las puntuaciones incluyendo la suya propia" (*Set Theory and its Logic* 2nd edition, p. 243). Dummett y otros han restringido el principio con objeto de evitar estos resultados absurdos (el hombre típico de Yale *no* necesita ser una quimera lógica como el hombre promedio, y con una buena matemática estadística y unos hechos oportunos del caso puede incluso existir como se ha descrito); pero temo no encontrar el principio restringido plenamente inteligible, por no decir plausible.

Si de aquí volvemos a la cuantificación de segundo orden, la situación es naturalmente diferente. A la luz del conocimiento moderno, resulta ya claro que si desarrollamos la teoría de la cuantificación de segundo orden por analogía, *mutatis mutandis*, con la teoría de primer orden, perdemos el control y la visión general (*Uebersichtlichkeit* de Wittgenstein) que poseemos de la lógica de primer orden; ya no hay un procedimiento completo de demostración. En realidad, no podía esperarse que Frege previera que la esperada analogía entre la cuantificación de primer orden y la de segundo orden pudiera abatirse tan estrepitosamente; carecía del aparato conceptual para describir el derrumbamiento.

Lo más relevante para Frege es un derrumbamiento de la semántica 'sustitucional' para la cuantificación de segundo orden cuando intentamos llevar a cabo la esbozada prescripción de Frege de que esto se debe especificar 'similarmente' a como se hizo para la cuantificación de primer orden. Lo que ahora se cuestiona es el reemplazo de una variable *predicativa* ligada con un *predicado* efectivo: o un predicado efectivamente disponible o un predicado construible con los recursos de nuestro lenguaje, o, finalmente, un predicado que pueda ser *añadido* a nuestro lenguaje como una extensión de éste. No podemos tener la misma libertad de movimientos en el caso que nos ocupa que cuando se trata de la adición de un nombre. El lenguaje de la lógica matemática de Frege es lo que yo he llamado *shakespeariano*, por alusión a las líneas de *Romeo y Julieta*:

> ¿Qué es un nombre? Aquello que llamamos rosa
> Con cualquier otro nombre exhalaría la misma fragancia.

Los nombres de *Bedeutung* [referencia] común son intersustituibles *salva veritate*, tal como de acuerdo con este texto aparecen en el contexto "------ exhalarían fragancia". Añadir un nombre según el tipo de extensión que Frege considera no altera nuestra ontología de objetos. Pero el añadir un nuevo predicado altera nuestra *ideología*, en términos de Quine, es decir, altera los recursos descriptivos de nuestro lenguaje: esto podría ser grave. Por ejemplo, como Quine y yo hemos señalado, extendiendo nuestra propia ideología podemos hacer los objetos descriptivamente discernibles cuando en el lenguaje no extendido fueran descriptivamente indiscernibles; y esto puede afectar a nuestra concepción de la identidad.

Creo que este punto es importante, pero no me detendré en él. Deseo más bien subrayar que la amenaza de un círculo vicioso es para mí una amenaza baldía, un mero tigre de papel, cuando sólo afecta a la cuantificación de primer orden, pero es muy fuerte cuando entramos en la cuantificación de segundo orden. En el § 31 del vol. 1 de los *Grundgesetze*, Frege intenta una demostración por inspección exhaustiva de casos y recursión de que toda oración que está bien formada según sus reglas tiene tanto *Sinn* [sentido] (condiciones de verdad exactas) como *Bedeutung* (un valor de verdad definido). Pero un análisis minucioso de este pasaje revelaría que la supuesta inspección exhaustiva de casos de Frege no se cumple: en un subcaso que él pasó por alto no terminaba el proceso de obtener las condiciones de verdad; por el contrario, el valor de verdad de una cláusula dependía del de otra cláusula de la misma forma, y así ad infinitum. Es precisamente cuando los cuantificadores de segundo orden intervienen cuando tropezamos con esta dificultad, y este hecho es lo que dejó una abertura fatal en la defensa de Frege contra las antinomias.

