JULIO REY PASTOR ANTE LOS CAMBIOS EN EL ÁLGEBRA DE SU TIEMPO

Luis Español
Universidad de La Rioja

Los primeros estudios monográficos sobre el álgebra en la obra de Julio Rey Pastor (1888-1962) se produjeron en 1983, con motivo del *I Simposio sobre Julio Rey Pastor* celebrado en Logroño[1], en el que P. Llorente (1985) mostró con acierto que[2] "JRP mantuvo, a lo largo de toda su vida, un concepto clásico de lo que es el Álgebra: el estudio de la resolución de las ecuaciones algebraicas", y que no debe ser considerado un algebrista, sobre todo como entendemos hoy ese calificativo, aunque era conocedor de la materia, ajena a sus especialidades, y sus contribuciones en algunas parcelas del álgebra clásica, sobre todo las más próximas al análisis, no son despreciables. Llorente analizó con detalle la evolución del libro *Lecciones de álgebra* —obra examinada también por Arenzana & Rodríguez Sol (1985)— pasando revista a las sucesivas ediciones corregidas y ampliadas que fueron apareciendo mientras se generalizaba el estudio de las estructuras algebraicas (el "álgebra moderna" característica de nuestro siglo) primero en la investigación y más tarde en la enseñanza superior. Estos dos trabajos son el punto de partida del que ahora presentamos, cuyo objetivo es completar los precedentes anteriores. Esta ampliación se va a producir tanto en los textos, aumentando el número de obras de JRP a considerar, cuanto en el contexto, examinando el álgebra reypastoriana en el decurso internacional y nacional de la disciplina.

Desde este punto de vista global también es un precedente el trabajo de Hormigón (1984), del mismo tiempo que los anteriores. La aportación algebraica de JRP es intermitente y se va produciendo durante la totalidad de su vida profesional,

1. Ver Español ed. (1985). El *II Simposio sobre Julio Rey Pastor* tuvo lugar en 1988 para celebrar el centenario de su nacimiento (Español ed., 1990).
2. Como hizo Llorente, en lo que sigue escribiremos JRP para abreviar el nombre de Julio Rey Pastor, que habrá que mencionar gran número de veces.

mientras en el álgebra internacional ocurren cambios muy radicales de objetivos y métodos, comprendidos en una nueva orientación de las matemáticas que Hormigón denomina *Paradigma hilbertiano.* Esta evolución ha sido definida por Corry (1996), en la materia que nos ocupa, como un cambio en la *imagen* del álgebra: el primer capítulo de este libro es otra referencia global fundamental para el trabajo que abordamos[3].

Finalmente, hay que afirmar desde el pricipio que nos fijamos más bien en el nivel de la enseñanza universitaria del álgebra y no el de la investigación puntera, aunque el poso de ésta se refleja en aquélla, pues es en ese escalón docente, en el que queda definitivamente fijada la imagen de la disciplina, donde se inserta la actividad algebraica de JRP. Nos referimos a los textos que realmente se imparten y a los que tienen nivel similar, aunque aparezcan al margen de la enseñanza oficial, como su modernización o alternativa. Advertimos también que este trabajo no incluirá detalles técnicos ni fórmulas matemáticas, aunque sí alguna terminología imprescindible para describir el contenido de las obras que vayan surgiendo.

Siendo la obra algebraica de JRP un proyecto universitario, lo primero que conviene clarificar es el álgebra que aprendió en sus años de formación, la medida en que las generaciones de catedráticos anteriores a JRP incorporaron a la universidad española los tratados europeos que marcaron la pauta algebraica durante la segunda mitad del XIX y los primeros años de nuestro siglo. Este será el contenido de la Sección 1. La Sección 2 se centrará en la relación del joven catedrático con el álgebra hasta 1924. Después de su doctorado geométrico en 1909, al preparar las oposiciones a la cátedra universitaria que alcanzó en 1911, JRP se enfrentó al "álgebra superior" que había estudiado como alumno pocos años antes, dentro de la asignatura Análisis Matemático, y lo hizo con el ánimo de mejorar su exposición dentro del esquema del programa vigente. Sus primeras lecciones dieron lugar pocos años después a las primeras ediciones de dos de sus textos universitarios más difundidos y repetidamente reeditados: *Elementos de Análisis algebraico* (Rey Pastor, 1917) y *Lecciones de álgebra* (Rey Pastor, 1924), que citaremos en lo que sigue, para abreviar, sólo con la primera palabra del título. En su obra de la primera época aparece también la teoría de grupos, vinculada a sus trabajos de geometría en la línea de Klein, y se pueden encontrar además ideas generales sobre álgebra en sus famosos discursos y conferencias del año 1915. En esta primera etapa, en la que se enfrenta a un sector de catedráticos, expone la teoría de ecuaciones hasta el teorema de irresolubilidad por radicales de Abel y se queda a las puertas de la teoría de Galois, la asignatura pendiente de la matemática española, a pesar de que JRP promocionó, con escaso éxito, el estudio de dicha teoría en los primeros años del Laboratorio y Seminario Matemático de la JAE.

3. Ver también Corry (1991) y los trabajos de Corry y Hormigón en Ausejo & Hormigón eds. (1996).

La segunda época a considerar, de la que trata la Sección 3, comienza en 1930 y termina en la década de los cincuenta, en la que se producen los últimos contactos de JRP con el álgebra. Desde que se fue a Argentina en 1921, JRP se dedicó fundamentalmente a tareas docentes y pedagógicas relacionadas con el primer curso de las enseñanza de las matemáticas para ingenieros y científicos, y también con los niveles básicos y medios de la educación general. A partir de 1925 empezó a dar cursos en Madrid y Buenos Aires sobre series divergentes y en 1928 fundó el Seminario Matemático Argentino e inició un nuevo periodo productivo en doctorado e investigación que llena las décadas de los treinta y los cuarenta. Son los años en los que se consolida el programa de Hilbert y en esa dirección, con la escuela de Emmy Noether, el álgebra cambia su fisonomía; hito simbólico de este cambio es el libro de van der Waerden (1930) que extendió por todo el mundo instruido el nuevo estilo algebraico presidido por las estructuras. Pero en este periodo la actividad algebraica de JRP se caracteriza, aunque hay otros asuntos, por la incorporación progresiva a las *Lecciones* de la teoría de Galois, con la colaboración decisiva de su discípulo predilecto R. San Juan, pero manteniendo la imagen del álgebra imperante en el cambio de siglo. En la década de los cincuenta JRP escribe sobre la historia de la matemática, del álgebra en particular, (Rey Pastor & Babini, 1951), entra en la Academia de la Lengua con un discurso titulado *Álgebra del lenguaje* (Rey Pastor, 1954) y completa las *Lecciones* con un capítulo sobre estructuras algebraicas, a la vez que en el prólogo se opone con firmeza al nuevo estilo formal del álgebra (Rey Pastor, 1957). No obstante, las alusiones al álgebra en el discurso académico son de corte estructuralista, asignando su papel a la noción de isomorfismo, y una cierta aceptación de la nueva corriente se aprecia también en algunos de sus trabajos de topología de los años cuarenta. Parece que su sentido histórico de la matemática y su recia formación juvenil le impidieron aceptar el álgebra de las estructuras a costa de arrinconar su venerada teoría de las ecuaciones reales y complejas, pero le importó menos ser moderno allí donde no había una profunda cepa histórica que arrancar. Por otra parte, la falta de competencia y el retraso en la modernización de los planes de estudios en España y Argentina le permitieron mantener sus libros con hegemonía en el mercado hasta la llegada, a mediados de siglo, de las traducciones de textos de álgebra moderna.

1. Textos de Álgebra anteriores a Rey Pastor

Siguiendo la costumbre de su maestro Z. García de Galdeano (1846-1924), práctica poco habitual entonces, JRP ofrecía gran número de referencias como fuentes de sus trabajos o para la ampliación posterior del estudio. En ese vasto conjunto bibliográfico no falta la sucinta selección de textos que la historiografía ha destacado como jalones básicos en la evolución de los tratados de álgebra desde mediados del siglo XIX. Los repasaremos en la primera parte de esta sección para examinar después su presencia en los textos nacionales anteriores a JRP.

(a) Textos europeos y americanos

Desde los años centrales del siglo, se escribieron libros de texto de álgebra seleccionando diferentes temarios para sintetizar los nuevos resultados alcanzados por las abundantes investigaciones que se venían realizando desde Lagrange. Por tratarse de trabajos de síntesis, lo importante es la selección que los autores hicieron de los contenidos que les proporcionaba la investigación algebraica contemporánea y la forma de presentarlos que eligieron. L. Novy (1973) ha estudiado con detalle estos progresos destacando al final de su obra los dos libros de síntesis que resultaron más influyentes, a saber, los conocidos tratados de álgebra de Serret (1849) y de Salmon (1859), que tienen objetivos diversos aunque presentan algunos temas comunes en sus contenidos más elementales.

El primero, que recoge los cursos de J.A. Serret (1819-1885) en la Sorbona sobre la teoría de ecuaciones, presentada como una rama del análisis matemático, se fue ampliando en sucesivas ediciones hasta constituir una obra en dos volúmenes, en el primero de los cuales están las dos primeras secciones de la obra y en el segundo otras tres. La primera edición del *Cours* de Serret apareció tres años después de que Liouville publicara los escritos inéditos de Galois y en la tercera, de 1866, aparece por primera vez en libro de texto la teoría de Galois. El contenido de esta tercera edición es el siguiente: (i) La primera sección contiene fracciones continuas, las funciones complejas necesarias para demostrar el teorema fundamental del álgebra, la teoría de la eliminación clásica (sin determinantes ni funciones simétricas), el estudio gausiano de las raíces de la unidad y la resolución numérica de ecuaciones, incluyendo el teorema de Sturm de 1829 y su uso para calcular el número de raíces complejas contenidas en el interior de un contorno dado. (ii) En la segunda sección se introducen las funciones simétricas y los determinantes, que se aplican a obtener nuevos métodos de eliminación y al análisis de las soluciones reales de una ecuación, incluyendo una forma todavía poco elaborada de la ley de inercia de Sylvester, tema en el que se incorporan algunas contribuciones de Hermite. (iii) La sección tercera es un fragmento de aritmética, que abarca las congruencias y las acotaciones de Tchebichef del teorema del número primo. La cuarta se dedica a los grupos de sustituciones, con un capítulo especial sobre las sustituciones dadas por funciones racionales lineales y su aplicación a cuestiones de la teoría de números. (iv) La última es la sección dedicada a la resolución algebraica de ecuaciones, que empieza por las ecuaciones de grados tres y cuatro, sigue con la demostración del teorema de Abel sobre la quíntica, reproduciendo una demostración de Wantzel, y con un estudio particular de las ecuaciones abelianas y de una ecuación de grado nueve asociada a los puntos de inflexión de una cúbica; el último capítulo lo forman cincuenta páginas dedicadas a las investigaciones de Galois, Hermite y Kronecker, añadidas en sucesivas ediciones, pero que no llegan a formar un cuerpo de doctrina elaborado de la teoría de Galois.

Por su parte, la obra de G. Salmon (1819-1904) se dirige hacia la teoría de invariantes, aspecto del álgebra superior muy vinculado con la geometría. Comienza tratando también, pero con un estilo distinto al de Serret, sobre determinantes, funciones simétricas y eliminación, lo que ocupa la tercera parte de la obra. El resto se dedica a los invariantes y covariantes de las formas algebraicas asociados a las transformaciones lineales, completado con las formas canónicas y haciendo aplicaciones de los métodos simbólicos. Con este contenido, Salmon recoge resultados de Cayley, Sylvester, Aronhold, Clebsh y Hermite, que expone con el método de largos y pesados cálculos propio de los primeros estadios de esta disciplina[4].

Las dos obras tuvieron una amplia difusión hasta los primeros años del siglo XX. La huella del libro de Serret en la matemática española es bien notoria, al igual que la de sus obras más elementales de álgebra y trigonometría para bachillerato; en cambio la influencia directa de Salmon fue menor. Las últimas ediciones del Serret no fueron mejoradas, por lo que se prolongó en el tiempo el uso de un libro que ya estaba desfasado en este punto (Kierman, 1971), al no incorporar las novedades producidas en su monumental tratado por Jordan (1870), discípulo de Serret, en el que los grupos alcanzan un papel central. La presentación de Jordan (1938-1922) fue seguida en Alemania por Netto (1882)[5], que incorpora el concepto de grupo cociente.

La pujanza de la escuela alemana de álgebra del último tercio del siglo se plasmó en un nuevo tratado que, en las postrimerías de la centuria, se convirtió en la síntesis estándar de esta disciplina, con un nivel de abstracción inferior al alcanzado por el autor en artículos de investigación previos, lo que se entiende por tratarse de un libro para la enseñanza. Como en el caso de Serret, el *Lehrbuch* de Weber (1895) se origina en la experiencia del autor como investigador y profesor universitario, incorporando los avances producidos en torno a Dedekind y Kronecker. H. Weber (1842-1913) reconoce que el libro de Serret era excelente cuando fue publicado, pero presenta el suyo como una puesta al día que permita al estudioso penetrar en el "álgebra moderna", en la que concedía particular importancia la teoría de grupos y la teoría de números. Aquí nos referimos tan sólo al primer volumen[6], en el que se recogen los temas que forman "la parte elemental del álgebra", expresión con la que el autor se refiere al "cálculo literal, las reglas para la determinación del número y del valor de las raíces de una ecuación y por último la exposición de la teoría de Galois". Comienza con una introducción en la que supone conocidos los números naturales y sus reglas de cálculo, para después, usando un lenguaje de conjuntos al estilo de Dedekind, generar las extensiones numéricas de los racionales y los reales, esta última mediante las cortaduras, y finalmente los números complejos. Termina la introducción afirmando que

4. En la segunda edición, aparecida en 1866, Salmon incluyó el cálculo de un invariante de la séxtica binaria que ocupó trece páginas del libro.

5. E. Netto (1846-1919) escribió varios libros de álgebra que fueron muy apreciados por JRP en su primer contacto con la disciplina, y los mencionó con frecuencia como referencias. Araujo escribió una breve necrológica de Netto en la *Revista Matemática Hispano-Americana* 2 (1920), p. 96.

6. El segundo, 1896, se dedicó a la teoría abstracta de grupos y el tercero, 1908, a las funciones elípticas y los números algebraicos, tema que ya había tratado en 1891. El primer volumen tuvo una segunda edición en 1898, de la que el mismo año se publicó una traducción francesa.

supone conocidas las reglas del "cálculo literal", que es "el procedimiento más general e importante del álgebra", tanto que "se le toma a menudo como sinónimo de álgebra"[7]; finalmente, afirma que "el fin del álgebra es resolver ecuaciones encontrando los valores numéricos que las verifican". El volumen está dividido en tres partes, la primera dedicada a los principios, la segunda a la resolución numérica de las ecuaciones algebraicas y la tercera a su resolución algebraica.

Los principios incluyen el estudio de: (i) Funciones enteras (polinomios) con coeficiente numéricos de una y varias variables, contemplando su divisibilidad y factorización en irreducibles, la interpolación y la diferenciación, así como las funciones racionales y su descomposición en fracciones simples. (ii) Determinantes y sistemas de ecuaciones lineales, incorporando el teorema de Rouché. (iii) Fórmulas de Cardano y teorema fundamental del álgebra, del que da dos demostraciones, una existencial y otra constructiva. (iv) Funciones simétricas y eliminación. (v) Ley de inercia de las formas cuadráticas reales y otras cuestiones básicas sobre transformaciones, invariantes y covariantes, tratados a la manera de Clebsh y Gordan.

La segunda parte contiene el material usual de la resolución numérica de ecuaciones reales, con los teoremas clásicos de acotación, separación y aproximación de raíces, pero incluye además el método de Gräffe para el cálculo de las raíces. Termina con dos capítulos particulares, uno dedicado a las fracciones continuas y su aplicación a la ecuación de Pell y a la aproximación de raíces reales, y otro que expone la teoría de Gauss de las raíces de la unidad sin relacionarla con la teoría de grupos.

La tercera, dedicada a la resolución algebraica de las ecuaciones reales y complejas, es la parte más novedosa del libro y en ella se expone por primera vez una manera completa y "moderna" la teoría de Galois a la manera de Kronecker. Entiende por cuerpo, como en el primer capítulo del libro dedicado a los polinomios, un conjunto de símbolos de "magnitudes no determinadas" con las que se puede "operar según las reglas del cálculo algebraico", pero los ejemplos que realmente usa son "cuerpos de números" (subcuerpos de los complejos) o "cuerpos de funciones" (cocientes de polinomios con coeficientes en cuerpos de números), todos ellos cuerpos que contienen a los racionales. El primer capítulo de esta parte, titulado *Teoría de Galois*, es utilizado por Weber para exponer la correspondencia entre grupos y cuerpos descubierta por Galois, mientras que el siguiente se titula *Aplicación de los grupos de permutaciones a las ecuaciones.* En el resto de los capítulos establece los tipos de grupos que corresponden a las ecuaciones particulares. Weber plantea de este modo una distinción entre la parte estructural de la teoría[8] y las apli-

7. El orden de prioridad de los sinónimos se invertirá treinta años después, cuando el álgebra se llegue a identificar con el cálculo literal.

8. Es decir, las relaciones entre los grupos de sustituciones de las raíces y los cuerpos que extienden al de coeficientes por adjunción de raices. Más detalles sobre el Weber en los citados Corry y Kierman.

caciones al problema concreto de las ecuaciones, basadas en el cálculo de grupos. Uno de los casos particulares que estudia es la división de la circunferencia en partes iguales, capítulo que termina con la exposición de las propiedades de los enteros de Gauss y del cuerpo de las raíces cúbicas de la unidad.

El tratado de Weber cierra el siglo XIX y prepara el álgebra para su nueva imagen en el siglo XX. Todavía a finales de los años veinte los textos de síntesis de álgebra alemanes —y también textos que aparecen en EEUU con el siglo— están dominados por la obra de Weber, respecto de la cual no hacen aportaciones radicales, sino algunos cambios en la selección de materiales o en la exposición, intentando, por ejemplo, mejorar la eficacia de los cálculos en la resolución algebraica de ecuaciones o profundizar en el uso de los grupos y los cuerpos, pero de modo que las estructuras algebraicas que en ellos pueden ir apareciendo con creciente nitidez están siempre al servicio de los fines algebraicos clásicos que se persiguen[9]. Así será hasta que se generalice la influencia del libro de van der Waerden.

Entre los libros norteamericanos que surgen en los primeros años del siglo[10] y que pronto tendrán amplia difusión por todo el mundo, cabe señalar algunos textos más breves que los tratados, elaborados cuidadosamente, con el contenido muy seleccionado buscando exposiciones adaptadas a fines docentes específicos. En lo que a la materia del primer volumen del Weber se refiere, interesa mencionar ejemplos de una separación terminológica que distingue campos básicos en la enseñanza universitaria del álgebra como muestran los siguientes ejemplos escogidos:

(i) La "teoría de ecuaciones" se enseña en los libros de Dickson (1903), que se ocupa sólo de la resolución algebraica incorporando ideas de Hölder y Bolza[11], y de Cajori (1904), que deja para los libros de teoría de funciones el teorema fundamental del álgebra y se ocupa, con numerosos ejemplos prácticos, primero de la resolución numérica, pero sin abordar el método de Gräffe, y luego de la teoría de Galois según el esquema de Weber.

(ii) Bôcher (1907) reserva el nombre de "álgebra superior", usado por Serret y Salmon, para designar el estudio general de los polinomios reales y complejos, su divisibilidad y factorización, los determinantes y sistemas lineales, la eliminación y la parte lineal y cuadrática de la teoría de invariantes (ley de inercia de Sylvester y pares de formas cuadráticas), terminando con los factores invariantes y los divisores elementales (Weierstrass, Kronecker y Frobenius) de las "λ-matrices", es decir las

---

9. Corry (1996), pp. 55-65, comenta los tratados de álgebra de Fricke, Hasse y Dickson. el primero, colaborador de Klein, hizó más sistemática y abstracta la exposición previa de la teoría de grupos, y el segundo incorporó los cuerpos de Steinitz; el américano fue más weberiano que los alemanes.

10. Fruto del aprendizaje de los numerosos estudiantes que viajaron a las universidades europeas o de las semillas esparcidas por los viejos maestros europeos que viajaron a la nueva potencia emergente. Ver la compilación de Duren ed. (1988-9).

11. Para la aportación de estos autores a la teoría de Galois ver Kierman, op, cit.

matrices cuyos elementos son polinomios en la variable λ. Obtiene así una obra marcadamente teórica que busca exponer, resaltando su naturaleza algebraica, teorías que se han desarrollado en la geometría analítica y que son los orígenes de la actual álgebra lineal que clasifica las formas cuadráticas y los endomorfismos.

Por otra parte, junto a la teoría algebraica de ecuaciones se va desarrollando, como en el segundo volumen de Weber, los primeros textos de una teoría de grupos de naturaleza abstracta que pretende recoger los resultados generales sobre grupos que se van utilizando en diversos asuntos de álgebra, análisis y geometría, e ir elaborando una teoría autónoma.

(b) Textos españoles

Dedicaremos este apartado a repasar la situación del álgebra en España en la segunda mitad del siglo pasado. Nos ocuparemos de los cursos y libros utilizados en las recién creadas facultades de ciencias, en otros centros de enseñanza superior y en sus aledaños institucionales[12].

La enseñanza superior del álgebra en España a finales de la década de los cincuenta, cuando se produjeron reformas educativas muy importantes, puede comprenderse examinando el contenido y el estilo de dos obras habituales en las escuelas técnicas militares y civiles y en las universidades, y que también servían de orientación al profesorado de los institutos de secundaria. Nos referimos a las obras de Cortázar y a la traducción del texto francés de Cirodde, la primera algo más elemental que la segunda. Los dos tuvieron gran número de reimpresiones y se utilizaron durante muchos años[13]. En 1866 — el año de la segunda edición del libro de Salmon y de la tercera del *Cours* de Serret — se produjo en España una reforma en los planes de estudios de las enseñanzas que nos ocupan. Un artículo crítico sobre la reforma, publicado a finales de dicho año en la *Revista de Obras Públicas*, atribuido al ingeniero Echegaray[14], reclamaba la presencia en nuestros centros superiores de cursos como los que Serret impartía en la Sorbona, que desarrollaran, además de los temas más elementales de la resolución de ecuaciones que en nuestro país se enseñaban, otros como las congruencias, la teoría de los determinantes y la teoría de Galois. La reclamación puede resumirse, en clave de textos importados, diciendo que se pedía el salto desde el álgebra de Cirodde a la de Serret.