Me agradaría reconocer públicamente las fuentes de las observaciones de mi último parágrafo, el cual expone en forma resumida el contenido de un artículo que una vez leí y que ahora no sé dónde se encuentra. Como ejercicio provechoso, el lector puede intentar descubrir por sí mismo el lugar en donde Frege interrumpe su asignación recursiva de condiciones de verdad. En su lugar, mostraré directamente cómo un uso dudoso de la cuantifi-

cación de segundo orden puede ser utilizado para generar lo que constituye esencialmente una derivación fregeana de una forma de la famosa antinomia de Russell.

Supóngase como forma no analizable de expresión:

x es un rango de z para el que F(z)

Me cuido mucho de no decir "*el* rango.....", para evitar describir lo que parecería una descripción definida unida a "x" por un "es" de identidad: pues deseo evitar problemas sobre semántica de la identidad y de términos singulares complejos. Además evito, al igual que Frege, un término tal como "conjunto" o "clase", porque ello sugeriría erróneamente (para él y tambien para mí) que una clase se considera construída a partir de sus miembros, como un bosque a partir de sus árboles o un juego de té a partir de las bandejas, tazas y platos. El axioma del *Wertverlauf* [curso de valores] de Frege, restringido a conceptos, será que:

para todo x, F(x) sii G(x)

solamente es válido en el caso de que

para algún z, z es tanto un rango de x para el que F(x) como un rango de x para el que G(x)

sea válido. En rigor, éste es un *esquema* de axioma: pues hasta ahora no hemos utilizado un cuantificador que ligue letras predicativas.

Ello se lleva a cabo solamente en el siguiente paso. Definimos el predicado 'Russ (ξ)' (que sugiere que 'ξ es russelliano') como sigue:

Para algún F, ξ es un rango de x para el que F(x), y no F(ξ).

Por el esquema de axioma de Frege, puesto que obviamente

(1) para todo x, Russ (x) sii Russ (x)

podemos inferir:

(2) para algún z, x es un rango de x para el que Russ (x).

Si (2) es verdadero, entonces lo siguiente debe ser verdadero para *alguna* lectura de "*R*" como nombre propio:

(3) R es un rango de x para el que Russ (x).

Inversamente, si (3) lleva a contradicción sea cual sea la interpretación de "R" como nombre, entonces quizás (2) no pueda ser verdadero.

Nuestra estrategia consiste ahora en mostrar que tanto "Russ (R)" como "no Russ (R)" llevan a contradicción, si suponemos (3).

Supóngase (4) Russ (R).

Entonces por definición

(5) Para algún F, R es un rango de x para el que F(x), y no F(R).

Puesto que esto vale *para alguna* interpretación de "F", supóngase que "Φ ( ) " representa a una tal interpretación. Entonces

(6) R es un rango de x para el que Φ (x), y no Φ (R).

Pero por (3) Russ (R)

(7) No: para todo x, Russ (x) sii Φ (x).

Así, por el esquema de axioma de Frege:

(8) No: para algún z, z es un rango de x para el que Russ (x) y z es un rango de x para el que Φ (x).

Por otro lado, por (3) y (6)

(9) R es un rango de x para el que Russ (x) y R es un rango de x para el que Φ (x).

(8) y (9) son claramente inconsistentes; de este modo (6) lleva a contradicción como quiera que interpretemos "Φ ( )"; y por ello (4) lleva a contradicción

Intentémoslo ahora con:

(10) No Russ (R).

Entonces por definición:

(11) Para cualquier F: si R es un rango de x para el que F(x), entonces F(R).

Supongamos ahora *explícitamente* que el concepto representado por el predicado "Russ (ξ)" cae bajo la cuantificación "Para cualquier F". Como vimos, Frege supone esto simplemente de modo implícito, llevando a cabo la sustitución apropiada (de un predicado no abreviado, pero que involucra, al igual que "Russ (ξ)", el uso de una cuantificación sobre conceptos). Así obtenemos:

(12) Si R es un rango de x para el que Russ (x), entonces Russ (R).

Pero (3) R es un rango de x para el que Russ (x) y ahora estamos suponiendo (10) No Russ (R). (12), (3) y (10) constituyen nuevamente un conjunto evidentemente inconsistente; así, al igual que

(4) Russ (R), la suposición (10) No Russ (R) lleva a contradicción.

Al desarrollar esta antinomia de los *Wertverläufe*, he partido del propio desarrollo de Frege de varios modos. He utilizado métodos de deducción natural en lugar de proceder de proposición aseverada a proposición aseverada; esto constituye un desacuerdo sustantivo con Frege, pero he preferido seguir la tradición aristotélica de que un argumento dialéctico con premisas no aseveradas es válido o inválido bajo las mismas condiciones que un argumento demostrativo con premisas aseveradas. (Pero, el propio Frege, bajo el impacto del descubrimiento de Russell, razona dialécticamente con su ideografía a partir de premisas no *aseveradas* en los *Grundgesetze*, vol. ii, Apéndice, pp. 256-7, ¡precisamente porque no está seguro de lo que asevera!) El utilizar como expresión primitiva una expresión para lo que Frege denominaría relación de nivel desigual entre un objeto y un concepto, no es tanto una divergencia cuanto la introducción de un estilo de designaciones singulares complejas de *Wertverläufe*; que Frege debe permitir que *exista* tal relación, es algo que está involucrado en la legitimidad de su propia notación. Finalmente no utilizó una ideografía sino el tipo de semi-castellano estilizado al cual traduciría las fórmulas de una ideografía si las leyera en voz alta; no es más que la diferencia lógica que existe entre una carta en taquigrafía y la misma carta mecanografiada, es decir, ninguna en absoluto.

De este modo, la antinomia puede ser bloqueada sosteniendo que, *en general*, no es válida la inferencia *de* una premisa con una cuantificación universal prenexa sobre conceptos *a* una conclusión en la que la variable predicativa es reemplazada por *el mismo* predicado concreto que emplea tal cuantificación de segundo orden. No se cómo especificar qué restricción es necesaria; pero en vista del regreso vicioso ya descubierto al expresar las condiciones de verdad para las fórmulas con cuantificadores de segundo orden, no es una mera sugerencia *ad hoc* decir que el sistema de Frege requiere una corrección precisamente en este punto. Por el contrario, las correcciones del axioma de los *Wertverläufe* dan la impresión de nada más que reparaciones *ad hoc*, que recuerdan las del propio Frege en el Apéndice de *Grundgesetze* vol. 2; hay simplemente una esperanza piadosa en que con estas condi-

ciones no aparecerá una nueva antinomia. (También aquí recibo con alegría una inesperada coincidencia con el Profesor Thiel de que lo que necesita modificación son las reglas de sustitución, antes que los axiomas de identidad y existencia de clases.)

Vale la pena investigar la cuestión de cómo comparar esta línea de pensamiento con el sistema ML de Quine y su uso de predicados 'estratificados' en sus reglas para el sistema. El sistema unicategorial de Quine se reemplaza fácilmente por un sistema bicategorial, en el cual la cuantificación sobre 'elementos' sigue siendo cuantificación de primer orden, pero la cuantificación sobre 'clases' se torna de segundo orden: de este modo, el "$(\exists x)(\exists y)(x \in y)$" de Quine, en donde "x" debe indicar un 'elemento' pero "y" no necesita indicarlo, se convierte en "$(\exists f)(\exists x)(f(x))$". Este cambio sería ciertamente para Quine un trivial asunto de estilo. Pero se necesita un cambio ulterior para traducir "$x \in y$" cuando tanto "x" como "y" indican "elementos"; debe aceptarse con toda seguridad la intelección de Frege, de que un rango se refiere directamente al concepto del cual es rango y no se construye a partir de los miembros. (Cualquier otra concepción lo haría ininteligible, p. ej., cómo la clase unidad de una clase plural difiere, como debe, de esa clase plural, de la cual *constaría* precisamente si las clases se construyeran a partir de los miembros.) De hecho, cuando "x" e "y" indiquen elementos, "$x \in y$" se reemplazará por "$(\exists f)(f(x) \,\&\, (z)\,\hat{y}\,(f(z))$", cuando utilice "$(z)\,\hat{y}\,(f(z))$" como abreviatura de "y es un rango de z para el que f(z)". *Tampoco* tendremos entonces: "$(\exists g)(\sim g(x) \,\&\, (z)\,\hat{y}\,(f(z))$", si "x" e "y" representan los mismos nombres de objetos: con la restricción sobre la sustitución de variables predicativas ligadas, la suposición fregeana acerca de la identidad de los *Wertverläufe* se hará sin restricción y excluirá esta posibilidad.