12. El artículo de tema geométrico de Millán (1991) es una buena referencia general para este periodo.

13. Para mas información sobre este punto ver F. Vea (1995) y Mª. A. Velamazán (1994). La última edición de la traducción del Cirodde que hemos encontrado es la "décimaquinta tirada" de 1879.

14. El estudio de Sánchez Ron (1990) prolonga una selección de textos de matemáticas y física escritos por Echegaray, precedida de la biografía científica completa, a la que remitimos también para el resto de las observaciones que siguen sobre este autor. En dicho estudio introductorio hay una descripción del contenido de los cursos de Echegaray sobre la teoría de Galois.

Se suele considerar a J. Echegaray (1832-1916), no sin razón y en buena medida como resultado de la opinión asentada por JRP, como introductor en nuestro país de los determinantes y de la teoría de Galois. En efecto, escribió en 1868 una "traducción libre" del libro de determinantes de Trudi, de 1862, al que siguió un año después un artículo con aplicaciones a la resolución de sistemas lineales; pero sus lecciones sobre la teoría de Galois, en la línea de Serret y Jordan, no se produjeron hasta el bienio 1896-98 y se impartieron en la Escuela de Estudios Superiores del Ateneo de Madrid, es decir, al margen de los centros superiores, lo que da idea del poco éxito que tuvo la reclamación formulada treinta años antes. Entre ambas actuaciones, Echegaray escribió un artículo sobre la cuadratura del círculo[15], en el que explicaba la demostración de la transcendencia de π, realizada por Lindemann cuatro años antes. Se publicó de nuevo un año después en forma de libro, junto con otros dos trabajos relacionados con la resolución de ecuaciones, uno sobre los problemas resolubles con regla y compás y otro sobre la división de la circunferencia en partes iguales. Como introducción a este último, dedicó unas páginas a demostrar las propiedades básicas de la función indicador, de otras funciones aritméticas multiplicativas y de las raíces primitivas, temas que no podía suponer conocidos. Para estudiar estos temas recomendaba el *Cours* de Serret, las famosas lecciones de Dirichlet y la "traducción libre" de la anterior, con algunas adiciones, realizada por E. Jiménez (1834-1887)[16].

Un texto relevante de la época es *Elementos de matemáticas*, de Baltzer (1879-81), traducción en cinco volúmenes[17], realizada por E. Jiménez y M. Merelo, prologada por Echegaray y utilizada en la Institución Libre de Enseñanza[18]. Los dos últimos volúmenes tratan de geometría y trigonometría respectivamente, y los tres primeros se dedican a materias que podrían haber aparecido juntas bajo el rótulo "álgebra", pero que Baltzer escalona para llegar al álgebra desde la aritmética: 1, *Aritmética vulgar*; 2, *Aritmética universal*; 3, *Álgebra*. La aritmética vulgar, la más elemental, se ocupa del cálculo con los números y la aritmética universal del cálculo literal, tratando de los polinomios y la divisibilidad. El volumen segundo contiene además logaritmos, combinatoria, fracciones continuas y series. El volumen tercero, a cuyo contenido el autor califica como "análisis algebraica, o sea teoría de las funciones", se inicia con la continuidad y la derivación de funciones para entrar enseguida en la resolución de ecuaciones algebraicas de grado menor que cinco y en

15. JRP valoró en alto grado este artículo, tal vez excesivamente, porque significó el fin de la plaga de ignorantes dedicados a resolver ese problema imposible.

16. Jiménez (1877) es la referencia nacional para la teoría de los números hasta JRP.

17. Baltzer, que alcanzó notoriedad en 1857 con una obra sobre determinantes, publicó tres años después en dos volúmenes *Die Elemente der Mathematik*, que tuvo siete reediciones hasta 1885. En ella reconoce el influjo de Serret en la parte relativa a la resolución de ecuaciones, que no llega a la teoría de Galois. Los volúmenes 1, 4 y 5 se tradujeron de la quinta edición alemana de 1875, y el segundo y el terrcero de la sexta de 1879. Los volúmenes 2, 3 y 4 aparecieron en 1880 y el último en 1881.

18. Ver los trabajos de Núñez & Servat (1988) y de Millán (1991).

la resolución numérica general. Expone el teorema de Sturm y de él deduce el teorema de Cauchy sobre los ceros contenidos en un recinto plano y de éste el de Gauss o teorema fundamental del álgebra. Termina con una mención al método de Gräffe, pero remitiendo para su estudio a una memoria de Encke, lo que aprovechan los traductores para indicar en una nota que dicha memoria ha sido "traducida al castellano, y explicada aún más" por Merino (1879).

El temario es muy similar al de Cirodde (este último empieza directamente con la aritmética universal) y está modernizado en la línea de Serret, pero no alcanza el nivel de este último. El contenido es el de la asignatura universitaria Complemento de Álgebra y Trigonometría, a la que se dirigían las críticas en el artículo de 1866 antes citado; asignatura que en 1877 se dividió y una de sus partes pasó a llamarse Análisis Matemático, cambio que se explica por la ambigüedad mantenida en la época entre los significados de los términos "álgebra" y "análisis", que se mantuvo hasta entrado el presente siglo[19]. Junto a los temas relacionados directamente con la resolución de ecuaciones, se encuentran en este programa los algoritmos indefinidos que permiten expresar funciones en el sentido del análisis algebraico de Cauchy. La continuidad y las derivadas entraban poco más que en la medida necesaria para aplicarlas al teorema fundamental del álgebra y a los problemas de la resolución numérica. El "álgebra" era el "análisis" realizado con el tipo más simple de funciones, los polinomios reales y complejos. Ninguno estos programas alcanza ni los resultados de Abel ni la teoría de Galois.

Otros ejemplos de obras traducidas son las dos de Rubini (1882, 1885), a cargo del catedrático de Sevilla E. Márquez. Una de ellas, la *Teoría de las formas*, tuvo una versión libre a finales de la década a cargo de un joven catedrático del Instituto de León (Octavio de Toledo, 1889), con la pretensión de hacer una exposición elemental de la teoría a partir de libros conocidos de álgebra elemental[20]. De esta época es también el interesante libro sobre determinantes y formas de Fernández de Prado (1891).

Echegaray inició la explicación de la teoría de Galois, en la línea Serret-Jordan, un año después de la publicación del Weber y terminó el curso bianual el mismo año en que se publicaba la edición francesa; si alguno de los pocos que resistieron los cursos los siguieron verdaderamente, quedaría en condiciones de abordar el estudio de la teoría de Galois en la obra del alemán, cuya existencia e importancia fue muy pronto conocida en España, al menos a través de la reseña que García de Galdeano (1899) hizo de la edición francesa en su revista *El Progreso Matemático*. El repaso que da Galdeano al contenido le permite concluir que la obra de Weber "segura-

19. Ver por ejemplo la relación de planes y texto que da Lusa (1994).
20. Utilizó como referencias el álgebra de Rubini, los textos franceses de Briot (traducido) y de Laurent, y el texto de Benítez & Salinas, muy utilizado en la enseñanza militar menos técnica.

mente dará la pauta para el estudio de esta rama en la actualidad, y acaso durante muchos años". Galdeano opina que la publicación del Lehrbuch es un "acontecimiento de gran interés para la enseñanza" y destaca estas características generales de la obra: "Sin olvidar las clásicas cuestiones que se resolvieron en la época de Descartes y la de Lagrange y Sturm, y que han sido el objeto exclusivo de los estudios en los planes de enseñanza, hasta hace pocos años, el Sr. Weber da nueva organización a esta rama de la Matemática, revistiéndola de su carácter propio, pues sin descuidar la parte relativa a la continuidad, hace destacarse del conjunto las teorías combinatorias". Nuevas citas que vendrán a continuación precisarán el sentido de "continuidad" (análisis) y "combinatoria" (álgebra) en Galdeano.

Un año después, García de Galdeano (1900) reseñó también el primer volumen de las lecciones de Echegaray, a las que calificó como "el primer golpe a nuestras inveteradas rutinas que resisten con tenaz empeño, en nuestros centros de enseñanza, a la introducción de los conceptos combinatorios como fundamentales y de superior importancia en la moderna organización de la matemática". Este párrafo demuestra que Galdeano tenía una visión actualizada del álgebra, plenamente alineada con la evolución que poco a poco se iba imponiendo en la disciplina, a la que considera "una generalización gradual de la aritmética [que] se refiere a la idea de combinación así como el análisis concierne esencialmente a la continuidad o discontinuidad, es decir, a la magnitud en estado de variación", palabras estas últimas de la recensión del texto de álgebra de Christal que aparece en el primer número de *El Progreso Matemático*, en 1891. Esta percepción se pone de manifiesto también en otras dos reseñas compañeras de la anterior, en las que se hace eco del cálculo formal de Grassmann y de la tradición de álgebra simbólica que parte de la lógica de Boole. Estas ideas pudieron tener la difusión que alcanzó *El Progreso Matemático*, pero el autor las había plasmado ya en la década de los ochenta, siendo catedrático en el Instituto de Toledo, en obras que posiblemente influyeron poco, pero en las que se aprecia la buena formación algebraica del autor[21]. En la breve exposición de una "teoría general de las operaciones y de las cantidades" aparecen las propiedades formales de las operaciones, expresadas en forma simbólica, con ejemplos aritméticos y geométricos; el resto del contenido, que es el tradicional, se clasifica en la teoría de la continuidad, es decir, la base analítica de la resolución de ecuaciones reales y complejas, y la teoría de la combinación y el órden, la parte más propiamente algebraica basada en Serret y Salmon[22].

Galdeano anunció un nuevo volumen con la aplicación de la continuidad y la combinatoria a la resolución numérica y algebraica de las ecuaciones, pero final-

21. García de Galdeano (1883-86, 1888), obras comentadas por Hormigón (1991). La lista de los trabajos de García de Galdeano se encuentra en Hormigón (1983-84).

22. Añadiendo otras obras de autores como Houel, Baltzer, Briot, Rubini, Laurent y Faá di Bruno, que son las referencias manejadas entonces y durante dos décadas después por los autores españoles.

mente no apareció y el tratado quedó inconcluso. En la reseña de las lecciones de Echegaray antes citada, al reconocer la prioridad de su colega, Galdeano escribió a pie de página: "Ya en mi *Tratado de Álgebra*, 2ª parte, (1886) ...anunciaba para la 3ª parte la aplicación de estos principios [de la *combinación* y del *orden*] a la resolución algebraica de las ecuaciones, especialmente los de Lagrange, Abel y Galois, cuyo complemento es dicha resolución; pero la falta de éxito en dicha empresa impidió la publicación de dicha 3ª parte cuyo concepto tiene hoy un amplio desarrollo en la magistral Álgebra del profesor H. Weber y entre nosotros una elegante y clarísima exposición limitada a la doctrina de Galois en la obra del Sr. Echegaray".

Así siguieron las cosas durante muchos años, dedicándose en general los nuevos autores a repetir las materias citadas, consolidadas en los planes de estudios, con análogos planteamientos metódicos. Cada catedrático hacía su libro, todos más o menos iguales.

Se concluye en definitiva que los autores españoles de obras de álgebra de la segunda mitad del siglo XIX son expositores y no creadores, y que entre ellos destacan Echegaray y Galdeano, por su originalidad y porque intentan con mayor tesón elevar el nivel e introducir modernidad. El primero fue pionero en la exposición directa y temprana de temas algebraicos importantes. Galdeano explicó con claridad que se estaba creando una teoría combinatoria, el cálculo literal que decía Weber, de la que el álgebra de la resolución de ecuaciones era un complemento, mientras que asignaba un carácter analítico, distinto de lo algebraico, al teorema fundamental y a los métodos de resolución numérica.

(c) El plan de estudios de García Alix

Así estaban las cosas en el álgebra española cuando llegó el nuevo plan de estudios de 1900, en el que la geometría sintética, ya en decadencia como corriente de investigación teórica, adquirió un papel excesivo en detrimento de otras materias en las que la investigación estaba abriendo nuevos horizontes. El nuevo plan de estudios, que duró hasta 1921, constaba de las siguientes materias:

Primer Curso	*Segundo Curso*
Análisis Matemático 1º	Análisis Matemático 2º
Geometría Métrica	Geometría Analítica
Química General	Física General
Tercer Curso	*Cuarto Curso*
Elementos de Cálculo Infinitesimal	Mecánica Racional
Geometría de la Posición	Geometría Descriptiva
Cosmografía y Física del Globo	Astronomía Esférica y Geodesia

A la vista del plan, se comprende que el álgebra fuera una materia contenida, como sucedía en el siglo anterior, en las asignaturas Análisis Matemático 1° y 2°, lo que no dejaba espacio para el álgebra avanzada. Las asignaturas anteriores heredaron los contenidos, así que textos como los de los catedráticos J. M. Villafañe y M. Marzal, que habían aparecido en la última década del siglo, podían seguir en uso en los primeros años de la nueva centuria.

Villafañe (1898) seguía en la Universidad Central la senda trillada del análisis, dividido en estas cuatro partes: 1ª *Teorías fundamentales*; 2ª *Análisis infinitesimal*; 3ª *Teoría general de ecuaciones*, 4ª *Teoría de las formas algébricas*. En realidad sólo publicó un volumen con las dos primeras partes, tal vez porque el plan de estudios no exigía las otras dos. Al anunciar el tratamiento de las formas excluía la coordinatoria y los determinantes[23] porque no eran una parte propia del análisis sino "un auxiliar poderoso y un instrumento eficaz para el cálculo", lo que es un débil apunte hacia la nueva demarcación del álgebra que Galdeano había expresado con más claridad.

Por su parte, en Barcelona, Marzal (1899) se declaraba desde el principio seguidor de Baltzer, definía el análisis matemático como el estudio de las funciones y el álgebra como "la rama del Análisis ordinario o de cantidades finitas que tiene por exclusivo objeto el estudio de las *funciones algébricas*"[24], si bien recordaba que también era "considerada por unos, con excesiva amplitud de concepto, como la ciencia encargada de estudiar y exponer las leyes generales de la cantidad independientemente de su naturaleza numérica o extensiva, y mirada por otros como un mero arte de abreviar, simplificar y generalizar la resolución de cuestiones que pueden proponerse sobre los números". Marzal distingue dos acepciones secundarias del término "álgebra": una se refiere a las leyes generales de la cantidad, y es similar al cálculo literal de Weber y a la combinación de Galdeano; la otra es el arte de abreviar, simplificar y generalizar, que veremos también en Galdeano y JRP. Las lecciones de Marzal completan la obra de Baltzer añadiendo algo sobre cuaternios, el método de Gräffe, unas breves notas sobre la resolución algebraica general de ecuaciones y la teoría de las formas algebraicas según Rubini[25].

En la primera década del siglo, Galdeano inició un proyecto muy ambicioso (García de Galdeano, 1904-5)[26] que tampoco pudo concluir, por falta del apoyo ofi-

23. Sobre estas teorías había escrito con anterioridad un texto (Villafañe, 1891) en la línea de Serret y Baltzer, siendo entonces catedrático en Barcelona, de donde pasó a la Central.

24. Notar que las funciones algébricas son más que las polionominales, pues también incluyen las funciones implícitas dadas por polinomios de varias variables.

25. El tratado de Marzal es la obra española que JRP citó más veces como una buena referencia para resultados concretos, aunque también le señaló algunos errores. Termina la resolución algebraica de ecuaciones comentando el método de Lagrange y demostrando el teorema de imposibilidad de Abel.

26. JRP recordaba esta obra en 1928, en el discurso de recepción en la Academia de Ciencias de Alvarez Ude, donde dijo que Galdeano era famoso "por su copiosísima producción, admirable y admirada por la vastedad de sus planes, más que por la perfección de su desarrollo minucioso".

cial que necesitaba para sacar al mercado libros con escasa venta porque buena parte de las materias tratadas no figuraban en los planes de estudios. Galdeano se opuso con energía al nuevo plan (Ausejo, 1995), defendiendo orientaciones más modernas que apoyó en referencias europeas actualizadas, desarrollando una vocación propagandista que se extendió a la matemática en su conjunto. Con la *Nueva enciclopedia matemática*, programada en nueve volúmenes, pretendía difundir el conocimiento de teorías que son, decía, "indispensables en la enseñanza y forman, no el todo, sino una parte de lo que se enseña en las universidades extranjeras". Consideró "de más perentoria necesidad para nuestra deficientísima enseñanza" los seis últimos volúmenes dedicados al cálculo diferencial e integral, la geometría diferencial y las ecuaciones diferenciales, que constituyen la parte publicada, y dejó para más adelante los tres primeros de contenido algebraico, que ya no pudo publicar[27], con lo que una vez más quedaba pendiente un texto español con la resolución algebraica de ecuaciones, que esta vez hubiera podido partir del conocimiento de la obra de Weber.

Al ver imposible la culminación de su *Nueva enciclopedia*, publicó una *Exposición sumaria* (García de Galdeano, 1907), en doscientas páginas, de las teoría que no pudo desarrollar, y allí encontramos información actualizada sobre la teoría de grupos, que entiende como una manifestación especial de la combinatoria. Los grupos están, después de unas consideraciones históricas, al inicio de la descripción de la matemática moderna, que sigue con la evolución de la geometría, al final de la cual menciona diversos "sistemas geométricos" (geometría reglada, esférica, etc.), pero sin vincularlos a los grupos, que sí asocia luego al álgebra (que es, dice, "la teoría de los grupos aplicada a la resolución de las ecuaciones finitas") cuando menciona algunos aspectos de la teoría de Galois, deteniéndose en comentarios sobre el tratamiento de las ecuaciones metacíclicas en el Weber. En este punto aparecen las sustituciones lineales del plano complejo y al mencionar a Klein dice, como de pasada, "que ha importado a la ciencia varios conceptos de unificación, como se ve en sus trabajos respecto a las geometrías elíptica, hiperbólica y parabólica", mención que hizo, páginas antes, cuando enumeró diversos "sistemas geometricos". Lo mismo sucede cuando, hacia el final de la obra, aborda el apartado de la teoría de las transformaciones citando las de radios vectores recíprocos, las racionales, las birracionales o de Cremona y los grupos de transformaciones generales de Lie, afirmando en su veloz paso por los asuntos que "los trabajos de Klein y de Lie han puesto de manifiesto cómo las propiedades invariantes de una clase cualquiera de transformaciones se hallan definidas esencialmente por el *carácter del grupo* de éstas". Galdeano dispersó por su sumario los elementos del *Programa de Erlangen* de Klein, que define y clasifica las geometrías por sus grupos de transformaciones, pero

27. No publicados: 1° *Resumen y Complemento de la teoría de los números*, 2° *Teoría de los grupos de sustituciones*, 3° *Aplicación de la teoría de los grupos a la resolución de las ecuaciones algebraicas.*

no alcanzó a dar la descripción explícita de esta síntesis, lo que hizo su discípulo JRP en la década siguiente.

Lo que sí captó Galdeano en esta parte de *Exposición sumaria* es que "la Matemática es la ciencia de las transformaciones" y que al crecer, diversificándose en ramas, aparecen "numerosas dependencias formales. Una de ellas hemos visto que es la transformación lineal, que se extiende por todas las teorías, estableciendo un lazo común entre todas ellas: el Álgebra, la Teoría de los números, las funciones elípticas, las curvas y las superficies, las ecuaciones diferenciales, etc. En todas ellas penetra este modo de ser y de fluir, propio de todo objeto matemático"[28]. Galdeano todavía no designa esta materia como álgebra propiamente dicha —como hizo Bôcher[29] por esas fechas—, sino como rasgo formal común a varias ramas, entre ellas el álgebra referida a las ecuaciones, del mismo modo que los grupos eran un rasgo formal común al álgebra y a la geometría; estas dependencias formales entre varias ramas de las matemáticas expresan la misma idea que el arte de abreviar, simplificar y generalizar de Marzal.

Para terminar, Galdeano se ocupa de "los cálculos simbólicos", dando un repaso rápido por los complejos, las equipolencias y los cuaternios, el cálculo baricéntrico de Möbius, la teoría de la extensión de Grassmann y el cálculo lógico. Su conclusión fue que "la matemática crea objetos abstractos, por sus definiciones; sus postulados y axiomas son los principios de sus razonamientos, y un encadenamiento ideal sustituye a las realidades y a las relaciones externas, ya en la Matemática pura ya en la Matemática aplicada". Esta forma de ver la matemática, que ya había apuntado en sus libros de álgebra de la década de los ochenta[30], le sitúan al final de su vida profesional en la senda del *Paradigma hilbertiano* emergente (Hormigón, 1984).

L. Octavio de Toledo (1857-1934), que era catedrático en Madrid desde 1898, publicó unas lecciones de calculatoria (Octavio de Toledo, 1900) y luego inició un proyecto de *Tratado de álgebra* (Octavio de Toledo, 1905) que podía haber significado en esa fecha alguna modernización, pero no fue así. Quedó reducido a la primera sección, con un contenido lineal elemental que alcanzaba hasta el teorema de Rouché y las ecuaciones diofánticas, pero la resolución de ecuaciones, anunciada para "más adelante si el público matemático de nuestro país juzga con benevolencia

---

28. Galdeano, después de tratar del álgebra como hemos visto, pasó a la teoría de los números, mencionando los ideales de Dedekind y los sistemas modulares de Kronecker. Antes de llegar a las transformaciones, tató de análisis real y complejo y de geometría algebraica.

29. En el primer número de la *Revista Matemática Hispano-Americana* (1919, p. 228) hay una necrológica de M. Bôcher (1867-1918) que destaca su dedicación "al estudio del álgebra superior y de las ecuaciones diferenciales" de forma que "supo encontrar en ambas teorías un fondo común que le permitió aplicar a ésta los métodos de aquélla".

30. J. Ríus y Casas y C. Jiménez Rueda, entre otros, habían reflejado en sus libros, a un nivel de simple iniciación, estos aspectos simbólicos formales que más tarde formarían la esencia del álgebra.

nuestro trabajo", decía el autor en la presentación de la obra, no se publicó[31]. Fallido este proyecto, volvió al programa del primer curso con una segunda parte (Octavio de Toledo, 1916) sobre coordinatoria y algoritmos ilimitados[32], que significa, en el nivel elemental, un avance tímido respecto a las anteriores y quedó superada de inmediato por el primer libro de texto de JRP. Lo mismo le sucedió a la obra *Algoritmia* de Aller (1918), autor que reconoce en la introducción los méritos de los libros de análisis de Marzal, Galdeano y Octavio de Toledo, así como de las "hermosísimas lecciones explicadas en la Universidad de Madrid" por JRP; pero R.M. Aller (1878-1966) justificaba la edición de su libro por tratarse de una obra con distintas pretensiones[33].

Como conclusión, digamos que, pasada la primera década del siglo, el álgebra universitaria española a la que se enfrentó JRP tenía algunas asignaturas pendientes respecto a la modernidad representada entonces por textos como los de Weber y de Bôcher:

(i) La teoría de Galois, que en España sólo expuso Echegaray a la manera Serret-Jordan, y lo hizo fuera de la universidad.

(ii) La teoría general de las formas algebraicas al modo de Gordan, mientras en España se continuaba en el enfoque recogido por Rubini.

(iii) La teoría matricial de las formas lineales y cuadráticas, factores invariantes y divisores elementales, todavía inédita en nuestro país salvo alusiones o meras referencias.

Sólo la teoría de Galois fue abordada seriamente avanzado ya el siglo, las formas fueron quedando relegadas y la futura álgebra lineal no pasó de sus primeros pasos elementales. Además, en temas próximos a los anteriores, no se escribían libros ni sobre la teoría abstracta de grupos ni sobre cálculo formal o simbólico de la lógica, temas sobre los que en la frontera del siglo ya había obras de síntesis.

---

31. Lo que significaba un nuevo abandono, años después del de Villafañe, ambos con cátedra en la Central, y dos décadas más tarde que el intento de Galdeano desde el Instituto toledano.

32. En esta última parte, dedicada a series, productos infinitos y fracciones continuas, aparece la referencia más moderna que declaró (Capelli, 1909), utilizada también por JRP en *Elementos*.

33. En la presentación de la edición facsímil de 1994, E, García-Rodeja afirma que el autor compuso la obra para su propia delectación y que debía estar completa hacía 1912, así que conocería las obras de Marzal y Galdeano, pero sólo las primeras de Octavio de Toledo. Según García-Rodeja, la publicación se inició en 1914 y no se ultimó hasta 1918, así que las lecciones madrileñas de JRP le pillaron con la obra en plena y lenta impresión. El contenido del libro de Aller es parecido a las lecciones de análisis de JRP pero con menos álgebra. Así como Marzal se reconoce como seguidor de Baltzer, Aller aspira a exponer con rigor los "fundamentos de la ciencia de los números" y a que su libro pueda jugar el papal que en su país jugaba el primer tomo (escrito por Weber y dedicado a álgebra y análisis) de la obra en tres volúmenes H. Weber & J. Wellstein, *Encyklopadie der Elementar-Mathematik* (1903-7), Leipzig, Teubner, una obra que en Alemania había sustituido al Baltzer.

2. Rey Pastor y el Álgebra hasta 1930

Desde que comenzó a preparar oposiciones a cátedra, nada más acabar el doctorado, hasta la década de los veinte se distingue un primer periodo en el trabajo algebraico de JRP, en el que su preocupación básica es la reforma de los programas heredados, quedando para el periodo posterior la incorporación de la teoría de Galois.

(a) Los primeros apuntes del catedrático

JRP estudió en la Universidad de Zaragoza, entre 1904 y 1908, según el plan del ministro García Alix, con García de Galdeano como catedrático de Elementos de Cálculo Infinitesimal y J. Ríus y Casas en Análisis Matemático, materia impartida en dos curso con pocos cambios respecto al viejo esquema de Baltzer: operaciones con los diferentes sistemas de números, llegando tal vez incluso a los cuaternios; elementos de divisibilidad numérica y congruencias; combinatoria con algo de probabilidad; progresiones y logaritmos; determinantes y sistemas lineales; divisibilidad de polinomios y eliminación; fracciones continuas, series y tal vez productos infinitos; funciones continuas y derivables, reales y complejas, para llegar al teorema fundamental del álgebra; resolución numérica de ecuaciones algebraicas y sólo los casos elementales de la resolución algebraica. A su vez, a través de García de Galdeano conoció propuestas alternativas para la enseñanza universitaria de las matemáticas y una amplia bibliografía actualizada. Con este bajage y sus singulares dotes naturales, una vez realizado en Madrid el doctorado en geometría sintética con Torroja, en 1909, preparó oposiciones a cátedra de Análisis Matemático, que obtuvo dos años después en la Universidad de Oviedo y en 1913 para la Central.

Los trabajos de preparación del programa para estas asignatutas quedaron reflejados en algunas de sus primeras publicaciones, varias de ellas en el primer número de la *Revista de la Sociedad Matemática Española*, correspondiente al curso 1911-12. La más importante, dado el tema que ahora nos ocupa, es una pregunta que JRP formuló[34] buscando que algún lector le orientara en un problema sobre el teorema de Bézout. Tras indicar que "casi todos los tratados corrientes de Álgebra" tratan de forma incompleta (al dejar de lado el caso múltiple) una cuestión sobre raíces comunes a dos ecuaciones, y que el de Weber lo hace bien, pero "apoyándose en en el teorema de Sylvester sobre determinantes, que no tiene cabida en los cursos elementales de Facultad", lanzó esta pregunta: "¿Podría decirnos algún lector si conoce alguna otra demostración *completa* de la cuestión citada que pueda exponerse al tratar el teorema de Bézout en los programas actuales?". JRP mostró así su empeño en conseguir rigor y precisión mayores que los que venían siendo usuales en los textos universitarios de álgebra al uso, particularmente los de los catedráticos españoles. Le

34. Esta fue la única pregunta que formuló. Pero contestó a otras muchas, entre ellas unas que solicitaba generalizaciones del teorema de Rolle de localización de raices. Ver en Español (1996) un estudio completo de la presencia de JRP en esta revista, que abarca el periodo 1911-1917.

remitió una respuesta satisfactoria otro joven que ya era catedrático, E. Terradas (1883-1950)[35], quedando patente que una nueva generación mejor formada y más exigente se abría camino en la matemática española.

Pertenece también al esfuerzo preparatorio de las oposiciones un trabajo sobre formas cuadráticas reales que publicó en la *Revista de la Academia de Ciencias de Madrid* (Rey Pastor, 1911), que se basa en un caso particular del teorema de Sylvester antes mencionado, que aparece en la obra de Weber, a la que se refiere también en este caso JRP. Aunque se publicó dos años después, el trabajo está fechado en diciembre de 1909, y pretende resolver "dificultades de orden didáctico" que se presentaban en los cursos de análisis matemático a la hora de exponer los máximos y mínimos de las funciones de varias variables, pues se necesitan conocer condiciones para que una forma cuadrática real sea definida. JRP observa que el mismo tipo de problema se presenta al caracterizar en la geometría analítica las cuádricas imaginarias, así que sería, a su juicio, "una gran economía de tiempo y de trabajo, el obtener dichos caracteres analíticos en su verdadero lugar, esto es, en el Álgebra", de modo que el resultado puramente algebraico puede luego aplicarse a cualquier situación del análisis o de la geometría, en vez de repetir cada vez parecidas disgresiones, con lo que el alumno "separa su atención del objeto principal a que éstas se aplican". Menciona algunas obras acreditadas que utilizan ese proceder repetitivo y lo justifica porque el resultado general no suele aparecer en los libros de álgebra. JRP utiliza además el resultado algebraico para determinar condiciones para que una ecuación tenga todas sus raíces reales y distintas, notando que esto puede hacerse también con la ley de inercia, el teorema de Sturm y un teorema de Sylvester para cuya demostración remite a las obras clásicas de Serret o Salmon, o bien a un método más elegante de Cesaro. El papel asignado al álgebra en este artículo, una especie de intendencia para las matemáticas, es análogo al arte de abreviar, sinplificar y generalizar de Marzal y a las dependencias formales de Galdeano que hemos visto antes.

Ganada la cátedra, JRP marchó a especializarse en Alemania con una beca de la Junta para Ampliación de Estudios, fundada en 1907; allí completó su formación como investigador y conoció en directo la actualidad matemática más avanzada. Después de un curso ausente, enseñó en Oviedo, 1912-13, y, tras acceder a la cátedra del mismo nombre de Madrid, volvió un nuevo curso a Alemania, estancia que terminó al iniciarse la Segunda Guerra Mundial. En Madrid volvió a dar clases de

35. Respuesta de Terradas:"Véase el *Tratado de Álgebra* de Netto, tomo II, pág. 38, s359, donde se indica el método de Liouville, expuesto por este en el *Journal de Mathemátiques*, 1847, páginas de 68-72. El algebra de Netto se publicó en Leipzig: el tomo II en 1900". La formación algebraica inicial de Terradas había quedado probada en un trabajo que realizó siendo estudiante en Barcelona, premiado por el Ateneo Científico Escolar de Zaragoza y publicado en la revista de Ríus y Casas (Terradas, 1904); el trabajo era unba exposición de las propiedades de las raíces de la unidad según Gauss que utiliza obras de Serret, Bachmann y su profesor Marzal, cuyas *Lecciones* califica de "excelente tratado".

sus asignaturas y preparó una edición litografiada de sus lecciones (Rey Pastor, 1914, 1916a), que fueron reseñadas con amplitud y entusiasmo en la *Revista de la Sociedad Matemática Española* (Correa, 1914-15, 1915-16).

El primer curso quedó reducido, según Correa debido a "la lamentable brevedad del año académico actual", a la exposición de los sitemas de números y de algunos algoritmos finitos, quedando los algoritmos infinitos para el segundo curso, que en consecuencia tuvo que abreviar también su programa inicialmente previsto. El curso tuvo tres partes, dedicada cada una de ellas a un sistema de números: naturales, racionales, reales y complejos. Los números naturales se introducen mediante la coordinación de conjuntos de Dedekind y con ellos se estudian los sistemas de numeración, la divisibilidad y lo básico de las las congruencias, más la combinatoria y los grupos de sustituciones. La definición del número racional, siguiendo a Capelli (1909) —que es algo complicada a base de "equivalencia de conjuntos", unos llamados positivos y otros negativos—, da pie al estudio de las fracciones continuas finitas, los polinomios, (fórmula de Taylor, interpolación y divisibilidad) y los determinantes y los sistemas lineales con el teorema de Rouché. El número real está introducido con habilidad y eficacia, utilizando simultáneamente los métodos equivalentes de cortaduras de Dedekind, que proporciona una mejor definición de los números, y de sucesiones de Cauchy-Cantor, más adecuado para definir las operaciones; luego incluye límites y logaritmos. Finalmente, termina estudiando las "operaciones racionales", las potencia y las raíces de los números complejos, que introduce como pares de números reales pero con el producto definido en forma módulo-argumental. La novedad temática respecto a los textos anteriores de otros autores españoles es la fundamentación precisa de la escala numérica, que no obstante mejorará en la edición siguiente. El resto del contenido era estándar, pero la selección, organización y exposición, breve y precisa, con muchas demostraciones originales, supone un claro avance. Además, añade al final de casi todos los capítulos notas y comentarios bibliográficos que orientan la ampliación de estudios, destacando su preferencia por textos de álgebra y análisis algebraico alemanes e italianos.

En lo que se refiere al álgebra, merece destacarse que en este curso la divisibilidad de polinomios aparece asociada al número racional y sus operaciones, estudiando el caso de una variable y comentando tan sólo que el caso de varias variables no es tan sencillo y necesita el concepto de "cuerpo de números", que explica brevemente. Termina enunciando el "teorema fundamental de la teoría de la divisibilidad", conocido entonces como teorema de Lefébure de Fourcy, que afirma que si un polinomio irreducible divide a un producto y es primo con un factor, entonces divide al otro, remitiendo para la demostración a Weber o Capelli.

El primer capítulo del segundo curso completó el anterior con los algoritmos reales infinitos (límites, series y fracciones continuas indefinidas), pasando luego al contenido propio del curso superior, que consistió en una primera parte de teoría de funciones reales de una variable (continuidad, derivación y series) y de varias variables hasta el teorema de la función implícita, seguida de un capítulo breve sobre funciones de variable compleja, lo justo para introducir el resto del curso, dedicado al álgebra. El contenido algebraico[36] también es el tradicional: teorema fundamental del álgebra (sigue una demostración de Osgood, con modificaciones que la hacen más constructiva); resolución numérica de ecuaciones, con una exposición personal del método de Gräffe; funciones simétricas y eliminación, y finalmente lo más elemental de la resolución algebraica de ecuaciones (grados tres y cuatro) y el teorema de imposibilidad de Abel, que llama "de Ruffini" por razones históricas, y demuestra siguiendo una prueba de Galois "elementalizada todo lo posible", según dice; termina con los problemas geométricos clásicos (duplicación del cubo, polígonos regulares inscritos y trisección del ángulo). Una vez más, los dos primeros cursos no daban par adentrarse en la teoría de ecuaciones y el plan de estudios no ofrecería otras oportunidades.

Estas primeras lecciones de JRP en Madrid no supusieron ninguna innovación temática, porque debía atenerse a los programas establecidos, pero impactaron por su novedad en la organización de los temas, por la brevedad y originalidad de su presentación, basada en un estudio profundo y actualizado de las diversas teorías, sin limitarse a la mera repetición o simple adaptación de obras extranjeras[37]. Al talante modernizador previo de Echegaray y Galdeano, añadió como método la investigación original previa, que luego se vuelca en los textos. Así lo hizo en la elaboración de la parte analítica de la resolución de ecuaciones basada en el exceso algebraico, que formuló a partir de la representación conforme que había aprendido en Alemania y publicó primero en las actas de los congresos de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias[38] —otra institución para potenciar la investigación, fundadada en 1908— celebrados en Granada, 1911, y Madrid, 1913. Excepto por la ausencia de la teoría de Galois, el texto de álgebra de JRP es, a pesar de la premura con que está escrito, un libro de álgebra que resiste cualquier comparación con los textos extranjeros análogos de estos años. Las referencias bibliográficas que propone son buenas para el momento, pues recomienda como tratados completos el pri-

36. Se organiza en catorce lecciones; *Función entera de coeficientes complejos. Función entera de coeficientes reales. Función racional de coeficientes reales. Cálculo de las raíces racionales. Separación de las raices irracionales. Cálculo de las raices irracionales. Resolución de ecuaciones por el método de Graffe. Funciones simétricas de las raíces. Discriminante. Métodos de eliminación. Sistema de dos ecuaciones con dos incognitas. Resolución algebraica de las ecuaciones de 3º y 4º grado. Resolución algebraica por medio de radicales. Ecuaciones que se reducen a otras de grado inferior. Problemas geométricos de tercer grado.*

37. Decía JRP en el prólogo del segundo curso: "Deteniéndonos sólamente en las estaciones principales, es posible llegar en poco tiempo bastante lejos, sin gastar mares de tinta y montones de papel. Perdiéndose en una selva de detalles y casos particulares, que confunden y oscurecen los troncos primarios, es condenarse a no salir nunca de la Matemática elemental".

38. Ver los detalles en Llorente (1985). En los trabajos de Granada, cuando se refiere a los teoremas de Cauchy sobre los ceros en un recinto y de Gauss (fundamental del álgebra) remite a la exposición de los mismos en el texto de Marzal, afirmando que es elegante, breve y clara.

mer tomo de Weber y los dos de Netto (1896-99), pero para un primer estudio menciona entre otros el libro elemental de Netto (1914), y Cajori (1904); dos libros más profundos sobre la teoría de ecuaciones, que Cajori incluye entre los que influyeron en su obra, los de Burnside & Paton y de Pierpont, aparecen también recomendados por JRP.

Por tratarse de una versión muy directa de las lecciones, ocurre a veces que hay comentarios que se refieren a los avatares del curso, o citas incompletas de libros que se suponen de conocimiento general, e incluso se dejan ver las polémicas que sostenía con otros colegas. Al tratar los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, tema en el que vimos cómo JRP fue asesorado por Terradas en relación con un caso de raíces múltiples, incluyó a pie de página la rotunda nota siguiente: "Los tratados españoles que conocemos prescinden de este estudio, dejando sin demostrar el teorema de Bézout. Utilizando las derivadas [de un determinante] logramos demostrar rigurosamente el teorema de Bézout, sin necesidad del teorema de Sylvester sobre determinantes compuestos de menores, que utiliza Weber". No fue este el único caso, pues también señaló una afirmación inexacta en la memoria de Merino a propósito del método de Gräffe. En la introducción a los apuntes del segundo curso, expuso con toda claridad su opinión sobre el rigor, con un evidente mensaje crítico hacia los catedráticos veteranos: "El rigor constituye hoy un mandato imperativo en todo libro de Matemática pura. Toda demostración no rigurosa se considera como de valor nulo. ...Las necesidades de la enseñanza pueden obligar a suprimir una demostración, si ésta es larga y difícil; lo inadmisible de todo punto es dar como satisfactoria una demostración no rigurosa, una demostración a medias, que exigiendo un complemento de fe en el alumno, ahoga en él su sentido crítico, inutilizándolo para toda ulterior obra original".

Esta actitud le supuso no pocos enfrentamientos con sus predecesores en el escalafón —en el apartado siguiente veremos algunos ejemplos de estas disputas— pero también tuvo firmes apoyos, por ejemplo el de Correa, que, al término de la reseña antes mencionada del segundo tomo de los apuntes de JRP, reclamó el ingreso de éste en la Academia de Ciencias, si es que ese ingreso, decía, "es la sanción definitiva del talento y la investigación". El ingreso se acordó dos años después y tardó otros dos en hacerse efectivo, momento en el que JRP pronunció un discurso en el que se dolía del estado de la matemática española que estudió, frente a la que conoció en Alemania, y de las facilidades que se le negaban para impulsar un cambio en esta situación de atraso[39].

39. Este discurso, de 1920, está recogido en Rey Pastor (1993).

(b) Tensión generacional en torno a 1915

En marzo de 1914 había ingresado[40] en la Academia de Ciencias el catedrático Octavio de Toledo, que fue recibido por M. Vegas (1865-1943). El tema elegido para el discurso de ingreso fue *Algunos de los descubrimientos realizados en la teoría y resolución de ecuaciones durante el siglo XIX*, destacando los nombres de Abel y Galois en lo algebraico y Sturm y Gräffe en lo numérico. En la parte algebraica reprodujo los resultados originales principales de Abel y Galois, y despachó en unas pocas líneas las investigaciones posteriores: "En la segunda mitad del siglo pasado la teoría de Galois ha experimentado adiciones y modificaciones de importancia extraordinaria, por haberse dedicado a laborar en ella matemáticos tan insignes como Jordan y Picard en Francia, Klein, Netto y Weber en Alemania, Betti y Bianchi en Italia, y tantos otros cuyos nombres no me sería difícil reunir acudiendo a cualquier bilbiografía". Esta alusión casi despectiva a la bibliografía no es sino un momento de una secuencia constatable que ilustra uno de los aspectos del enfrentamiento entre JRP y sus colegas veteranos. En efecto, el joven catedrático criticó la parquedad bibliográfica habitual, salvo escasas excepciones, en los textos españoles, que apenas declaraban sus fuentes ni orientaban para estudios más avanzados (Rey Pastor, 1913), lo que sin duda enojaría a alguno de los venerables académicos y a otros colegas compañeros de generación, que acogerían con agrado el comentario del recipiendario, que por otra parte era uno de los autores que solía mencionar sus fuentes de consulta. A su vez fue replicado por JRP en el prólogo de los apuntes del segundo curso con otra alusión: "Sólo de los [tratados] más convenientes para los alumnos españoles daremos en estos apuntes amplias noticias bibliográficas (no un simple catálogo de librería), que orienten al alumno de Ciencias exactas".

Otro juicio desconcertante sobre la teoría de ecuaciones fue emitido en aquella sesión de la Academia por Vegas, cuando en el discurso de recepción afirmó que en el terreno de la resolución de ecuaciones "queda mucho por andar para solucionar de un modo completo el problema", sobre todo teniendo en cuenta que el teorema fundamental "no se ha conseguido demostrar con verdadero rigor" pues ninguna de la muchas demostraciones dadas "puede resistir el examen de una crítica severa". El rigor era otro de los caballos de batalla de JRP, como vimos a propósito del teorema de Bézout, y Vegas consuela también a los aludidos afirmando que ni los más ilustres matemáticos han conseguido el verdadero rigor. JRP replica con fuerza dos veces, una de ellas en los *Fundamentos de la geometría proyectiva superior* (Rey Pastor, 1916b), memoria de geometría sintética premiada por la Academia en 1914, siendo el ponente precisamente Vegas, que utilizó materiales de este libro para su curso de geometría superior. En una nota a pie de página JRP afirma que Vegas copió

40. En diciembre del mismo año ingresó A. Krahe (1867-1930), que fue recibido por Echegaray. El discurso de Krahe fue un trabajo matemático cuyo contenido, elemental, pero original, era un método de resolución de ecuaciones hasta el grado cuatro basado en la geometría del plano complejo.

su demostración del teorema fundamental de la recta proyectiva[41] "con pérdida total de su rigor". El mismo año, en las lecciones del segundo curso, al tratar el teorema fundamental del álgebra hay otra nota al pie, cuya parte final se suprimió en ediciones posteriores, que en su último punto dice así: "Obsérvese que la demostración es rigurosa; es decir, no hace uso de la intuición geométrica, aunque usemos lenguaje geométrico".

Los dos catedráticos de la Central antes citados representaban el poder institucional en las matemáticas y JRP tuvo con ellos, y otros del mismo entorno, como hemos visto, fuertes discrepancias y enfrentamientos que se manifestaron en diversos foros de la comunidad profesional[42]. El año 1915 se produjeron, al mismo tiempo que sus cursos renovadores en la universidad, otras actuaciones de JRP que marcaron claramente la diferencia entre la estática matemática establecida y la alternativa dinámica que capitaneaba el joven catedrático. Por una parte, en el famoso discurso de Valladolid, complejo y discutible[43], marcó una evidente distancia crítica con la generación anterior, mientras reconocía el esfuerzo de los abuelos Echegaray, Galdeano y Torroja, que la generación intermedia no continuó. En Barcelona, invitado por Terradas, dio un curso sobre representación conforme, con el que demostró que su nivel en esta materia era superior al de los demás catedráticos. En las otras iniciativas que vamos a comentar aparecerá el álgebra, por lo que les dedicaremos mayor atención.