Obviamente el sistema total (corregido) de ML podría ser rediseñado en esta notación. Pero la cuestión de los predicados estratificados suscita ahora ciertas dudas. Aplaudo un rasgo general de ML: sigue las posibles teorías de conjuntos que Russell llamó teorías de zigzag, no la línea de las teorías de limitación-de-la-dimensión que ea ahora tan popular. Nuestras analogías sugieren que es necesaria una restricción sintáctica sobre la sustitución de

predicados, porque la limitación de la dimensión parecería una restricción natural de nuestras cuantificaciones sobre conjuntos solamente si nos dejáramos engañar por la imagen claramente errónea de una clase que se construye a partir de sus miembros como una pared a partir de ladrillos. (En Quine la restricción se parecerá más a una restricción sobre las interpretaciones permisibles de la letra predicativa esquemática de nuestro esquema de axioma inicial, que a una restricción sobre nuestra libertad de reemplazar la cuantificación universal sobre conceptos por alusión a algún concepto dado; aunque nuevamente no constituye esto una diferencia esencial.) Pero mientras que la estratificación aparece como una caracterización sintáctica simple y correcta de los predicados si se toma como primitiva la epsilon de la relación de pertenencia a una clase, la nueva expresión de este criterio con objeto de asegurar el mismo efecto para nuestra notación bicategorial llevaría a un resultado tosco; Wittgenstein aprobó que su traductor Ogden le hiciera decir que la lógica debe ser nítida porque establece el canon de nitidez.

Esta objeción estética puede reforzarse con una formal; ML tropieza con problemas en la inducción matemática. Exactamente aquí era donde Frege y nosotros confluíamos: los problemas proceden del uso de la cuantificación de segundo orden para definir la ancestral de una relación en términos de propiedades que son hereditarias para esa relación. Para los números naturales, la relación relevante es, por supuesto, la relación *sucesor (directo) de*. Ahora bien, en ML habrá dos versiones del predicado *número natural*, que pueden expresarse en vernáculo como sigue:

(A) miembro de toda *clase* a la cual pertenezcan cero y todos los sucesores de los miembros de esa clase;

(B) miembro de todo *elemento* al cual pertenezcan tanto cero como todos los sucesores de los miembros de ese elemento.

Por su aspecto, (A) es una caracterización más satisfactoria que (B), como se comprueba si lo reemplazamos por una forma directamente adaptada de nuestro sistema de segundo orden:

teniendo toda propiedad f(ξ) tal que: tanto f(O) como para todo y, si y es sucesor de algún z tal que f(z), en-

tonces f(y).

(B) amenaza con problemas respecto a la inducción matemática, en el caso de que una propiedad f(ξ) no tenga ninguna extensión perteneciente al universo de los elementos. Estos problemas podrían evitarse si de alguna manera pudiera demostrarse en ML que (A) tiene un elemento como extensión; pero la investigación de Rosser sobre la teoría de la demostración de ML ha mostrado, por el contrario, que la existencia de un elemento tal es demostrable en ML sólo si ML es inconsistente.*

Continuando con los problemas referentes a la manera en que se encuentra involucrada la lógica de segundo orden en la inducción matemática, resulta curioso recordar que mientras que (como Frege pensaba) el teorema 1) de los *Grundgesetze* introducía un artificio que eliminaría la necesidad de cualquier uso explícito futuro de la cuantificación de segundo orden, Frege utilizó sin embargo tal cuantificación en esa obra, de modo muy explícito, para definir la ancestral de una relación (vol, 1, pp. 60 y 138). Aquí como en otros lugares, el instinto lógico de Frege fué saludable e incluso profético.

Versión castellana de *Jesús Alcolea*

* Véase *Set Theory and its Logic*, 2nd edition, pp. 303-307.