En los *Fundamentos* y en otras publicaciones satélites aparecen los grupos a propósito del *Programa de Erlangen* de Klein, presencia que se repite en la sexta y última de las conferencias pronunciadas en el Ateneo madrileño en 1915 (Rey Pastor, 1916c), titulada *Sistematización de la Matemática por medio de la Teoría de grupos.* Las conferencias están dedicadas a García de Galdeano —"esforzado paladín de la Matemática moderna en España", le llama— y tenían como objetivo exponer ante los conocedores de la matemática elemental un panorama de la matemática moderna vigente en ese momento[44] "agrupando sus variadas teorías en torno a tres ideas capitales: conjuntos, funciones, grupos". Aunque recuerda que hay una "teoría de los grupos abstractos, ciencia nacida como una síntesis final de una brillante serie de aplicaciones del concepto de grupo a las más variadas teorías matemáticas"[45], su interés es destacar "el gran poder clasificador de los grupos desde que Galois inició "un método de organización del Álgebra, que ha servido de modelo para sistemati-

41. Ver Millán (1990).
42. Sobre este particular es ilustrativa la lectura de Ausejo & Millán (1993).
43. El discurso está recogido en Rey Pastor (1993) y hay una valoración critica del mismo en Ausejo & Hormigón (1985).
44. En el epílogo de esta obra, JRP afirmó que se podía tener idea de la extensión de las teorías modernas "consultando las obras del profesor Galdeano, únicas fuentes de consulta en lengua castellana".
45. Para el estudio de los grupos abstractos recomienda los libros "Séguier: *Eléments de la Théorie des groupes abstraits*. Paris, 1904" y "Netto: *Gruppen und Substitutionentheorie*. Leipzig, 1908".

zar después otras ramas de la ciencia". La conferencia consistió en dar una idea de esta sistematización en el álgebra, recomendando estudiar la teoría de Galois en el libro de Weber, también en el análisis, con la teoría de Lie para las ecuaciones diferenciales, y por último en la geometría, resumiendo la exposición del tema en *Fundamentos*. Esta forma de ver los grupos, al igual que las formas cuadráticas (Rey Pastor 1911), asigna al álgebra las competencias auxiliares que ya apreciamos en Galdeano y Marzal. El *Paradigma hilbertiano* resolvió esta diversidad de significados reservando el término "álgebra" para las nuevas teorías abstractas, que pasaron de ser un almacén para la intendencia y la economía de las matemáticas (geometría y análisis sobre los números reales y complejos) a constituir un objeto en sí mismo, característico del pensamiento matemático.

Dejamos para el final la más importante de las actuaciones de JRP en este año clave de 1915, que es el de su plena incorporación a la comunidad matemática nacional, una vez que la guerra puso fin a sus estancias en Alemania. La Junta que ya no podía becarle creó y puso bajo su dirección el Laboratorio y Seminario Matemático, lugar en el que se reunieron los interesados en la investigación y en el estudio de las teorías modernas necesarias para la actualización de los planes de estudios de matemáticas (Ausejo & Millán, 1989). Allí tuvo acogida la teoría de Galois —que seguía siendo una asignatura pendiente de la matemática española, y no cabe duda que el texto para esta asignatura era el Weber— pero englobada en el análisis matemático. Sólo dos miembros del Laboratorio, primero el riojano Cámara y años después Araujo, publicaron ocasionalmente sobre la teoría de Galois, en medio de su dedicación a otras áreas de la matemática.

El Laboratorio se estrenó en sociedad el mismo año de su fundación, en el congreso que la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias celebró en Valladolid, citado ya a propósito del discurso pronunciado por JRP como apertura de los trabajos de la sección de matemáticas; entre los presentados por los miembros del Laboratorio figura el de Cámara (1915) sobre la teoría de Galois. S. Cámara (1878-1964) había solicitado la excedencia en el Ejército dos años antes para incorporarse a la Facultad de Ciencias de Madrid como auxiliar de geometría, así que siguió de cerca los cursos de su paisano y se interesó por la teoría de Galois, que era la continuación natural de la materia impartida.

Nada mejor que citar al propio Cámara para conocer el contenido de su trabajo: "Nos proponemos en estas páginas exponer, en forma hasta cierto punto intuitiva, las principales propiedades del cuerpo algébrico normal de Galois, deducidas de las sustituciones que automáticamente se realizan entre los elementos de este cuerpo algébrico cuando se sustituye un elemento primitivo por otro". Se declara seguidor del libro de Weber, del que toma la notación y las primeras definiciones, y utiliza sólo otra referencia para un asunto de grupos de sustituciones, el libro de Capelli (1909). Cámara desarrolla sobre todo la combinatoria del grupo de las sustituciones de las raíces de una ecuación normal con coeficientes en un cuerpo de números, es decir, de una ecuación irreducible que tiene todas sus raíces (en el cuerpo complejo) expresables como funciones racionales de una de ellas, de modo que coinciden los cuerpos obtenidos adjuntando al inicial una cualquiera de las raíces, lo que da el cuerpo normal de la ecuación. Prueba que el grupo es transitivo y abeliano y estudia la descomposición en ciclos de las sustituciones y el subgrupo engendrado por dos de ellas. Alcanza a ver que el conocimiento del grupo equivale al del cuerpo normal y demuestra que en el cuerpo hay tantos subcuerpos como sistemas de imprimitividad hay en el grupo, que es la relación clave entre las dos estructuras algebraicas asociadas a la ecuación. Finalmente aplica lo anterior al estudio de las ecuaciones.

En definitiva, este trabajo demuestra que se había iniciado de verdad el estudio de la teoría de Galois en el libro de Weber, pero Cámara abandonó enseguida esta actividad y se dedicó a preparar las oposiciones a la cátedra de Geometría Analítica que ganó a principios de 1917, con destino en Valencia. Es posible que el interés primordial de Cámara fuera más bien la teoría de grupos por sus aplicaciones geométricas al modo de Klein, cuestión para él importante como se aprecia en el innovador texto de geometría analítica que escribió pocos años después[46]; también Mingot trabajó en el Laboratorio sobre grupos geométricos, las transformaciones lineales del plano complejo. En el programa del Laboratorio para 1917 la teoría de Galois figuraba como el tercero de los tres temas de análisis —precedida por la teoría de conjuntos y capítulos de la teoría de funciones, temas que recuerdan las conferencias del Ateneo—; a ella se dedicó entre otros Araujo, pero de momento sin más objetivos que el aprendizaje.

Cámara escribe al inicio de su trabajo: "Muy conocida es entre los congresistas la teoría de Galois como para encontrar propiedades desconocidas en este trabajo. No pretendemos haber descubierto nada nuevo". La primera afirmación debió ser simple protocolo, pero el autor fue sincero en la última, pues su trabajo es didáctico, por el detalle con que explica el comportamiento de las sustituciones, utilizando cuadros y ejemplos numéricos propios de una lección de clase o seminario, pero cuya salida al escenario de un congreso sólo se explica por el desconocimiento general del tema; además, la relevancia relativa del trabajo quedó avalada por JRP, que hizo la defensa pública del mismo por ausencia de su autor. Sin duda la aportación de Cámara contribuyó a que el grupo articulado en torno a JRP marcara sus diferencias con los colegas aposentados en la Central desde principios de siglo.

(c) Los primeros libros algebraicos de JRP

Los apuntes autografiados de las primeras lecciones madrileñas de JRP contenían poco más que el programa mínimo que se explicaba en clase, a estudiantes de

46. Ver el trabajo de J.J. Escribano sobre el riojano Cámara que aparece en este volumen.

ciencias, ingeniería y arquitectura. El éxito que tuvieron le animó a publicarlos en forma de libro, pero dando el paso adelante que significa transformar un curso en un tratado, una obra más completa, de la que se pudieran extraer varios cursos. Desde este punto de vista, el material de los dos primeros cursos de análisis matemático daba para tres volúmenes, que fueron apareciendo según su orden en el curso y que se reeditaron y reimprimieron sin interrupción, llegando a sobrevivir a su autor. Estos libros son los ya conocidos *Elementos* y *Lecciones*, más la *Teoría de funciones*. Nos ocuparemos sólo de los dos primeros, que son los que contienen material algebraico.

Por su orden natural, aparecieron en primer lugar y de forma inmediata los *Elementos*, en 1917, que tuvieron nuevas ediciones en 1922, 1930, etc. (con reediciones hasta hace pocos años). El libro recoge el material del primer curso, es decir, los cuatro sistemas numéricos y sus algoritmos, ampliando lo que apareció en los apuntes. En la segunda edición modificó la introducción del número natural simplificando la coordinación que había utilizado en la primera redacción. En las notas menciona el método axiomático de Peano y la teoría formal de las operaciones. También cambió la definición del número racional, introducido ya mediante pares de números naturales, con o sin signo, es decir, introduciendo los números enteros a la vez que los racionales. A su vez aritmetizó el producto de complejos como pares de reales, abandonando el recurso anterior a la forma módulo-argumental, que ahora pasa a ser una propiedad. La nota a la segunda edición que explicaba estos y otros cambios se abría con un párrafo punzante, alusivo a su lucha por la renovación matemática, que suprimió en ediciones posteriores; decía así: "La rapidez con que se agotó la primera edición de este libro, y la insistencia con que se viene solicitando su reimpresión, son indicios de que la Matemática *rigurosa*, es decir, *clara*, comienza a interesar en España; y aunque hasta ahora sólo sean estudiados sistemáticamente los Elementos, cabe la esperanza de que algún día remoto se llegue hasta los problemas finales". Desde la primera edición, la obra tiene una introducción que es una variante de la escrita para el segundo volumen de los apuntes; es una reflexión sobre el objetivo del libro y el método de enseñanza, una formulación explícita del pensamiento pedagógico que, con adaptaciones, aplicó en todos los niveles educativos[47]. Daremos a continuación una breve descripción del contenido del libro tal como quedó de manera prácticamente definitiva[48].

47. Sobre JRP y la educación matemática puede verse (Español, 1997).

48. Los cambios introducidos en la tercera edición están detallados en la reseña de E. Bonet: *Revista Matemática Hispano-Americana* (2ª Ser.) 5 (1930), 305-307. La nota a la tercera edición que sigue al prólogo dice que San Juan realizó numerosas correcciones y agregó frases y párrafos para aclarar o completar cuestiones. La cuarta edición tenía otra nota en la que de nuevo se agradecía a San Juan, y también a M. González y otros colegas, una tarea similar. Añadía además unas líneas irónicas: "Gracias también a quienes han preferido publicar sus observaciones, en vez de comunicárnoslas, o después de haberlo hecho, cuya impaciencia en darlas a conocer revela indudable interés por el perfeccionamiento del libro, que deseamos prosiga merced a la colaboración de todos sus lectores". Esta nota se mantuvo en la quinta edición, de 1935, pero desapareció más tarde y ya no hubo notas a las siguientes ediciones, que salvo correcciones menores quedaron inalteradas.

En la primera parte dedicada al número natural (donde sólo se resta si la sustracción es posible) están la teoría de números elemental y los grupos de sustituciones[49]. Más álgebra hay en la segunda parte, que protagoniza el número racional, pues allí se encuentran el álgebra lineal y la divisibilidad de polinomios, ambos temas en sus principios elementales. Primero trata los determinantes como un algoritmo, terminando con una breve mención del cálculo de matrices; luego, bajo el título de "algoritmo algebraico", aparecen las funciones enteras (polinomios) y su divisibilidad (también para "varias letras", aunque este caso lleva asterisco, lo que indica que puede omitir esta parte "el lector que sólo aspire a conocer los fundamentos"); finalmente trata los sistemas de ecuaciones lineales (teoremas de Cramer y de Rouché-Frobenius). Hay una breves notas finales interesantes, en las que apunta dos cuestiones del álgebra más avanzada: a) el grupo de sustituciones de una función entera y las transformadas de estas funciones por sustituciones, b) los factores invariantes y divisores elementales de las matrices. Entre las referencias para esta ampliación están el tratado elemental de Netto y el Bôcher.

No hay que pasar por alto un apartado (también con asterisco) cuyo lenguaje parece ahora arcaico, pero cuyo contenido camina hacia el álgebra lineal abstracta, en este caso sólo de una dimensión. Se trata de la "teoría de las magnitudes", donde a partir de ejemplos de la física ligados al análisis dimensional, aparecen las magnitudes como "entes abstractos entre los que está definida la igualdad y la suma", conceptos que se introducen mediante axiomas resultando lo que en lenguaje de hoy es un conjunto con una relación de equivalencia y una estructura de semigrupo abeliano en el conjunto cociente. Hay magnitudes escalares (que tienen una relación de orden total monótona, divisible y con el postulado arquimediano, como los racionales y los reales), las hay también absolutas y relativas (estas últimas cuando el semigrupo es grupo, es decir, cuando existen los opuestos) y se pueden multiplicar "cantidades" (las clase de equivalencia) por números racionales con las leyes habituales que dan una estructura de espacio vectorial de dimensión uno sobre los racionales, en el que la "unidades" representan las bases[50]. Le bastará más tarde introducir los reales para que esto sirva para ellos, pues también son una magnitud escalar.

La parte dedicada a los números reales es más analítica que algebraica. Señalaremos tan sólo que prueba que los reales tienen "las cuatro operaciones racionales" con "las mismas reglas operacionales", lo mismo que verá con los complejos en la última parte del libro, con lo que deduce que valen para ellos los algoritmos algebraicos estudiados para los racionales. Con los complejos reaparecen temas algebraicos, pues se explican las raíces de la unidad y la resolución de ecuaciones

---

49. En las notas afirma que esta teoría es "el fundamento del Álgebra moderna, edificada según el método iniciado por Galois", y recomienda para principiantes a Capelli (1909) y Bianchi (1900).
50. Ver la referencia al trabajo de San Juan (1945-46) en la sección siguiente.

elemental, que para JRP era la resolución de las ecuaciones hasta el grado cuatro. Además, trata los "números complejos de varias unidades" probando para tres o cuatro unidades el "teorema final de la Aritmética" de Frobenius y exponiendo luego los cuaternios[51]. Este tema conecta — JRP no lo hace explícito, pero se aprecia en el lenguaje— con la teoría de las magnitudes, pues estos complejos generales no son sino magnitudes vectoriales de varias unidades (dimensiones).

Establecidas las definiciones y operaciones básicas de los sistemas de números, el libro trata los temas elementales del análisis, como son los límites, las fracciones continuas y las series, pero es claro que también es en buena medida un libro de álgebra elemental.

La aparición del libro de álgebra superior se demoró unos años, lo que es fácil de explicar por la gran variedad de asuntos diversos a los que JRP dedicaba su atención. El curso 1917-18 estuvo invitado en la Universidad de Buenos Aires, donde en 1918 publicó un curso sobre funciones analíticas, y el mismo año, en Madrid, salió su primer libro sobre funciones reales, con lo que iniciaba la edición de la parte analítica de los cursos. Luego vino la fundación de la *Revista Matemática Hispano-Americana*, a cargo del Laboratorio y Seminario Matemático, el inicio de su actividad en metodología y la enseñanza de las matemáticas y finalmente se fue a Buenos Aires en 1921. Así inició sus años repartidos entre el curso académico argentino y el verano madrileño, de forma que los primeros estuvieron marcados por una fuerte dedicación a la enseñanza en varios niveles. En el ámbito universitario le ocuparon más los cursos de cálculo para ingenieros y los de análisis, quedando relegado el texto de álgebra que faltaba para completar la edición de sus primeros cursos.

Por fin apareció *Lecciones de álgebra* (Rey Pastor, 1924)[52], con una brevísima presentación en la que decía que la edición se retrasaba porque deseaba "someter a minuciosa elaboración los apuntes del curso" (en la portada de *Lecciones* pone: "2ª edición de los apuntes del curso de 1915-16"), pero los años pasaban sin que "a esa labor crítica le llegue su hora", por lo que los apuntes fueron a la imprenta "apenas corregidos y nada ampliados"; ni siquiera suprimió las notas que señalaban errores de sus colegas. Sólo añadió a los apuntes del 16 una lección primera sobre la función general de variable compleja para introducir el tratamiento de los polinomios necesario para el teorema fundamental. El álgebra reypastoriana estaba básicamente paralizada desde 1916 y seguía siendo la reforma del programa que preparó con motivo de su carrera hasta la cátedra de Madrid más la experiencia de las primeras lecciones. No se ocupó del tema hasta la década de los treinta, cuando comenzó el asalto a la teoría de Galois.

51. En las notas da una rápida noticia de los enteros de Gauss y los enteros algebraicos. La referencia fundamental que JRP da para el estudio de los sistemas de números es Stolz & Gmeiner (1909).

52. El año fue prolífico en ediciones, pues vió además la segunda edición en Madrid de *Funciones reales* y el primer volumen en Buenos Aires del *Curso cíclico* para físicos y químicos.

Entretanto, la actividad del Laboratorio en los años veinte, bastante intensa, daba prioridad a otros asuntos, por lo que en álgebra dio escasos frutos tangibles, pero algo se movía entre bastidores. Rodríguez Sanz (1924) publicó una exposición de la resultante de Bézout, que bien pudo ser una parte de la revisión de las *Lecciones* que no llegó a hacerse[53], pues no es sino la explicación en el caso de grado arbitrario de lo que en el libro aparecía explicado "para mejor fijar las ideas" con dos ecuaciones de grado cuatro. El mismo año, Bachiller reseñó[54] la tesis doctoral del italiano Fantappie, de 1923, en la que aparece la teoría de Galois. Más tarde, Araujo (1929) adelantó un breve artículo que se anunciaba como fragmento de un proyecto de libro sobre la teoría de Galois, pero tal libro no llegó a ver la luz. Un años después, la reseña de la tercera edición de *Elementos* antes mencionada terminaba con estas palabras: "Manifestemos por último nuestros vivísimos deseos, que son los de toda la generación matemática española, de que aparezca en breve la segunda edición de sus *Lecciones de álgebra* con introducción de la teoría de Galois, que como hemos advertido, promete publicar, y esperamos que esta obra será un derroche del rigor, concisión y claridad a que nos ha acostumbrado el Maestro". Da la impresión de que la obra proyectada por Araujo debió ser censurada y en su lugar tomó la iniciativa "el Maestro".

También son muy interesantes las reseñas de libros de álgebra que hizo Álvarez Ude[55] en la *Hispano-Americana*[56] entre 1926 y 1928, dedicadas a las obras alemanas de Fischer (1926), Hasse (1926-27) y Perron (1927). La obra de Fischer, que es presentada por Álvarez Ude como una preparación para la de Hasse, tiene un contenido similar pero más reducido que las *Lecciones* de JRP tal como estaban entonces. El primer tomo de Hasse se refiere a las ecuaciones lineales, así que se corresponde con *Elementos*, pero el enfoque del alemán es bien distinto, como veremos dejando hablar a Álvarez Ude: "Caracteriza esta notable obra... más que la índole de la materia tratada, el método formalista de exposición... en los dos primeros [capítulos] se expone la teoría de los conceptos (anillos, cuerpos, dominios de integridad, grupos) que resultan de las operaciones elementales cuando se hace abstracción de la naturaleza de los elementos que en tales operaciones intervienen... se trata de una obra de carácter muy abstracto... pero muy apropiada para quienes no se conforman con servirse de las Matemáticas como instrumento, sino que quieren conocer el fondo de las teorías, y no pueden consultar los grandes tratados como el de Weber". Se apre-

53. Es sabido que algunos colaboradores ayudaban a JRP en la preparación de sus libros, como lo hizo por ejemplo F. Vera (1888-1967) con la edición autografiada de los apuntes; así pudo suceder también con el trabajo de J. Rodríguez Sanz.

54. *Revista Matemática Hispano-Americana* 6 (1924), 217-218.

55. J.G. Álvarez Ude (1876-1958), entonces catedrático de la Central, fue discípulo de Torroja y enseñó a JRP geometría de la posición en Zaragoza. En 1928 ingresó en la Academia de Ciencias con un discurso sobre matemática actuarial, que fue contestado por JRP.

56. Reseña de Fischer: *Revista Matemática Hispano-Americana* (2ª Ser.) 1 (1926), p. 215; de Hasse, t. I: *Idem.*, 215-216; de Perron: *Idem.* 2 (1927), 282-283; de Hasse, t. II: *Idem.* 3 (1928), 65-66.

cia que Álvarez Ude había captado con claridad el cambio de paradigma reflejado en la obra que comentaba, y que el Weber permanecía en una especie de posicion inaccesible, matiz que se repite en otras recensiones. El segundo tomo contiene la teoría de Galois y su aplicación a la resolución de ecuaciones por radicales, en la línea de Weber. Álvarez Ude dice que "se ocupa de la construcción de las raíces y no de su cálculo, por lo cual pone como introducción la teoría del dominio de integridad de los polinomios con una variable y coeficientes pertenecientes a un cuerpo... habiendo limitado las consideraciones a cuerpos infinitos, dejando para los tomos dedicados a problemas el caso de cuerpos finitos". JRP se referirá muchas veces a esta obra de Hesse, pero dejándola en el bando de las contaminadas por el formalismo, mientras que su posición se mantien próxima a la de Perron, el otro autor reseñado por Álvarez Ude, quien afirma que los dos volúmenes de Perron "serán seguramente bien recibidos entre los cultivadores de Matemática que echaban de menos en la literatura científica alemana un tratado moderno de Álgebra, más asequible y práctico que el de Weber". El carácter clásico de esta obra, a diferencia de la anterior, fue bien captado por el antiguo profesor de JRP, que escribe: "Preocupa al Prof. Perron fijar bien el carácter del Álgebra a que está dedicada la presente obra, lo que puede llamarse Álgebra tradicional, cuyo fin es la teoría de las ecuaciones algebraicas, y que define como "sustancialmente, la teoría de las funciones racionales". Por ello pone especial cuidado en hacer resaltar la diferencia entre el Álgebra y la Teoría de funciones, de la que difiere por su método y, en consecuencia, en gran parte de su contenido; así por ejemplo, en el Álgebra sólo intervienen las cuatro operaciones fundamentales, adición, sustracción, multiplicación y división, pero no los conceptos de mayor y menor ni el de límite, esenciales en la Teoría de funciones... Convencido de la importancia del concepto de *cuerpo* en el Álgebra moderna, lo aborda ya en el primer capítulo, pero limitándose a cuerpos concretos de números y funciones, consecuente con su propósito de hacer un libro principalmente dedicado a estudiantes". En la obra hay resolución numérica y algebraica de ecuaciones, además de los temas generales previos del Weber, y al tratar de la teoría de Galois, como señala Álvarez Ude, utiliza "únicamente la indispensable de la teoría de grupos para el Álgebra, evitando por ello el concepto general abstracto de grupo y limitándose a la consideración de grupos de sustituciones". En lo que sigue podremos comprobar que JRP estaba alineado con Perron y no con Hasse.

La recopilación anterior es un escaso balance algebraicas escrito para la década y media posterior a las actuaciones de Cámara y JRP en 1915-16, pero deja claro que el álgebra se estaba estudiando, aunque sin excesiva dedicación, y que posiblemente su desarrollo resultó perjudicado por la situación de JRP [57], que por una parte dedicaba poco tiempo al tema y por otra parece que pudiera paralizar con su crítica otras iniciativas.

57. En la década de los veinte alternó entre Buenos Aires y Madrid, nueve meses allí y tres aquí, y tuvo una fuerte dedicación a la docencia elemental.

3. El periodo 1930-50

El año 1930 es la fecha simbólica de un cambio en la orientación del proceso algebraico que estamos relatando. En la esfera internacional apareció el libro de van der Waerden, que plasma la nueva imagen del álgebra, aunque su implantación verdadera no fue automática. Por el lado nacional, se produce una reactivación de los grupos de investigación dirigidos JRP, sobre todo en Argentina pero también en España hasta la guerra civil, después de haber dedicado buena parte de la década de los veinte a la actividad docente. En esta reactivación investiga en análisis a partir de los cursos que había dado desde 1925 sobre series divergentes y, con San Juan, su discípulo en este campo, dedicará una pequeña parte de su tiempo al álgebra.

(a) La nueva imagen del álgebra

En la década de los veinte aparecían libros de álgebra, orientados por el *Lehrbuch* de Weber, que antes de entrar de lleno en la teoría de ecuaciones preparaban el terreno con la exposición, más o menos abstracta, de las propiedades de los grupos y de los cuerpos, que formaban las herramientas del método de Galois. Esto, que se hizo con los grupos antes que con los cuerpos, respondía en principio a criterios de economía y eficacia, que se reforzaron cuando en otros ámbitos de la matemática aparecieron nuevos ejemplos con el mismo aspecto formal, por ejemplo los grupos en geometría y los cuerpos en la teoría de los números. Pero en la investigación se iba produciendo al mismo tiempo una evolución más rápida hacia la abstración, por ejemplo el álgebra lineal y cuadrática, o los anillos conmutativos y los ideales, que llevaba a considerar que esos modelos formales de cálculo algebraico, que se aplicaban en lugares diversos de las matemáticas, merecían ser tomados como objetos de estudio en sí mismos y orientar la investigación hacia sus propios problemas. "Un ejemplo de esto es la teoría de los cuerpos algebraicos publicada por Steinitz en 1910, que representa un proyecto de desarrollos posteriores. Sin embargo, el libro de van der Waerden de 1930 presentó una imagen del álgebra relativamente inteligible, que contenía una clasificación de las disciplinas algebraicas, su sustancia algebraica y sus conexiones internas basadas en un tratamiento abstracto"[58]. El van der Waerden, que se tradujo a varios idiomas pero no al español, fue poco a poco imponiéndose como el texto clásico de álgebra y aparecieron otros nuevos, más o menos ambiciosos, que se inspiraban en él y consolidaron la nueva imagen del álgebra[59].

Lo más conocido de *Modern Algebra* es que inauguró la exposición axiomática de diversas estructuras algebraicas (conjuntos con operaciones que tienen propiedades

58. Esta cita es del último párrafo del libro de Novy (1973), que deja la historia del álgebra moderna donde la toma la reciente obra de Corry (1996), que da un significado preciso a la expresión "imagen del álgebra".

59. Birkhoff & Mac Lane (1941) en un nivel más pedagógico, y más elevado Bourbaki, cuando trata de álgebra en su proyecto global iniciado en 1939.

asignadas: grupos, anillos, cuerpos, espacios vectoriales...), sus propiedades y homomorfismos, tal como vemos en los textos actuales. También que estas propiedades responden a un cierto esquema general para cada estructura: isomorfismos, construcción de nuevas estructuras a partir de unas dadas, estructuras especiales que permiten expresar una cualquiera en función de ellas, etc.. Pero ahora tenemos que poner el énfasis en lo que esto significó respecto al álgebra según Weber, pues aquí está la clave para comprender los alegatos de JRP. El álgebra se convirtió en la teoría de las estructuras algebraicas y se independizó así del análisis, en cuyo seno quedaron algunos temas del álgebra clásica.

En primer lugar, la nueva álgebra tiene su propia visión de los sistemas numéricos: los axiomas de Peano para los naturales, los enteros son una construcción algebraica sobre los naturales y los mismo con los racionales sobre los enteros (un simple ejemplo de cuerpo de fracciones de un dominio de integridad) y también los complejos respecto a los reales. Esto no es problemático, pero la dificultad está en los reales, cuya construcción a partir de los racionales, el llamado punto transcendente del álgebra, requiere los métodos infinitos del análisis. La opción algebraica de van der Waerden seguía los trabajos de Artin & Schreier, 1926-27, al tomar la noción abstracta de cuerpo real cerrado como mejor aproximación algebraica a los números reales. Las consecuencias de esta opción para el álgebra clásica son rotundas. Si no hay números reales no cabe la resolución numérica de ecuaciones, que es abandonada por el álgebra naciente como un tema analítico, y desaparece el teorema fundamental del álgebra, que es un teorema de análisis. La resolución de ecuaciones pasa ser para el álgebra una cuestión esencialmente teórica de naturaleza axiomática. Se pasó a trabajar con un cuerpo arbitrario y las ecuaciones tendrán las raíces en su clausura algebraica, construcción que no usa los métodos infinitos del análisis pero sí los recursos no finitarios de la teoría de conjuntos, la inducción transfinita o el axioma de elección.

La teoría de Galois se explicó después sobre estos cimientos estructurales (grupos, cuerpos y la inevitable álgebra lineal) y todavía recibiría una vuelta de tuerca adicional en esta dirección cuando Artin, en 1938 y 1942, reelaboró la teoría con los cuerpos de descomposición de Kronecker. Artin sólo necesitó el polinomio para obtener la primera extensión, del cuerpo de coeficientes al cuerpo de descomposición, y puso en el centro de la teoría la correspondencia (conexión de Galois se llama hoy) entre los cuerpos y los grupos, que son grupos de automorfismo de los cuerpos, sin más dependencia de la ecuación. Kierman (1971) sostiene que para Galois era esencial la distinción entre la teoría y la práctica, de modo que lo que el genial galo pretendió fue desarrollar la teoría de los grupos y cuerpos que surgen de las ecuaciones, de modo que la resolución final de éstas era una simple aplicación. Weber ya destacó la importancia de conocer estas relaciones entre los grupos de sustituciones y cuerpos (numéricos) asociados a las ecuaciones antes de abordar el estudio de su resolución, y Artin se recreó en la suerte dando autonomía a los grupos y los cuerpos y dejando la resolución de ecuaciones como una simple aplicación.

La imagen estructural se fue imponiendo, pero durante un par de décadas coexistió con la imagen clásica, aunque los textos epígonos de Weber incorporaban cada vez más conceptos abstractos, pero sin cambiar los objetivos y el esquema general, tan sólo un nuevo vocabulario para el viejo plan del álgebra. Es oportuno señalar que en España hubo una adhesión muy temprana a la nueva imagen del álgebra, aunque no se tradujo en obras concretas. Es esto como en otras cosas, J. Barinaga (1890-1965), un brillante matemático que había empezado tarde su dedicación a esta ciencia, fue contrincante de JRP, pero su carrera quedó truncada por la guerra civil y las privaciones posteriores que la contienda ocasionó a los vencidos[60]. Barinaga dio en julio de 1932, siendo catedrático reciente de Análisis Matemático en Madrid y director del Laboratorio y Seminario Matemático, un curso de tres lecciones[61] dirigido a los profesores de las Escuelas Normales sobre "el concepto de resolubilidad de ecuaciones a través del desarrollo del Álgebra". El contenido del curso en clásico y elemental, pero en la introducción y en el epílogo Barinaga toma posición sobre la naturaleza del álgebra. Afirma que va a hablar del que, "hasta hace poco tiempo, ha sido el problema central del Álgebra: *la resolución algebraica de las ecuaciones*", pero informa a su auditorio que el rumbo de la teoría que ha explicado ha sido abandonado y concluye: "Steinitz (1910), con su teoría de los cuerpos abstractos, y la escuela hamburguesa (Artin, Hasse, Schreir), desde 1925 han restituido violentamente el problema a los cauces abiertos por Galois, y hoy el Álgebra moderna, como ya lo había presentido en 1861 Kronecker, es una disciplina con campo de existencia y metodología propia que no solamente no necesita del análisis y de la geometría para su desenvolvimiento, sino que tiende a invadir (a algebrizar) otras ramas de la Matemática y de la Física". Barinaga hizo en 1932 un buen resumen del *Paradigma hilbertiano*[62].

Distinto fue entonces el caso de JRP, que no quiso abandonar el álgebra clásica y la defendió de forma militante frente al formalismo que tenía como consecuencia la separación del álgebra del seno del análisis matemático, lo que sucedía cuando se abandonaban de los cuerpos real y complejo para trabajar con un cuerpo arbitrario. No sólo rechazó la imagen estructural del álgebra sino también la introducción de cierto grado de formalismo por parte de los últimos seguidores de la imagen clásica de Weber, añadido que calificaba de contrario a la marcha de la historia. Ya en el primer prólogo del 16 y en de la primera edición de los *Elementos* del 17 se manifestó contrario al este formalismo inútil y, por el contrario, partidario de llegar lo más lejos posible con los medios más elementales posibles, lo que también hizo en las *Lecciones* con la teoría de Galois.

60. Ver la necrológica de Cuesta Dutari (1966).
61. Se publicó un resumen (Barinaga, 1932), firmado por L. Pérez-Cacho.
62. Otros detalles que prueban el interés de Barinaga por el álgebra abstracta son la necrológica de E. Noether (Barinaga, 1935) y el proyecto, formulado en 1937 pero fallido por razones biográficas obvias, de los cuerpos cuadráticos reales (Ausejo & Millán, 1989).

(b) Retoques a la resolución numérica

La esperada revisión de las *Lecciones* apareció parcialmente en un primer fascículo de 1932 (los retoques y ampliaciones de la edición del 24) y después la novedad esencial, la teoría de las ecuaciones algebraicas; la segunda edición completa apareció 1935 y la tercera en 1947, también con un primer fascículo el año anterior con la primera parte[63]; finalmente, la cuarta edición surgió en 1957. Las ediciones segunda y tercera comparten el prólogo, en el que se describe la imagen del álgebra que presentan, y las diferencias entre ellas no son decisivas. Vale la pena destacar desde el principio que en estas obras tuvo una participación importante San Juan, que ya había colaborado, en menor medida, en la tercera edición de los *Elementos*. Afirma JRP en el prólogo que el origen de la nueva obra (se referirá a la resolución algebraica) se encuentra en un curso del año 33 que San Juan se encargó redactar, "amén de realizar la ímproba tarea de revisar pruebas y componer índices", así que esta edición surgió, sobre todo en sus partes nuevas, del espíritu del maestro y por la mano del discípulo.

La edición del 35 representa, al fin, un texto español de una de las más brillantes teorías del siglo XIX, la resolución algebraica de ecuaciones; pero también aporta algunos cambios en los temas de 1924. Las modificaciones esenciales operadas en el contenido matemático de la primera edición fueron explicadas por Llorente (1985) y no vale la pena insistir ahora en ellas. Pero, a la vista de los comentarios realizados antes, conviene añadir que JRP mejoró en cortesía al suprimir la nota que ponía al descubierto un error de Merino en el método de Gräffe y suavizar, sin eliminar del todo, la referencia a los colegas que dejaban incompleta la demostración del teorema de Bézout. Los retoques y ampliaciones realizadas a esta primera parte son las mejoras naturales que podía haber introducido de inmediato en los apresurados apuntes del 16, pero recordemos que en la edición (más bien reimpresión) del 24 confesó no haber encontrado todavía tiempo para ello; más de diez años después lo hace gracias a la ayuda de San Juan. El resultado es un buen texto —ciento cincuenta páginas— de la parte analítica de la resolución de ecuaciones, completado con la eliminación, que pudo haberse terminado a finales de la segunda década del siglo a no ser por lo difícil que era encontrar un hueco en la exuberante agenda de su autor. El interés de JRP por situar el álgebra dentro del análisis, ubicación que tiene raíces históricas reflejadas en el plan de estudios, se manifiesta en su insisten-

63. La aparición fraccionada de las nuevas ediciones crea alguna confusión en las referencias: la reseña de San Juan a la segunda edición completa (*Revista Matemática Hispano-Americana* (2ª Ser.) 10 (1935), p. 140) fecha la obra en 1932; en la portadilla de la cuarta edición pone que la segunda fue en 1931. También es confuso el negocio editorial: la primera edición, está fechada en Madrid pero se realizó en el establecimiento tipográfico de A. Medina en Toledo, e igual la segunda; en cambio hay fascículos de 1932 (primera paete) impresos por C. Bermejo en Madrid, quien también se ocupó de la tercera edición en 1947, pero la cuarta se adjudicó a Nuevas Gráficas. Todos los datos que damos aquí están cotejados sobre ejemplares consultados y coinciden con los de Llorente (1985), excepto en la tercera edición, que Llorente no pudo localizar.

cia por resaltar el carácter analítico del teorema fundamental, que representa el punto transcendente del álgebra, y también en la incorporación de algún tema que "no corresponde, en realidad, al Álgebra en su sentido estricto", como los métodos de aproximación y de interpolación para funciones arbitrarias.

Con motivo de la guerra civil, recién publicada la segunda edición, JRP se quedó en Buenos Aires al tener que suspender su alternancia anual entre Argentina y España, que no reanudó hasta el mismo año de la tercera edición, así que la remodelación de la obra producida por San Juan recibiría el visto bueno del maestro por correspondencia o nada más llegar. La tercera edición, retoques, correcciones y notas breves aparte, sólo modifica en la primera parte el tatamiento del método de Gräffe, usando investigaciones de San Juan de la última década. En la segunda parte los cambios son mayores, a pesar de que, como dijimos al principio, los autores no eran investigadores en álgebra[64], sino matemáticos, de indudable calidad, que investigaban en otros campos del análisis y estudiaban los libros extranjeros en curso para preparar las lecciones de álgebra que impartían.

(c) Novedades en la teoría de las ecuaciones algebraicas

Las últimas lecciones de la edición del 24, que estaban dedicadas a la teoría elemental de la resolución algebraica, sufrieron alguna variación. Primero añadió una lección complementaria sobre funciones simétricas y luego planteó la solución de las ecuaciones de grados dos, tres y cuatro mediante el método común de las funciones simétricas de las raíces y no por los métodos más clásicos de la edición anterior, que ya estaban recogidos en *Elementos*. Esto le daba pie a introducir la noción de resolución algebraica de ecuaciones, a la que dedicará en detalle los capítulos nuevos, y a eliminar por ello las pocas páginas dedicadas a la resolución por radicales. Luego mejora y amplía un poco el tratamiento de los problemas geométricos clásicos, haciendo una lección aparte para la división de la circunferencia en partes iguales, lección que en la tercera edición apareció como "nota" al final del libro.

JRP enuncia así lo que es resolver algebraicamente una ecuación: "expresar sus raíces como funciones racionales de los coeficientes de la ecuación y de las raíces de otras ecuaciones auxiliares bien conocidas". Quiere aprobar la asignatura pendiente del álgebra española, y lo hace siguiendo uno de sus hilos conductores favoritos, el histórico; así que lo primero que se plantea es la resolución por radicales,

---

64. Un año antes de la última edición de las *Lecciones*, de la que luego hablaremos, en discurso de contestación al de ingreso de San Juan en la Academia de Ciencias de Madrid, JRP dijo: "Nos ha declarado que no es algebrista, y nadie lo encasilla en esa secta, pues ya tiene tarea bastante con las aproximaciones asintóticas; pero cuando algo quiero saber o aclarar en la actual maraña algebraica, a él recurro en consulta, seguro de que ha visto lo esencial, y que la plétora de nombres que él ignore, no valen la pena de estudiarlos" (Rey Pastor, 1956).

65. En la edición del 47 se retoca este fragmento, que pasa a decir: "como Ruffini reconoció a finales del siglo XVIII y posteriormente con mayor generalidad Abel, como veremos oportunamente".

entendiendo por tal que las ecuaciones auxiliares que aparecen sean binomias. Este es lo que consiguieron los algebristas italianos renacentistas hasta el grado cuatro y es imposible si el grado es mayor, "como Ruffini reconoció a finales del siglo XVIII y nosotros demostraremos oportunamente", dice JRP[65]; en efecto, este es el objetivo del primero de los dos capítulos añadidos, siguiendo los métodos de Galois. Pero luego enumera cuatro problemas que quedan abiertos y determinan lo que entiende por resolución de ecuaciones: (1)"Ya que no no sea posible obtener una sóla función de los coeficientes formada por radicales que satisfaga a toda ecuación de grado n, ¿no será acaso posible lograr para cada ecuación numérica de grado n una expresión que la satisfaga, formada por radicales numéricos?", (2) "¿cuáles son las ecuaciones de todos los grados resolubles por radicales?", (3) "¿cuáles serán resolubles por radicales cuadráticos exclusivamente?" y (4) "estudiar las ecuaciones que sean resolubles en el sentido amplio".

Este programa explicita la declaración de objetivos que había expresado en el prólogo: "Tenemos la pretensión de haber logrado una sensible simplificación de la teoría de las ecuaciones algebraicas, llegando a los resultados finales que suelen alcanzarse en los libros análogos, con menor complejidad de recursos, que se traduce en una visible brevedad de espacio, a pesar de la multitud de ejemplos aclaratorios que hemos juzgado indispensables". Como en *Elementos*, selecciona los objetivos y pretende llegar a ellos lo más rápidamente posible para no perder tiempo en detalles innecesarios[66]. Desde este punto de vista, introducir al principio "las interesantes teorías algebraicas, cada día más en boga" sería supérfluo y JRP afirma que hacerlo así exigiría reedificar la exposición "con independencia del Análisis y de la Aritmética del continuo", lo que le parece a fin de cuentas ilusorio, porque cuando de nuevo "se quiere ligar el Álgebra con la Aritmética de los números reales y complejos" —punto final que JRP presupone inevitable— "reaparece el punto transcendente, que es preciso superar con los recursos del Análisis para poder edificar la teoría de las ecuaciones numéricas". Como éste es para JRP el fin último del álgebra, es mejor ir derecho a ello y, en todo caso, añadir al final[67] algunos capítulos del "Álgebra moderna que pueden tener cabida en un libro de corte clásico". Esto lo hará "si la ocasión se presenta de explicarlos en algún curso venidero", confirmando así que su dedicación al álgebra está condicionada por los cursos que ha de impartir, y efectivamente es lo que hizo en la última edición de 1957.

66. Este hecho es lo más resaltado por San Juan en la reseña de 1935 ya citada: "No pueden, en efecto, alcanzarse los resultados demostrados en este libro con menos eslabones intermedios. Profundizar el substractum de los conceptos y simplificar las más intrincadas relaciones, son cualidades peculiares del insigne analista que bien patente aparecen en la presente obra. La teoría de Galois tendría probablemente una representación esquemática breve en la mente de su genial creador, pero los apóstoles de una doctrina, menos sintéticos que su maestro, la ramifican y complican ocultando con ello su verdadero núcleo. Una reacción viva y enérgica contra esto es la obra del Sr. Rey Pastor".

67. Otra posibilidad es, escribió para terminar el prólogo, preparar "un tratado especial, si antes no llena algún otro profesor esta laguna en la literatura matemática de lengua española".

JRP cita en el prólogo los "excelentes tratados" de Perron (1927) y de Haupt (1929) como ejemplo de obras que han cedido a la tentación del álgebra moderna siguiendo el camino "inverso del histórico" que pone las nociones del álgebra formal antes que el álgebra de los números reales y complejos. Dichos tratados, casi simultáneos con el de van der Waerden, se encuentran entre los que siguen la imagen weberiana del álgebra pero incorporan en cierta medida las teorías algebraicas, así que la posición de JRP es más próxima a Weber que la de esos autores. Incluso fue menos "moderno" que Weber, pues no se entretuvo —como hizo el alemán y, siguiendo su senda, Cámara en su artículo del año 15— en destacar la correspondencia grupos-cuerpos como paso previo al estudio de las ecuaciones, haciendo un principio de separación entre un corpus teórico general y su aplicación a las ecuaciones. Este corpus está en el capítulo inicial de la tercera parte, que Weber titula *Teoría de Galois*, mientras que los demás se dedican a las ecuaciones directamente, y quizás por ello JRP evitó mencionar esta teoría, hablando siempre de la *teoría de las ecuaciones algebraicas* y, en su caso, de los *métodos* que el genial francés utilizó.

JRP desarrolló la teoría de las ecuaciones algebraicas en dos capítulos con un total de una setenta páginas. El primero se titulaba *Resolución general de la ecuación de grado n*, y en la tercera edición pasó a llamarse *Aplicaciones de los grupos de sustituciones a la resolución de ecuaciones*, que coincide con el título del segundo capítulo de la tercera parte del Weber; lo que ya indica que se va derecho a las ecuaciones. Además, el título original del 35 recuerda el del penúltimo capítulo de Weber, *Resolución algebraica de las ecuaciones*, que se abre con estas palabras: "La resolución algebraica de las ecuaciones es una de las cuestiones más antiguas, a propósito de la cual se ha desarrollado particularmente el Álgebra moderna. Se entiende por estas palabras la representación de las raíces de una ecuación por una sucesión de radicales, o su cálculo con la ayuda de la extracción de raíces en número finito. La teoría de grupos arroja sobre esta cuestión la luz más intensa". A este punto es al que JRP quiere llegar en primer lugar por el camino más corto posible. El segundo capítulo nuevo, que mantuvo el título en las dos ediciones, *Resolución algebraica en general*, desarrolla el resto de las cuestiones del plan de trabajo antes mencionado. Haremos la descripción de ambos capítulos siguiendo la edición de 35 y luego comentaremos los cambios introducidos en la siguiente.

El primero comienza con dos lecciones dedicadas a repasar los grupos de sustituciones (define grupo como un subconjunto cerrado de un grupo simétrico), tratados ya en *Elementos*, a estudiar su efecto sobre las funciones racionales cuando se aplican a las variables, y a demostrar el teorema de Lagrange, con coeficientes que implícitamente se suponen racionales, como siempre que JRP habla de algoritmos algebraicos. La lección tercera introduce los "campos de racionalidad" como cuerpos de números o funciones y extiende a ellos el teorema de Lagrange anterior, luego las ecuaciones irreducibles y los números "irracionales algebraicos" sobre un campo (irracionales porque están fuera del campo y algebraicos porque son raíces de ecuaciones con coeficientes en el campo), entre los que distingue los "irracionales naturales" (funciones racionales no simétricas de las raíces). Menciona el campo engendrado sobre los racionales por los coeficientes de una ecuación, pero se olvida de definir el campo que se obtiene a partir de uno dado "por adjunción de un irracional" (extensión algebraica simple), concepto que va a utilizar en la lección siguiente, en la que define el grupo de Galois de una ecuación y muestra cómo se reduce este grupo por adjunción de irracionales naturales, dando la definición de ecuación resolvente de una ecuación dada. En esta lección explica que si la ecuación queda resuelta por ampliación del cuerpo entonces el grupo de Galois se reduce al trivial (en su afán de buscar caminos mínimos no menciona en este momento el recíproco) y prueba que el grupo de Galois de la ecuación general es el simétrico y que se reduce al alternado por adjunción de la raíz cuadrada del discriminante.

Hasta aquí, JRP toma lo mínimo que necesita de los dos primeros capítulos del Weber (del primero poco más que definiciones) para alcanzar el teorema de imposibilidad en la versión que llama de Ruffini (después verá otra que llama de Abel, en la que el concepto de radical es más exigente). Este teorema lo tiene a mano después de los conceptos previos, pues le basta particularizar la adjunción al caso en que los irracionales naturales son radicales (raíces de ecuaciones binomias) y ver que la reducción del grupo exige la existencia de subgrupos invariantes, siendo el alternado el único de ellos en el grupo simétrico cuando el grado es mayor que cuatro, así que no se puede reducir hasta el grupo trivial. Con esto ha probado que más allá de cuatro no hay soluciones generales como las encontradas para los grados inferiores, pero, dice, "cabe la duda (no resuelta, aunque sí planteada por Ruffini) de si será posible encontrar expresiones radicales no naturales, es decir, que no sean funciones racionales de las raíces", como por ejemplo la raíz cuadrada de un coeficiente o la de la diferencia entre dos de ellos. Para probar esta forma fuerte de irresolubilidad necesita más recursos y tiene que volver atrás en la teoría general que ha espigado (si la referencia es la exposición de Weber) para echar mano de la ecuación resolvente total o de Galois, de su carácter de ecuación normal, y con ella probar que toda reducción del grupo de Galois lograda mediante la adjunción de un irracional cualquiera puede obtenerse por adjunción de un irracional natural; luego usa la transformación de Tschirnhausen para concluir que si se adjunta una raíz de una ecuación normal el grupo de Galois se reduce a un subgrupo invariante (lo que antes sólo había probado para radicales naturales, es decir, para ecuaciones binómicas, que son normales) y de aquí deduce el teorema de Abel. Esta parte final está explicada de modo muy escueto, introduciendo la transformación de Tschirnhausen sobre la marcha y afirmando sin más lo que necesita de ella, como si fuera una vieja conocida del lector, que podía por ejemplo estudiarla en el libro de Weber, que le dedica un buen número de páginas.

Al final del capítulo que acabamos de describir, JRP demostró el recíproco que no necesitó para el teorema de Ruffini, a saber, que si el grupo de Galois se hace trivial entonces la ecuación es resoluble. Este es el punto de partida del segundo capítulo nuevo, que es el último del libro, que empieza estudiando el papel que juegan las resolventes normales e irreducibles en la reducción del grupo de Galois, para dar entrada enseguida a la resolución por radicales cuadráticos y a la teoría de Gauss de la división de la circunferencia en partes iguales (que le obliga a intercalar una lección sobre las raíces primitivas de la unidad, ampliación de lo visto en *Elementos*). El capítulo termina con dos lecciones dedicadas a identificar las ecuaciones resolubles por radicales (metacíclicas) y a probar otro resultado de Abel, la imposibilidad de resolución parcial por radicales: "si una ecuación tiene algunas raíces expresables por medio de radicales, son todas calculables por radicales".

Hemos explicado el contenido de los capítulos nuevos con referencia al texto estándar de Weber, pero en realidad JRP no lo menciona, ni tampoco otros, salvo Perron y Haupt en el prólogo. Llama la atención que la segunda parte del libro, en la edición del 35, carezca de referencias habituales en las obras de JRP, colocadas a pie de página y en la bibliografía final; incluso suprimió la que había al final de la edición del 24. Esto, junto con algunos aspectos de la construcción interna de las lecciones, transmite la idea de que se trata de un texto sin terminar de pulir que previsiblemente tendría pronto una nueva edición mejorada, pero la guerra civil cortaría el proceso.

La continuación llegó años después de la mano de San Juan, que le había sucedido en la cátedra madrileña. Al repetir el curso de su maestro, San Juan se dio cuenta de algunos desajustes y presentó una versión nueva con varias mejoras y una ligera reordenación de los temas; lo hizo como apéndice a una obra suya (San Juan, 1945-46)[68] de la que más tarde hablaremos. Un año después, la versión de San Juan sustituyó, con muy ligeros retoques, a la segunda parte de la edición del 35 para formar la del 47, en la que aparecen citas[69] a los *Elementos* y a los libros de Weber, Perron y van der Waerden. Ni la memoria de San Juan ni la tercera edición del libro incluían más bibliografía que la que aparece en la notas. Antes de dar un rápido repaso a las variantes de la tercera edición vale la pena señalar dos puntos en los que esta última difiere de la memoria de San Juan.

El texto de San Juan explica el método de Lagrange en las ecuaciones de grado pequeño y para más detalles envía en una nota al pie de página al artículo de Barinaga (1932) que hemos citado antes; en el libro esta nota remite al Weber[70]. Sabido es que

---

68. El texto no estaba dividido en dos partes y todo él respondía al título *Aplicación de la teoría de grupos de sustituciones a la resolución algebraica de ecuaciones*. En el prólogo de la memoria decía el autor a propósito del apéndice: "...no hemos vacilado en reproducir literalmente párrafos de la Lecciones de Algebra de nuestro maestro Rey Pastor, 2ª ed. Su belleza lo justifica. Un curso no es una memoria original donde sólo caben resultados nuevos; justamente la reproducción sin deformación ni enmascaramiento, tantas veces funestos, permite apreciar mejor la parte original de un trabajo".

69. No se tuvo mucho cuidado al hacer el ajuste porque en alguna ocasión aparecen citas a la segunda edición de Lecciones que se refieren a cuestiones que están, claro, en la propia tercera edición, una páginas antes de la cita.

70. La nota de San Juan (p. 499) decía: "Véase cualquier tatado completo de Álgebra o las conferencias de D. J. Barinaga, *El concepto ...*" La nota en *Lecciones* fue: "El desarrollo detallado de los cálculos figura en algunos tratados de Álgebra. Véase, por ejemplo, Weber, Vorlesungen über Algebra B.I del cual existe traducción francesa".

Barinaga y JRP se enfrentaron en los años de la República y que en 1947-48 el riojano se incorporaba al aparato científico del régimen franquista que había tenido represaliado a Barinaga hasta 1946.

La segunda observación tiene que ver con el álgebra. Al principio de este apartado hemos señalado los cuatro puntos del programa que JRP propuso para la resolución algebraica de ecuaciones, una vez probados los teoremas de Rufini y de Abel. En la edición del 35 se dice después de la cita del punto (1) que hemos reproducido más arriba: "He aquí un problema que no resolvió Ruffini y que también tiene contestación negativa, dada por Abel". El discípulo corrigió al maestro: "He aquí un problema que no resolvieron ni Ruffini ni Abel y que también tiene contestación negativa". Luego, después del teorema de Abel, introdujo un breve apartado sobre ecuaciones sin afecto en el que dio información bibliográfica sobre el particular[71]. Este apartado apareció en la tercera edición pero no se hizo la corrección del punto (1), que aparecía en un capítulo anterior, sin duda por descuido.

Las modificaciones introducidas por San Juan tienden a aclarar la materia que JRP había expuesto a veces sin detenerse en aspectos introductorios. Así, por ejemplo, da más detalles sobre el método de Lagrange, también sobre la adjunción de irracionales, y amplía el tratamiento de la transformación de Tschirnhausen. Además hace alguna ligera reordenación y añade notas con referencias a obras de consulta. Amplía en los ejercicios el tratamiento de las ecuaciones cíclicas, metacíclicas y abelianas, que antepone al de la resolución cuadrática, orden inverso al de la edición anterior.

Así queda de momento la versión española de la teoría de la resolución algebraica de las ecuaciones, clásica pero original en su tratamiento, que bien podía haberse conseguido al menos un cuarto de siglo antes y que todavía parecía algo provisional por la falta de los detalles habituales en el acabado de los libros de JRP, como son las notas complementarias, la bilbiografía y los índices. Cuando apareció la tercera edición, JRP había cesado ya como investigador matemático, respaldado por el homeneje que se le tributó en 1945 para celebrar sus bodas de plata con Argentina. Trabajaba sobre todo en historia y epistemología y sus libros eran o reediciones o trabajos más novedosos preparados con sus discípulos ya consagrados. El año 30 se esperaba con impaciencia la segunda edición de *Lecciones* con la teoría de Galois, pero la tercera edición no mereció atención especial en el mundo profesional. No obstante, tuvo arrestos para culminar en solitario su proyecto algebraico diez años después, cerano ya a los setenta años. La cuarta edición de las *Lecciones* es un libro con su sello personal y tiene como gran novedad la inclusión de un capítulo final sobre álgebra axiomática. Pero antes de entrar a su examen conviene que volvamos la vista a la escena algebraica española.

71. Con libros desde Weber hasta van der Waerden y artículos de Schur, Baer, Ore y Noether

(d) Inicios del álgebra abstracta axiomática en España

Hemos visto que hay un texto de Barinaga que, en 1932, acusa recibo del cambio de imagen del álgebra a propósito de la resolución de ecuaciones, y que cinco años después programó trabajar sobre cuerpos reales, pero este proyecto moderno quedó sepultado por la contienda. En al ámbito de la geometría analítica, Cámara había introducido el cálculo vectorial en su texto de 1920 y en la segunda edición, de 1941, ya se aprecia con mayor claridad el uso de estructuras Álgebraicas lineales[72]. Ese mismo año se difunde en la *Hispano-Americana* el folleto en el que Ore, en 1936, intenta incluso formular una teoría general para tódas las estructuras, el álgebra universal que aparece también en el famoso tratado de retículos de Birkhoff, de 1940, que fue reseñado[73] en 1947.

Pero está más en la línea de nuestro trabajo destacar la aportación de San Juan en los primeros años cuarenta, en la obra que hemos citado por contener el apéndice sobre la resolución algebraica de ecuaciones. Se trata de un curso de fundamentos matemáticos del análisis dimensional, solicitado por la Cátedra de Física de la Fundación Conde de Cartagena, de la Real Academia de Ciencias, que finalmente quedó redactado con detalle en tres partes: el cuerpo central es la teoría física[74], que está flanqueda por una amplia introducción y un apéndice, ambos matemáticos. Ya conocemos el contenido del segundo, cuya presencia colateral en este asunto explica San Juan en el preámbulo: "A petición de algunos oyentes matemáticos explicamos brevemente algunas aplicaciones Álgebraicas de los grupos de sustituciones, que fueron utilizadas como ejemplos didácticos de las nociones de grupos abstractos necesarias para la teoría". Nótese que habla de grupos abstractos. En efecto, San Juan parte de la teoría de las magnitudes de los *Elementos* de JRP, que ya dijimos que esbozaban los espacios vectoriales, y como las magnitudes o dimensiones no son números sino entes abstractos se necesita operar con ellos "mediante leyes formales, que tengan el mismo valor apodíctico que las del cálculo numérico", que es el método de "la Matemática moderna abstracta". Así, toma como referencia el texto de van der Waerden y comienza su memoria con unas nociones de álgebra lineal (espacios vectoriales, dependencia lineal , matrices y sistemas) precedidas de grupos, anillos y cuerpos con sus homomorfismos. La imagen del álgebra moderna está instalada en la primera parte, mientras que el apéndice mantiene la imagen del álgebra clásica, quizás porque San Juan trataba tan sólo de exponer un ejemplo de aplicación de los grupos de sutituciones.

---

72. Ver el trabajo de J.J. Escribano sobre el texto de Cámara en este volúmen.
73. La reseña de Ore por S. R. García está en *Revista Matemática Hispano-Americana* (4ª Ser.) 1 (1941), p. 57; la de Birkhoff por T. R. Bachiller en *Idem.* 6 (1947), 224-225.
74. Es el tema de la tesis de Oñate, reseñada en este mismo volumen por M. Sánchez-Gabriel, como complemento del trabajo de Llombart que le precede con la biografía del físico y matemático riojano.

Por entonces JRP gestionaba desde Argentina el retorno que no llegó a concretarse hasta 1947, y en los años de ausencia de España había publicado un curso de *Geometría algebraica* (Rey Pastor, 1940) y una edición argentina de *Elementos* (Rey Pastor, 1945). El primer libro citado es un curso con prólogo, índice y bibliografía compuestos en imprenta, pero el cuerpo del curso está escrito a máquina, forma habitual de edición de sus "Cursos de Matemáticas Superiores" en Buenos Aires. Es la segunda edición del primer volumen de uno de los cursos[75], que incluye un capítulo de la teoría de las formas algebraicas y la polaridad siguiendo el ya clásico Enriques & Chisini, de 1915-24.

La edición argentina de *Elementos* se anunciaba como una edición con "no muy amplias pero importantes modificaciones", pero permaneció inalterada en lo esencial, sin cambiar ni el contenido de la obra ni la imagen del álgebra que reflejaba. Tan sólo incluye algunas adiciones en las que da más relieve a los axiomas de Peano de la aritmética y menciona el álgebra moderna, cambios que anuncia al final del prólogo, que es el mismo de la edición española con algunos matices adicionales. Cuando dice que el análisis matemático se divide en algebraico y trascendente, anota que "modernamente se ha desarrollado considerablemente un cuerpo de doctrina llamado *Álgebra abstracta*, armoniosa construcción lógica sobre axiomas muy amplios que pueden considerarse como una generalización del Análisis algebraico". Más adelante, al comentar la relación entre el libro y el plan de estudios añade otra nota: "En los países hispano-americanos, todavía no han sido organizados completamente los doctorados en Ciencias Exactas; y como los primeros cursos, meramente intuitivos, son los destinados a Ingeniería, Química, etc., el acceso a la teoría rigurosa llega irremediablemente tarde". El ambiente argentino no era pues propicio para una modernización del libro.

Una de las novedades de esta edición es la extensión dada a los números "complejos superiores" y el teorema final de la aritmética, que completa con este caso particular las conceptos de álgebra lineal iniciadas con los determinantes[76]. La otra novedad es "la nota sobre los ideales de Kummer ... y finalmente, las nociones sobre Álgebra abstracta, que unidas a las definiciones de módulos, anillos, cuerpos, etc., dispersas en el libro, pueden despertar curiosidad por conocer esta disciplina, cuyo vertiginoso desarrollo actual, muy especialmente en el capítulo que abarca la Topología, antes antónoma y ahora algebrizada, la convierte sin duda en la disciplina matemática epónima de nuestro siglo". La biliografía está también algo modificada y en ella recomienda, para estudiar el "Álgebra titulada moderna o abstracta", el libro de Birkhoff & Mac Lane como una "introducción elemental, recomendable antes de abordar el estudio de la obra fundamental", el van der Waerden, que califi-

75. Desconocemos la primera edición, y si hubo segundo volumen.

76. Este es uno de los temas que D'Ambrosio (1985) resalta al comentar la influencia de *Elementos* en América Latina, pues preparó la llegada del álgebra lineal y multilineal moderna.

ca como "la primera obra sistemática, basada en lecciones de E. Noether". De modo que no cambió su libro, pero dejó constancia de que la nueva imagen del álgebra estaba en circulación.

También mantenían en España la imagen clásica del álgebra las lecciones de E. Linés Escardó (1914-1988) en la Universidad de Barcelona (Linés, 1946)[77].

En 1951, pocos años después de su retorno a España, JRP impartió en el INTA-ET[78] un curso sobre métodos de la física matemática (Rey Pastor, 1955) basada en la famosa obra de Courant y Hilbert, realizada durante la primera guerra mundial, que empieza con un capítulo dedicado al espacio de Hilbert en el que introduce el espacio vectorial como una prolongación de la teoría de las magnitudes, pero rápidamente se instala en los espacios funcionales concretos con los que va a trabajar. En las primeras líneas JRP destaca que el método vectorial permite abreviar los cálculos de la geometría analítica, a la que devuelve el carácter intrínseco de los griegos sin perder el aspecto metódico que le confirió Descartes.

4. Más allá de 1950

En la última parte de su vida JRP vió cómo los matemáticos más jóvenes estaban incorporándose plenamente a la investigación en álgebra moderna. En la década de los cuarenta había empezado a publicar con frecuencia Abellanas, quien en 1952 reseñó en la *Hispano-Americana* un texto Pickert seguidor de van der Waerden y de Bourbaki. También seguía al holandés otro joven, Gaeta, que dos años después tradujo y publicó en la revista española el artículo de Mac Lane (1947) aparecido en *The American Mathematical Monthly*[79] dos años antes, que exponía las líneas principales de investigación en álgebra abstracta (no aparece la teoría de ecuaciones) y terminaba afirmando que "el álgebra tiende a estudiar la estructura explícita de los sistemas definidos axiomáticamente y que son cerrados respecto a una o varias operaciones racionales". Estos jóvenes ya no podían recibir con entusiasmo la nueva edición de las *Lecciones*, porque JRP seguía pensando en su vieja asignatura pendiente con ideas tradicionales. Antes de escribir la que sería la última edición de las *Lecciones*, JRP se ocupó indirectamente del álgebra en otras obras generales.

---

77. Agradezco a M.C. Escribano la copia de este texto que me proporcionó. Se trata de 184 páginas reproducidas a mano, como a principios de siglo, con la página de portada en tipos de imprenta. Puede ser un borrador, que funcionara como apuntes, de un libro que no prosperó. Ver la biografía del matemático riojano E. Linés que M.C. Escribano presenta en este volumen. Linés trabaja con cuerpos de números cubriendo divisibilidad de polinomios, interpolación, funciones simétricas y eliminación. La divisibilidad de polinomios alcanza cierto carácter general al incluir el teorema de transferencia de la factorización prima a los anillos de polinomios con coeficientes numéricos.

78. Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial Esteban Terradas.

79. Ver Corry (1996) para el papel jugado por Ore, Birkhoff y Mac Lane en la evolución de las estructuras algebraicas y la transición hacia las categorías, que hicieron su aparición en estas fechas.

(a) Reflexiones en los primeros cincuenta

El paso del ecuador del siglo propició que JRP reflexionara ampliamente sobre los cambios producidos en la matemática al pasar del siglo XIX al XX, al cambiar, con la terminología actual de Hormigón, del paradigma lagrangiano al hilbertiano. Ante la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias pronunció un discurso inaugural de la sección de matemáticas (Rey Pastor, 1950) y luego presentó una comunicación (Rey Pastor 1951a) en dicha sección. El discurso está dedicado a señalar los cambios decisivos hacia la abstracción que se produjeron en diversos campos de la matemática en torno a 1870 y la evolución general posterior hasta el fin de siglo; la comunicación da un repaso a la matemática abstracta del siglo XX. En realidad ambos textos no son sino los dos capítulos últimos de la *Historia de la Matemática* (Rey Pastor & Babini, 1951)[80]. Los autores presentan el libro como un análisis cronológico del proceso general de abstracción iniciado por los griegos, cuyo genio, dicen, "más platónico que pitagórico, se detiene a las puertas del álgebra, disciplina de formas vacías, que más tarde elabora la civilización indoarábiga; mero cálculo formalista sin significado real concreto, es decir, capaz de infinitas interpretaciones". El libro avanza por la historia "hasta desembocar en la matemática actual, de abstracción quintaesenciada y trabajo subterráneo, que va descubriendo las raíces últimas, las muy pocas ideas esenciales de que se nutren las más frondosas teorías". De esta forma pretenden llegar "a la cabal comprensión de esas desconcertantes álgebra y topología abstractas, cuya arbitrariedad irrita a los educados en la matemática clásica que no completaron su formación con el estudio histórico". En el penúltimo capítulo, al hablar de los progresos del análisis en el periodo finisecular del XIX, dedican un apartado a "la arimética superior y el álgebra", al final del cual afirman: "El camino real que conduce al álgebra abstracta del siglo XX fue el descubierto por Hilbert en 1894 en su famoso «Bericht» por método indirecto, sin cálculo apenas, que el gran algebrista Gordan, «príncipe de los invariantes», calificó de «método teológico». Con este gran descubrimiento, incorporado por Weber en la 2ª edición de su monumental Álgebra de 1899 juntamente con los trabajos de Frobenius sobre «caracteres de grupos» y los grupos duales (lattices) y los «ideales» de Dedekind se inicia el siglo XX". De este modo, el "álgebra abstracta" ya tiene apartado propio en el último capítulo, aunque es recibida con un reproche léxico [81] muy típico de la actitud reypastoriana, presentado esta vez sin la virulencia que veremos más adelante: "Con este nombre y también como «Álgebra moderna» se designa en nuestros días un cuerpo de doctrina que no difiere esencialmente de la aritmética axiomática, tal como Hilbert la organizó en 1904; y merecía por tanto el nombre de «Aritmética universal» o calificativo análogo, reservan-

80. Es frecuente este tipo de repeticiones en las obras de JRP, aunque los autores de listados de su obra completa no suelen advertirlos.

81. La cita anterior y la siguiente son de Rey Pastor & Babini, (1951), la primera en pp. 328-329 y la segunda en p. 347.

do el nombre «álgebra» con su sentido clásico. Bien es cierto que aunque parezca abusivo llamar álgebra a un conjunto de entes ligados por algunas operaciones aritméticas, bien pronto concentra los tratadistas su atención sobre los polinomios y sus estructuras, ceros, etc., recobrando la palabra «álgebra», como teoría, su pristino significado".

También merece atención la edición ampliada de las conferencias de JRP en el Ateneo madrileño de 1915 (Rey Pastor, 1951b), obra que pone énfasis, como en el capítulo antes mencionado de la obra histórica, en las cambios del último tercio de siglo que anuncian la nueva matemática axiomática. Advierte en el prólogo que "hoy puede hablarse ya de Matemática del s. XX con perfil propio bien acusado" y por ello el nuevo libro que amplía el inicial de 1916, "está dedicado a la Matemática del s. XIX, con sus problemas y métodos característicos, que siguen progresando hasta nuestros días en columna rezagada, a la par que el grueso del ejército juvenil sigue el nuevo rumbo. De los progresos, algunos sorprendentes, realizados hasta 1949, hacemos esquemático inventario". Anunció que escribiría otro volumen dedicado al siglo XX, pero no llegó a hacerlo. JRP se autoclasifica en las extensas "orientaciones bibliográficas" que ponen término a cada capítulo; allí podemos ver que coloca sus *Lecciones* junto a tratados clásicos, a los que califica "de nivel superior", como Weber y Perron, mientras que designa "al ya clásico Van der Waerden" como "consulta ineludible" para el álgebra moderna, siendo libros introductorios los de Hasse y Birkhoff & Mac Lane. Atendiendo en especial a la teoría de las ecuaciones[82], JRP afirma: "Para medir la evolución sufrida por el Álgebra, compárese la exposición clásica de la Teoría de Galois (libros de Weber, Bauer, Perron, Rey Pastor...) con la de Hasse o Artin. La aparente brevedad radica en que el caudal de ideas que debe anteponerse en bloque al problema de Galois en aquellos libros ha sido diluido difusamente, porque la idea de grupo campea desde la primera página".

Vale la pena observar la ubicación que otorga JRP al libro de Hasse, que difiere de la que le asigna Corry[83], quien afirma: "En el primer capítulo del libro se definen cuerpos, anillos y dominios de integridad, y se deducen algunos resultados básicos, pero sólo en orden a ser capaz de formular el problema básico en terminos más precisos", y ese problema es la resolución de ecuaciones. Para Corry, el libro de Hasse es un libro de transición que debe estar como último escalón del grupo de los clásicos, pero previo al cambio de imagen del álgebra, que quita a la resolución de ecuaciones el papel de objetivo del álgebra para dárselo a las estructuras algebraicas, sus homomorfismos y sus propios problemas de relaciones internas y clasificación. Esta nueva imagen del álgebra la identifica JRP más con Bourbaki —aunque en el libro que comentamos no menciona al grupo francés sin duda por considerarlo demasiado elevado—, pues a Van der Waerden y a Artin, y por eso los alinea con

82. Ahora sí la llama teoría de Galois, nombre que no utilizó en las ediciones segunda y tercera.
83. Ver Corry (1996), pp. 58-61.

Hasse, los considera como autores que explican la teoría de Galois, aunque derivan la atención hacia las estructuras que anteponen. Veamos al respecto dos pasajes del libro de historia (Rey Pastor & Babini, 1951). Al explicar, al final del libro, el camino hacia la matemática del siglo XX, hay un apartado titulado "el álgebra y las álgebras" en el que dice: "En este siglo, en cuya tercera década sobresalen los nombres de Emmy Noether, Emil Artin y Van der Waerden, las investigaciones algebraicas revelan la gran variedad de estructuras algebraicas o álgebras, así como la fecundidad de la noción abstracta de ley de composición, culminando así un proceso que de un álgebra como teoría de las ecuaciones, de comienzos del siglo pasado, llega al álgebra de hoy como estudio de las estructuras algebraicas". Un poco antes se puede leer una distinción entre la matemática clásica y la matemática del momento: "En ambas priva la abstracción como proceso básico, pero mientras en la matemática clásica este proceso parte de entes concretos —objetos del mundo exterior, sensibles o no, operaciones, etcétera— en la matemática de hoy el proceso de abstracción elimina toda referencia a entes concretos y prescinde por completo de la naturaleza de lo que en él interviene, para dejar sólo el esquema formal de los entes y las relaciones abstractos que definen la estructura". De este modo, la matemática se convierte, dice citando a Bourbaki, en "el estudio de las relaciones entre objetos que, en forma deliberada, no se conocen y sólo se describen por algunas de sus propiedades, precisamente aquellas que se adoptan como axiomas básicos de la teoría".

JRP era consciente de que pertenecía a los epígonos del XIX y conocía, aunque no terminara de aceptar, la nueva mentalidad. Una muestra de ello aparece en el capítulo "Aritmética, álgebra y geometría algebraica" del libro dedicado al XIX, capítulo nuevo respecto a la primera versión de 1916, en el que dedica un apartado a "campos de racionalidad y cuerpos algebraicos", en el que se mueve entre campos de números y de funciones, todos los cuales contienen a los racionales y poseen una representación numérica que les entronca en la historia de la matemática; pero un poco después hay un apartado en el que introduce "cuerpos finitos de Galois" mediante congruencias de números y polinomios, porque una definición formal no le evocaría nada al lector no iniciado al que se dirige el libro; por eso empieza el apartado con este reproche: "La mentalidad algebrista, no solamente se recrea en su paraíso de símbolos, sino que apenas concibe la existencia de otras mentalidades sedientas de intuición y que sin ella no saben dar un paso en la intrincada selva. Por esa incomprensión psicológica urden sus tejidos en el telar de un simbolismo impenetrable a los no iniciados en sus secretos. Al revés de los filósofos, que perduran en la inveterada costumbre de usar lenguaje vulgar impreciso, cuando mucho convendría introducir términos y símbolos de significado unívoco, los algebristas suelen ocultar bajo el impenetrable velo de una lengua especialmente fabricada, ideas que expresadas en el casi vulgar romance de la matemática clásica mostrarían su sencilla y a veces elementalísima anatomía".

Esta cita nos pone frente al discurso de ingreso de JRP en la Academia de la Lengua, que tituló *Álgebra del lenguaje* (Rey Pastor, 1954)[84]. Como corresponde a la ocasión, el discurso de JRP no contiene álgebra en ninguno de los dos sentidos técnicos de la matemática, ni como resolución de ecuaciones ni como manipulación formal de símbolos, pero parece que se planea en este discurso la segunda acepción porque, incluso atendiendo al primer sentido, es la que se capta desde el mundo de la cultura general no especialista en matemáticas. Así se refleja en unos pasajes de la parte final del libro histórico, cuando expone el desarrollo de la lógica matemática[85]. Cuando JRP afirma (con Babini) que "a mediados del siglo XIX el álgebra invade un campo virgen o casi virgen: la lógica", se refiere al camino recorrido por los matemáticos ingleses desde la Sociedad Analítica hasta Boole y el álgebra invasora no puede ser sino la de las ecuaciones, que precisamente a partir de Boole y de otros planteamientos formales que surgen en campos diversos de las matemáticas se va haciendo abstracta y axiomática. Por otra parte, los autores aclaran un poco después la casi virginidad del campo lógico, al afirmar que "hacia el siglo XVII comenzó a advertirse cierta analogía entre la reducción algebraica y las reglas silogísticas, en vista de que tanto en un caso como en otro las letras vacías del álgebra podían llenarse con entes cualesquiera y, por tanto, también con proposiciones", aunque explican que, pasando por Leibniz, esta analogía no se concreta hasta Boole. Aquí aparecen juntas la resolución de ecuaciones y el cálculo simbólico en virtud de la abstracción que sustituye el cálculo con números por el cálculo con letras o variables. Los académicos sabrían bien que en el XVII, como lo atestigua el *Quijote*, era "algebrista" quien practicaba la recomposición de huesos dislocados, es decir, la reducción anatómica, y no tendrían inconveniente en entender el álgebra como una combinatoria de símbolos formales, técnica frecuente por otra parte en la lógica contemporánea, más próxima a los lingüistas que el álgebra tradicional. De modo que la imagen del álgebra que se aprecia en este discurso es la del álgebra abstracta moderna, con mención expresa de las relaciones de equivalencia y los isomorfismos, pero JRP mantiene las metáforas anatómicas ligadas a su significado prístino[86]. Digamos, para terminar con este asunto, que JRP ya había apuntado la percepción de esta relación entre matemáticas y lenguaje en 1932, al afirmar, en otro de sus bien conocidos discursos[87], que "las investigaciones todavía inmaturas sobre Gramática universal vienen a ser como la Axiomática de todo lenguaje o de grupos de lenguajes y como tal, mucho más cercanas de lo que pudiera creerse a las ciencias exactas y lógicas". En

84. Cuando *Fundamentos* fue premiada por la Academia de Ciencias de Madrid, el premio conmemoraba el centenario del Quijote, lo que pudo ser una premonición de su relación con el lenguaje. JRP correspondió años después incluyendo en su libro de historia con Babini una nota (p. 200), a propósito de Russell y la teoría de los conjuntos, titulada *La paradoja del Quijote*, explicando una delicada situación que tuvo que resolver Sancho siendo gobernador de Barataria.

85. Ver Rey Pastor & Babini (1951), pp. 188-9.

86. Ver el penetrante análisis de este discurso que hace G. Bueno en este volumen.

87. Rey Pastor (1932) p. 29.

esta ocasión ya menciona su relación con "el gran filólogo Vossler", que será una de las referencias importantes de su discurso académico del 54.

Nos acercamos al año de la cuarta edición de *Lecciones*, pero todavía podemos, siquiera sea brevemente, mencionar otro momento en el que JRP se declara moderno, aunque con reparos. En el discurso de contestación al de ingreso de su discípulo San Juan en la Academia de Ciencias de Madrid, pondera la ecuanimidad de su discípulo porque adopta una "posición equilibrada en el actual cisma que divide a los matemáticos en *clásicos* y *modernistas*" y afirma que él mismo introdujo en sus cursos el Bourbaki desde que hizo su aparición pero, añadiendo que "habría sido ingenuidad de pazguato el copiarlo con todas sus exageraciones y apasionamientos juveniles, que no perdurarán". Estas referencias al grupo francés se refieren a la topología, especialidad en la que JRP publicó artículos en los años treinta y cuarenta con un claro carácter axiomático, sin renunciar a la topología anterior de Fréchet, pero también con más capacidad para incorporar lo nuevo porque en el caso de la topología, rama muy reciente, no tenía una referencia tradicional que conservar. No podemos tratar ahora con detalle la topología[88], pues todavía queda álgebra que considerar.

(b) El testamento algebraico

En el apartado anterior hemos visto a JRP ante la matemática moderna, el álgebra en particular, en la primera mitad de los cincuenta, cuando, avanzando hacia los setenta años de edad, preparaba la última edición novedosa de sus *Lecciones* (Rey Pastor, 1957), que al fin puede considerarse ya un libro completamente suyo. Una nueva edición, en 1960, fue en realidad una reimpresión. Veamos tan sólo un esquema[89], porque entrar en aspectos técnicos no es el objetivo de este trabajo, de los cambios introducidos respecto a la edición anterior, ahora que la obra está dividida expresamente en tres partes cada una con un rótulo propio.

La primera parte (resolución numérica, interpolación y eliminación), que llama *Álgebra clásica en los campos real y complejo*, sólo cambia con el arreglo definitivo de la exposición del método de Gräffe que había ampliado San Juan en la edición anterior. Después de la eliminación, al final de esta primera parte, hay una interesante nota sobre *la eliminación en el álgebra abstracta*, en la que resalta la ventaja de pasar del cuerpo real al complejo para que el teorema de intersección de curvas tenga toda su generalidad, y afirma que la pequeña complicación en las operaciones queda compensada por resultados más sencillos y fecundos. Ello explica, dice, "el ímpetu con que los jóvenes geómetras se pusieron a la fácil tarea de pasar del campo com-

88. El tratamiento de la topología por parte de JRP puede verse en su último curso de 1952 (Rey Pastor, 1983), que quedó interrumpido por la purga peronista que sufrió. La cita anterior es de Rey Pastor (1956), discurso que está recogido en Rey Pastor (1988).
89. Hay más detalles en Llorente (1985).

plejo a cualquier campo...; basta, en efecto, intercalar en cada alusión a los coeficientes el ritornello "sobre el campo K" para que la teoría quede "modernizada"; pero más sencillo es estampar una sola vez la trivial observación, revalidando así el capítulo entero, ya que todo él se basa en el algoritmo racional (sin utilizar el teorema fundamental de existencia de raíces en el campo complejo), y nunca se alude a la índole de los coeficientes. Si los grandes geómetras del siglo pasado no se detuvieron a apuntar tamaña trivialidad fue porque sabían que, traspuesto el fecundo campo complejo, se entra en la estepa infinita de la arbitrariedad y el formalismo, poco seductora para las mentes pletóricas de ideas originales". Luego hace un cuadro comparativo entre el capítulo cuarto de van der Waerden —al que cita por la segunda edición de 1937-40 y llama "ya clásico tratado"— y su propio libro, para demostrar que el neófito no necesita pasar la.barrera de las estructuras que forman los tres primeros capítulos del texto del holandés. Señala, en cambio, que es muy importante el terorema de los ceros de Hilbert, pero que éste es "del álgebra más clásica" y también independiente de la "andamiada algebraica" inicial.

La segunda parte, que ahora titula *Álgebra teórica en un campo cualquiera*, tiene significativos cambios y ampliaciones (el autor dice en el prólogo que esta parte es un libro nuevo). Consta de cinco capítulos, el primero dedicado a la *Teoría elemental de la resolución algebraica*, en el que hay dos cambios a notar. Primero está la estructuración correcta de los objetivos de la resolución algebraica, que habían quedado sin corregir a pesar de la observación de San Juan en su memoria. El nuevo orden está ahora basado en nombres propios: (1) Ruffini, (2) Abel, (3) Galois, (4) Hilbert. Los dos primeros se explican por sí mismos, el tercero es la determinación de ecuaciones resolubles por radicales, que incluye la resolución cuadrática, y el cuarto la cuestión de la ecuaciones sin afecto, cuya existencia demostró el genial alemán a finales del pasado siglo. En segundo lugar hay que notar que incorpora a este capítulo, como notas y ejercicios, las cuestiones más simples de las ecuaciones cíclicas, multicíclicas y abelianas, y lo mismo hace con la división de la circunferencia, que estaba en la edición anterior en una nota final y vuelve al lugar de la segunda edición.

El segundo capítulo se titula *Aplicaciones algebraicas de los conceptos de grupo y de cuerpo*, título que es novedoso por concedre al cuerpo la misma relevancia que al grupo. El grupo sigue siendo un subgrupo del grupo simétrico y los grupos abstractos sólo aparecen en una nota final. Llama cuerpos a los campos conmutativos y la definición previa de campo parece ser abstracta pero remite a la aritmética (que "ha sido edificada en etapas sucesivas sobre el concepto de campo", que no exige la conmutatividad para poder llegar hasta los cuaternios), con lo que se descubre que los campos deben contener a los racionales, como aclara después en una nota escribiendo la propiedad de característica cero[90]. De este modo evitará la enojosa cuestión de los poli-

90. JRP afirmó en el prólogo que este método de introducir el cuerpo, está "calcado de la noción de magnitud" y que no le satisface, pero lo usará "hasta que alguien proponga otro mejor".

nomios separables en característica prima. El capítulo contiene el teorema de Ruffini y la teoría de Lagrange, pero con una variante respecto a la edición anterior; el teorema de Ruffini aparece al principio recuperando con retoques la prueba de la edición del 24, independiente del concepto de cuerpo de Galois de una ecuación. La introducción de este concepto abre el capítulo siguiente, *Introducción a la teoría de Galois*, que incluye el teorema de Abel, más sobre las ecuaciones cíclicas y la resolución cuadrática, con algunas modificaciones a la edición anterior y más abundancia de notas. Luego vienen unos *Complementos a la Teoría de Galois*, donde caben las ecuaciones normales y otros tipos de ecuaciones y grupos especiales, pero sobre todo una de las novedades notables, el que llama "método de los automorfismos", que es la correspondencia entre los grupos y los cuerpos, según la versión de Artin. JRP expone el método pero no puede evitar la apostilla siguiente, que cuela en una nota al pie: "Con dudoso acierto, eximios autores (v. d. Waerden, Artin, grupo Bourbaki, Birkhoff-Mac Lane) lo llaman *Teorema fundamental de la teoría de Galois*; pero Krull, Perron, Bieberbach, no utilizan este teorema, ni los automorfismos. Es, sin duda, un teorema importante éste, cuando se adopta ese método de exposición; pero el hecho de que estos autores por otros métodos (como nosotros por el nuestro) no necesitan tal teorema, demuestra que no es fundamental, como los son los de Galois, para la teoría creada por él; que no es la llamada así por dichos autores".

Llegamos al último capítulo, la última resignación de JRP ante la modernidad imparable: *Axiomática del algoritmo algebraico*. Como sucede con los automorfismos, que van al final como una interesante novedad que no afecta al desarrollo de la teoría según su génesis histórica, el conjunto de la obra se cierra con las estructuras algebraicas, pero puestas en su sitio, pues no son más que unas recién llegadas. JRP se explaya con los axiomas de los grupos, anillos y cuerpos, pero se nota que no es un algebrista moderno. En primer lugar hay que destacar que JRP no trabaja los homomorfismos, que juegan un papel esencial en la concepción de las estructuras algebraicas, lo que hace pensar que no había terminado de comprender el significado último del álgebra moderna. Luego hay que señalar que su notación es personal, en un momento en que ya empezaba a estar consolidada la nomenclatura, y que se recrea en la discusión de las combinaciones de axiomas y los ejemplos, sin avanzar en la teoría de las estructuras básicas más consolidadas[91]. La definición formal de campo que da ahora es más general que la que traía antes de la aritmética, pues supone que puede haber elementos no nulos por los que no se puede dividir (como en anillos de fracciones), de manera que para definir cuerpo añade la conmutatividad y que sólo el cero tenga la división prohibida. Lo hace así para abarcar ejemplos de anillos de funciones, que con los numéricos son los que le interesan siempre. Así, antes ha distinguido entre anillos aritméticos, los de números y polinomios, de los no aritméticos, los que tienen característica prima; estos últimos "merecen al menos mención, sin

91. Viene a la memoria el joven JRP que discutía con minuciosidad, en *Fundamentos*, los axiomas de la geometría de Pasch y Schur, las diferentes alternativas y su independencia.

exagerar su importancia", porque existen ejemplos "más o menos artificiales". En este punto da una idea de la incidencia de la característica de un anillo en las raíces múltiples de los polinomios, cuestión que evitó en la teoría de Galois. Este tipo de simplificaciones no se deben a que quiera controlar la extensión de la materia en un texto introductorio, sino a que el asunto le parece de interés menor, lo que una vez más le separa de los algebristas modernos.

Merece una palabras especiales el último apartado de la axiomática: *El teorema fundamental del álgebra*. Un libro como éste merecía terminar con el mismo teorema que empezó, mostrando así la clave de la posición algebraica de JRP. Al principio está el teorema de Gauss con los números complejos y la prueba basada en la continuidad, al final sus sucedáneos algebraicos, cuya ventaja epistemólogica pone en cuestión. JRP expone la demostración de Clifford, la construcción de Kronecker del cuerpo de descomposición de un polinomio, la teoría de Artin-Schreier y el teorema de Steinitz de existencia de la clausura algebraica. Este último le parece el más profundo y no lo demuestra porque "su demostración, basada en inducción transfinita y en la Matemática zermeliana... desborda el marco algebraico de este libro". Recuerda que esta matemática es discutida por muchos y sostiene que aceptarla es abandonar "la norma de la *finitud* que distingue el Álgebra del Análisis"; puestos a hacerlo así, dice, vale más aceptar en el álgebra el número irracional como único "punto trascendente" y entonces "el teorema de Gauss es algebraico" porque puede demostrarse "sin necesidad de hablar de continuidad", demostración que deja indicada en la nota que cierra el libro.

Que sus antenas no sintonizan el espíritu de las estructuras algebraicas queda también patente en esta parte final del libro, igual que antes cuando, al tratar la característica de los cuerpos, le parecían poco relevantes los ejemplos de caraterística finita. En esta otra ocasión se le ve rechazar, a pesar de que reconoce la opinión contraria nada menos que de Krull, el concepto de cuerpo real cerrado; dice que así lo hará mientras no se produzca "la aparición *natural* de algún cuerpo... fecundo en algún capítulo del álgebra o de cualquier otra Ciencia". Quizás conocer el desarrollo posterior de la geometría algebraica real le habría llevado a aceptar que no se trataba de un concepto vacío, etiqueta que colgaba con frecuencia de las estructuras algebraicas.

El planteamiento de JRP es contrario a las tendencias de su época, pero significa una toma de postura válida ante problemas cruciales de las matemáticas, más todavía si se atiende a su enseñanza, pues estamos ante un libro de texto universitario. La obra termina con una sucinta historia del álgebra, un censo cronológico de algebristas, bibliografía e índices, todo ello nuevo respecto a la edición anterior; estos elementos, junto a la mayor abundancia de notas salpicando el texto en su segunda parte, hacen que el libro tenga las características de diseño propias de su autor.

Además, el libro se abre con un prólogo nuevo[92] de cuatro páginas, fechado en San Luis, ciudad argentina del interior, en octubre de 1956. Este prólogo es un brillante e intenso resumen de lo que hemos ido contando en este trabajo y puede considerse como el testamento algebraico de JRP, en el que expresamente proclama su disconformidad con el álgebra moderna que le lleva a seguir en sus *Lecciones* un plan "deliberadamente distinto de todos los textos que ahora se publican". Podríamos decir que nuestro trabajo, que ya va terminando por fin, tiene como principal objetivo ayudar a comprender los mensajes comprimidos en este prólogo en el contexto de la matemática española e internacional.

5. COMENTARIOS FINALES

Como resumen final, recordemos que la obra algebraica de JRP se articula en torno a la confección de dos libros de texto, *Elementos de análisis algebraico* y *Lecciones de álgebra*, escritos por un catedrático de Análisis Matemático, como corresponde a los planes de estudio de la época. El contenido algebraico del primero de ellos, el más elemental, y la primera mitad del segundo concuerdan con el plan de estudios de principios de siglo y están realizados con gran destreza, mejorando sensiblemente los textos españoles anteriores y alcanzando calidad comparable a la de otras obras de países matemáticamente avanzados. Ambos comenzaron a editarse a mediados de la segunda década del siglo, pero mientras *Elementos* quedó en su versión prácticamente definitiva pocos años después, *Lecciones* tuvo un proceso muy lento pues, en lo que a la primera parte se refiere, tardó casi veinticinco años en quedar bien compuesta, aunque todavía tuviera algún retoque. Esta parte fue elaborada por su autor después de algunos trabajos de investigación que le permitieron enfocar con originalidad y eficacia los temas del álgebra más próximos al análisis.

La segunda parte de *Lecciones* es la superación de una rémora histórica pendiente desde los curso de Echegaray a finales del pasado siglo, pues los textos españoles sólo llegaban a Lagrange y Artin en la resolución algebraica de ecuaciones, sin que hubiera ninguna exposición de la teoría de Galois. Aquí JRP se muestra no como un investigador que hace un libro de su especialidad adaptado a la enseñanza, sino como un estudioso capaz y con criterio propio que vuelca en el libro lo que va seleccionando y aprendiendo. Lo hace de manera intermitente por su dedicación ocasional a estos temas, por lo que la obra adolece en las sucesivas ediciones de cierta improvisación y desfase respecto a la actualidad algebraica, incluso contando con su peculiar manera de enfocar la materia. Su lenta velocidad algebraica hizo que se le acumularan dos modernidades sucesivas, la de Weber y la de Van der Waerden. La teoría de Galois tal como estaba en la edición del 47 era básicamente weberiana y la peculiar incorporación del álgebra moderna en el 57 podría también haberse producido, si hubiera habido continuidad, un cuarto de siglo antes.

92. Está recogido en Rey Pastor (1993).

Aquí pueden aplicarse a JRP unas palabras suyas[93] de 1932: "Nelson atribuía su éxito en la vida a haber llegado siempre con un cuarto de hora de adelanto; nosotros debemos quizás nuestros fracasos científicos a llegar casi siempre con un cuarto de siglo de retraso". A estas alturas era más optimista que el año 15, cuando en el discurso de Valladolid evaluó el retraso de la matemática española en cincuenta años. Evidentemente la contribución de JRP en este campo significa un adelanto, pero a un ritmo menor que el producido en el exterior; la razón hay que buscarla en la prolífica dedicación del autor y en la escasa masa crítica nacional, que no producía otros candidatos para llevar adelante la empresa algebrica. Cada uno a su modo, desde Echegaray y García de Galdeano hasta JRP, los matemáticos más productivos padecieron de la dispersión de fuerzas que propiciaba la escasa densidad de la matemática española, producto de la situación general política y de desarrollo del país. Bien distinto es el caso de los Estados Unidos, que a principios de siglo estaban también aprendiendo en Francia, Alemania e Italia, pero por sus condiciones propias, pronto alcanzaron el máximo nivel, tanto los más veteranos que seguían líneas weberianas como los más jóvenes que adoptaron la nueva imagen del álgebra en los años treinta.

JRP fue muy crítico respecto a las traducciones, porque los libros eran ciencia muerta, falta de originalidad, alejada de la que se estaba creando en los centros avanzados, siendo preferible la labor creadora que supone la obra nueva. Pero esto era más cierto en el siglo pasado que en el actual, en el que los investigadores volcaron en los libros con menor demora sus nuevos conocimientos. Su afán por publicar textos propios se beneficiaba de la falta de competencia en el mercado hispano, que controlaba a ambos lados del Atlántico[94]. Pero finalmente el álgebra de JRP quedó desplazada por las traducciones, empezando por la del texto americano de Birkhoff & Mac Lane, cuya duodécima edición, de 1953, fue puesta en español un año después por R. Rodríguez Vidal[95]. Esta traducción (Birkhoff & Mac Lane, 1954) estaba en circulación cuando JRP publicó la cuarta edición de *Lecciones*, que ya no monopolizó más el mercado español. Poco después aparecieron los textos de Abellanas para los primeros cursos universitarios y con ellos el álgebra superior de Bôcher, traducida en álgebra lineal por la matemática moderna, irrumpió en la universidad española.

Señalemos no obstante que la crítica de JRP al álgebra moderna en los años cincuenta tiene aprovechamiento hoy día desde el punto de vista pedagógico, después de haberse experimentado la matemática moderna en todos los niveles de enseñan-

93. Ver Rey Pastor (1932), p. 47, o bien Rey Pastor (1988), p. 583.

94. Es difícil medir la influencia que en esta escasez publicista pudo tener JRP, que, con su poderosa personalidad y su no menos potente capacidad de pelea, pudo desanimar a presuntos autores temerosos de invadir su terreno, al tiempo que denostaba las traducciones.

95. También era catedrático de Análisis Matemático. Ejercía en Zaragoza, otra vez la universidad de Galdeano trayendo novedades.

za. Como dijo D'Ambrosio (1990), esa crítica "es absolutamente coherente con su visión histórico-filosófica de la Matemática y el mensaje implícito en esa visión es que los estudios de historia deben permear y ser guía en la formación del matemático". En el ya mencionado discurso dedicado a San Juan, JRP critica "esa nueva secta religiosa que se llama bourbakismo", sosteniendo en su contra que la estructura axiomática y abstracta presenta los conceptos primeros de la matemática "ininteligibles sin cadena ninguna de conocimientos anteriores", por lo que "el estudioso del Bourbaki se convierte en *iniciado*, y el estudio en religión".

Terminaremos escuchando a JRP un año antes de su muerte, de nuevo en la Academia de Ciencias madrileña, recibiendo esta vez a su discípulo S. Ríos[96]. Allí no olvida recordar que la última edición del van der Waerden, "idéntica a las anteriores, ha suprimido el calificativo de *moderne*", lo que aprovecha para decir: "Pasó ya, quizás par no volver, la hora del Álgebra que se llamó moderna, tejido de definiciones que pusieron orden entre los algoritmos aritméticos clasificándo sus estructuras, y denominándolas; tarea de ordenación y bautizo que placía a los jóvenes educados en el famoso texto de *van der Waerden*; pero la visión general de la Matemática se ha modificado ya, muy radicalmente; ahora no se trata de clasificar, ordenar y bautizar con bizarros nombres, sino de descubrir soluciones efectivas a muy diversos problemas que surgen a nuestro paso en muchas ciencias sociales, como en el Siglo de Oro del Análisis aconteció con la Física, y de calcularlas con error despreciable, superando así a la Matemática clásica confinada dentro de la muralla de sus teoremas de existencia". Esto decía, al término de sus días, mientras el espíritu de la matemática moderna se disponía a inundar la enseñanza española a todos los niveles; al mismo tiempo, en el ático donde habita la invención, la irrupción de los ordenadores anunciaba cambios en el futuro de las matemáticas; JRP estaba convencido de que ese futuro le daría la razón.

Tras la muerte de JRP recordaba San Juan (1962) que "este verano, la última vez que hablé con D. Julio, me manifestó el propósito de modificarlo para ponerlo al día, fue su expresión", refiriéndose a *Elementos*, así que todavía estaba JRP dispuesto a hacerle la competencia a Abellanas, cuyo enfoque no compartiría. En el mismo texto, decía su discípulo y colaborador que *Lecciones* "constituye un puente precioso y preciso entre el Álgebra clásica y la moderna"; poco hay que objetar a esta afirmación salvo, quizás, que su construcción tardó cuarenta años; demora que no puede explicarse sin recurrir a la historia externa del periodo y al papel que le tocó jugar a JRP en ella.

96. Ver Rey Pastor (1961, 1988).

REFERENCIAS

ALLER, R.M. (1918) *Algoritmia. Principios fundamentales de la ciencia de los números*, Coruña, Roel. (Edición facsímil 1994, Santiago de Compostela, Universidad de Santiago de Compostela)

ARAUJO, R. (1929) "Grupo de Galois de la ecuacion binómica", *Revista Matemática Hispano-Americana* (2ª Ser.) 4, 166-168.

ARENZANA, V. & RODRÍGUEZ SOL, M.L. (1985) "El álgebra moderna en *Lecciones de Álgebra* de J. Rey Pastor". En L. Español (ed.), *Actas I Simposio sobre Julio Rey Pastor*, Logroño, Instituto de Estudios Riojanos, pp. 155-161.

AUSEJO, E. (1995) "La enseñanza de las matemáticas en España a comienzos del siglo XX; un debate para su reforma". En S. Nobre (ed.) *Meeting of the International Study Groups on Relations between History and Pedagogy of Mathematics*. H.PM-Blumeneau (Brasil). UNESP, pp. 61-74.

AUSEJO, E. & HORMIGÓN, M. (1985) "Dos discursos sobre historia". En L. Español (ed.), *Actas I Simposio sobre Julio Rey Pastor*, Logroño, Instituto de Estudios Riojanos, pp. 163-174.

AUSEJO, E. & HORMIGÓN, M. eds. (1996) *Paradigms and mathematics*, Madrid, Siglo XXI.

AUSEJO, E. & MILLÁN, A. (1989) "La organización de la investigación matemática en España en el primer tercio del siglo XX: El Laboratorio y Seminario Matemático de la Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas (1915-1938)", *LLULL* 12, 261-308.

— (1993) "The Spanish Mathematical Society and its periodicals in the first third of the 20th century". En E. Ausejo & M. Hormigón (eds.) *Messengers of mathematics: european mathematical journals (1800-1946)*, Madrid, Siglo XXI, pp. 159-187.

BALTZER, R. (1879-81) *Elementos de matemáticas* (5 vols.; trad. E. Jiménez y M. Melero), Madrid, F. Góngora.

BARINAGA, J. (1932) "El concepto de resolubilidad de las ecuaciones a través del desarrollo del álgebra", *Anales de la Universidad de Madrid*, 1, 226-237.

— (1935) "Emmy Nöther", *Revista Matemática Hispano-Americana*, 10, 162-163.

BIANCHI, L. (1900) *Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni e delle equazioni algebriche secondo Galois*, Pisa.

BIRKHOFF, G. & MAC LANE, S. (1941) *A survey of modern algebra*, New York, Macmillan.

— (1954) *Álgebra moderna* (Trad. R. Rodríguez Vidal, 12ª ed. inglesa), Madrid, Vicens Vives.

BÔCHER, M. (1907) *Introduction to higher algebra*, New York, Macmillan.

CAJORI, F. (1904) *An introduction to the modern theory of equations*, New York, Macmillan.

CÁMARA, S. (1915) "Sustituciones en el cuerpo algébrico normal de Galois", *Actas del Congreso de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias, Valladolid 1915*, Madrid, Fortanet, tomo III, pp. 35-67.

CAPELLI, A. (1909) *Istituzioni di analisi algebrica* (4ª ed.), Napoli, Pellerano.

CORREA, M. (1914-15) "Reseña de Rey Pastor: Resumen de las lecciones de análisis matemático (primer curso), 1914", *Revista de la Sociedad Matemática Española* 4, 295-298.

— (1915-16) "Reseña de Rey Pastor: Resumen de las lecciones de análisis matemático (segundo curso), 1916", *Revista de la Sociedad Matemática Española 5*, 268-270.

CORRY, L. (1991) "Estructuras algebraicas y textos algebraicos del siglo XIX", *LLULL*, 14, 7-30.

— (1996) *Modern algebra and the rise of mathematical structures.* Bassel, Birkhäuser.

CUESTA, N. (1966) "Don José Barinaga Mata", *Gaceta Matemática* 3-4, 63-68.

D'AMBROSIO, U. (1990) "La didáctica de las matemáticas en la obra de Rey Pastor". En L. Español, (ed.), *Estudios sobre Julio Rey Pastor (1888-1962)*, Logroño, Instituto de Estudios Riojanos, pp. 209-215.

DICKSON, L.E. (1903) *Introduction to the theory of algebraic equations*, New York, J. Wiley.

DURREN, P. ed. (1988-9) *A century of mathematics in America* (3 vols.), Providence, AMS.

ESPAÑOL, L. ed. (1985) *Actas I Simposio sobre Julio Rey Pastor*, Logroño, Instituto de Estudios Riojanos.

— (1990) *Estudios sobre Julio Rey Pastor (1888-1962)*, Logroño, Instituto de Estudios Riojanos.

ESPAÑOL, L. (1996) "Julio Rey Pastor en la Revista de la Sociedad Matemática Española (1911-1917)", *LLULL* 19, 381-424.

— (1997) "Julio Rey Pastor y la enseñanza de las matemáticas", *Suma* 24, 27-38.

FERNÁNDEZ DE PRADO, G. (1891) *Elementos de la teoría de los determinantes y sus aplicaciones a la eliminación y a la teoría de las formas* (2ª ed., 1902), Madrid, Iravedra.

FISCHER, P.B. (1926) *Elementare Algebra*, Berlin, W. de Gruyter.

GARCÍA DE GALDEANO, Z. (1883-86) *Tratado de álgebra* (2 vols.), Toledo, Juste y Fondo.

— (1888) *Crítica y síntesis de álgebra*, Toledo, Peláez.

— (1899) "Reseña de H. Weber: Traité d'algèbre supérieure, 1898", *El Progreso Matemático* (2ª Ser.) 1, 26-28.

— (1900) "Reseña de J. Echegaray: Lecciones sobre resolución de las ecuaciones y teoría de Galois, 1898-99", *El Progreso Matemático* (2ª Ser.) 2, 220-226.

— (1904-5) *Nueva enciclopedia matemática* (6 vols.), Zaragoza, Casañal.

— (1907) *Exposición sumaria de teorías matemáticas*, Zaragoza, Casañal.

HASSE, H. (1926-27) *Höhere Algebra* (2 vols.), Berlin, W. de Gruyter.

HAUPT, O. (1929) *Einführung in die Algebra*, Leipzig.

HORMIGÓN, M. (1983-84) "Biografía científica de García de Galdeano", *El Basilisco* 16, 38-47.

— (1984) "El paradigma hilbertiano en España". En M. Hormigón (ed.) *Actas II Congreso de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias, Jaca 1982* (3 vols), Zaragoza, Gráficas Navarro, vol. 2, pp. 193-211.

— (1991) "García de Galdeano's works on Algebra", *Historia Mathematica* 18, 1-15.

JIMÉNEZ, E. (1877) *Tratado elemental de la teoría de los números*, Madrid, Aguado.

JORDAN, C. (1870) *Traité des substitutions et des équations algébriques*, Paris, Gauthier-Villars.

KIERMAN (1971) "The development of Galois theory from Lagrange to Artin", *Archive for History of Exact Scieces* 8, 40-154.

LINÉS ESCARDO, L. (1946) *Introducción al álgebra*, Barcelona.

LUSA, G. (1994) "Matemáticas en la ingeniería: el cálculo infinitesimal durante la 2ª mitad del siglo XIX". En J.M. Camarasa et al. (Coords.) *I Trobades d'Història de la Ciència i de la Tèctnica (Maó, 11-13 setembre 1991)*, Barcelona, Institut d'Estudis Catalans & Institut Menorquí d'Estudis, pp. 263-282.

LLORENTE, P. (1985) "Una presentación de la obra de Julio Rey Pastor en Álgebra". En L. Español (ed.), *Actas I Simposio sobre Julio Rey Pastor*, Logroño, Instituto de Estudios Riojanos, pp. 119-136.

MAC LANE, S. (1947) "Algunos avances recientes del álgebra", *Revista Matemática Hispano-Americana* (4ª Ser.) 6, 191-216.

MARZAL, M. (1899) *Resumen de las lecciones de análisis matemático*, Barcelona, F. Solá.

MERINO (1879) *Resolución general de las ecuaciones numéricas por el método de Gräffe*, Madrid.

MILLÁN, A. (1990) "La exposición del teorema fundamental de la recta proyectiva en la obra Fundamentos de la Geometría Proyectiva Superior de Julio Rey Pastor". En L. Español (ed.) *Estudios sobre Julio Rey Pastor (1888-1962)*, Logroño, Instituto de Estudios Riojanos, pp. 355-377.

— (1991) "Los estudios de geometría superior en España en el siglo XIX", *LLULL* 14, 117-186.

NETTO, E. (1882) *Substitutiontheorie und ihre Anwendung aud die Algebra*, Berlin.

— (1896-1899) *Vorlesungen über Algebra* (2ª ed., 2 vol.), Leipzig, Teubner.

— (1914) *Elementare Algebra* (2ª ed.), Leipzig, Teubner.

NOVY, L. (1973) *Origins of modern algebra*, Praga, Academia.

NÚÑEZ, J.M. & SERVAT, J. (1988) "La matemática y la Institución Libre de Enseñanza", *LLULL* 11, 75-96.

OCTAVIO DE TOLEDO, L. (1889) *Elementos de la teoría de las formas*, León.

— (1900) *Elementos de aritmética universal*, Madrid.

— (1905) *Tratado de álgebra*, Madrid.

— (1916) *Elementos de aritmética universal II*, Madrid.

PERRON,O. (1927) *Álgebra* (2 vols.), Berlin, W. de Gruyter.

Rey PASTOR, J. (1911) "Caracteres de las formas cuadráticas definidas", *Revista de la Academia de Ciencias de Madrid* 9, 540-553.

— (1913) "Sobre bibliografía matemática", *Revista de Libros* 1, 18-21.

— (1914) *Resumen de las lecciones de análisis matemático (primer curso), Curso 1914-15*, Madrid, Artes Gráficas Mateu.

— (1916a) *Resumen de las lecciones de análisis matemático (segundo curso), Curso 1915-16*, Madrid.

— (1916b) *Fundamentos de la geometría proyectiva superior*, Madrid, Real Academia de Ciencias.

— (1916c) *Introducción a la matemática superior*, Madrid, Corona. (Edición facsímil 1983, Logroño, Instituto de Estudios Riojanos)

— (1917) *Elementos de análisis algebraico*, Madrid.

— (1922) *Elementos de análisis algebraico*, Madrid, Spamersche Buchdruckerei (Leipzig).

— (1924) *Lecciones de álgebra*, Madrid, A. Medina (Toledo).

— (1930) *Elementos de análisis algebraico*, Madrid, A. Medina (Toledo).

— (1932) *Los Progresos de España e Hispano-América en las ciencias teóricas*, Madrid, Academia de Ciencias.

— (1935) *Lecciones de álgebra*, 2ª ed., Madrid, A. Medina (Toledo).

— (1940) *Geometría algebraica*, Buenos Aires, Universidad de Buenos Aires.

— (1945) *Elementos de análisis algebraico*, Buenos Aires.

— (1947) *Lecciones de álgebra*, 3ª ed., Madrid, C. Bermejo.

— (1950) "Discurso inaugural de la sección primera", *Las Ciencias* (Anales de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias) 15, 715-740.

— (1951a) "La matemática abstracta del siglo XX", *Las Ciencias* (Anales de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias) 16, 11-33.

— (1951b) *La matemática superior. Métodos y problemas del siglo XIX*, Buenos Aires-Madrid, Iberoamericana.

— (1954) *Álgebra del lenguaje*, Madrid, Real Academia de la Lengua.

— (1955) *Los problemas lineales de la física*, Madrid, INTAET (Edición facsímil: 1988, Madrid, CSIC).

— (1956) *Discurso de contestación al de recepción de R. San Juan*, Madrid, Real Academia de Ciencias.

— (1957) *Lecciones de álgebra*, 4ª ed., Madrid, Nuevas Gráficas.

— (1961) *Discurso de contestación al de recepción de S. Ríos*, Madrid, Real Academia de Ciencias.

— (1983) *Apuntes de topología del curso 1952* (Corregidos y anotados por E. Domínguez), Logroño, Universidad de La Rioja.

— (1988) *Selecta* (Edición preparada por la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales), Madrid, Fundación Banco Exterior.

— (1993) *Escritos de las dos orillas* (L. Español ed.), Logroño, Gobierno de La Rioja.

REY PASTOR, J. & BABINI, J. (1951) *Historia de la matemática*, Buenos Aires, Espasa-Calpe.

RODRÍGUEZ SANZ, J. (1924) "Resultante de Bezout", *Revista Matemática Hispano-Americana* 3, 50-53.

RUBINI (1882) *Tratado de álgebra* (2 vols.; trad. E. Márquez), Sevilla.

— (1885) *Teoría de las formas en general y principalmente de las binarias*. (Trad. E. Márquez), Sevilla.

SALMON, G. (1859) *Modern higher algebra*, Dublin.

SAN JUAN, R. (1945-6) "Teoría de las magnitudes físicas y sus fundamentos algebraicos", *Revista de la Academia de Ciencias de Madrid* 39, 11-552.

— (1962) "Julio Rey Pastror, su vida y su obra vistas por un discípulo", *Revista Matemática Hispano-Americana* (4ª Ser.) 22, p. 60-93.

SÁNCHEZ RON, J.M. (1990) "José Echegaray: físico y matemático". En J.M. Sánchez Ron (ed.) *José Echegaray*, Madrid, Fundación Banco Exterior.

SERRET, J.A. (1849) *Cours d'algèbre supérieure*, Paris, Gauthier-Villars (3ª ed., 2 vols., 1866)

STOLZ & GMEINER (1909) *Theoretische Arithmetik*, Leipzig, Teubner.

TERRADAS (1904) "Propiedades de las raíces de la unidad", *Revista Trimestral de Matemáticas* 4, 193-213.

VEA, F. (1995) *Las matemáticas en la enseñanza secundaria en España en el siglo XIX*, Zaragoza, Universidad de Zaragaza.

VELAMAZÁN, M.A. (1994) *Las enseñanza de las matemáticas en las Academias Militares en España en el siglo XIX*, Zaragoza, Universidad de Zaragaza.

VILLAFAÑE, J.M. (1891) *Elementos de las teorías coordinatoria y de las determinantes con sus principales aplicaciones*, Barcelona.

— (1898) *Tratado de análisis matemático* (Álgebra superior), Madrid.

WAERDEN, B.L. van der (1930) *Moderne Algebra* (2 vols.), Berlin, Springer.

WEBER, H. (1895) *Lehrbuch der Algebra*, vol. 1, Braunschweig.