Investigaciones Europeas de Dirección y Economía de la Empresa
Vol. 2, Nº1, 1996, pp. 59-83

LA VOLATILIDAD: MODELIZACIÓN EN LA VALORACIÓN DE OPCIONES Y ESTIMADORES

Lorenzo Alegría, R. Mª.
Universidad de La Laguna

RESUMEN:

Una extensa literatura financiera encuentra a través de contrastes empíricos, que la volatilidad de la tasa de cambio en los precios de activos financieros (por ejemplo, acciones) en modo alguno es constante, como se asume en el modelo de Black-Scholes (1973), sino variable. Diferentes explicaciones se han dado para este comportamiento cambiante, lo que ha generado una variedad bastante amplia de modelizaciones, que van desde aquellos primeros trabajos [Cox y Ross (1976), Geske (1979a)] que planteaban que la volatilidad se modificaba, pero bajo un comportamiento determinista, hasta los más recientes que suponen que es estocástica, totalmente aleatoria [Hull y White (1987), Amin y NG (1993)]. A su vez, y bajo una dinámica estocástica, numerosos trabajos han planteado procesos alternativos para la volatilidad, como por ejemplo, procesos de difusión con saltos, procesos de caos y los más recientes modelos del árbol binomial implícito, denominados como los «modelos de valoración de opciones de la nueva generación». La importancia del supuesto que se plantee para la volatilidad se pone de manifiesto especialmente cuando se diseñan modelos para valorar instrumentos financieros, como las opciones: la asunción de diferentes supuestos para la volatilidad implica utilizar diferentes modelos para valorar y predecir el precio de estos activos derivados.

Una vez enumeradas las diferentes razones que se han apuntado para explicar ese comportamiento variable de la volatilidad, en este trabajo se hace una revisión extensa, tanto teórica como empírica, de las diferentes modelizaciones planteadas para la volatilidad, y en consecuencia de los diferentes modelos de valoración de opciones. Finalmente, se exponen y desarrollan diferentes estimadores propuestos para la predicción de la volatilidad futura, como por ejemplo, volatilidad implícita, modelos tipo ARCH y modelos de redes neuronales.

PALABRAS CLAVE: Volatilidad estocástica. Volatilidad Implícita. Modelos ARCH. Proceso de difusión con saltos.

INTRODUCCIÓN (1),(2)

La varianza de la tasa de rentabilidad de las acciones, como medida de la volatilidad, es una de las variables cruciales en la teoría moderna de las finanzas. Como dos ejemplos, la varianza es una variable central en el modelo de valoración de activos de capital y análisis de cartera (CAPM) de Sharpe (1964), Lintner (1965) y Mossin (1966) y, de igual manera, juega un papel clave en el modelo de valoración de activos derivados de Black y Scholes (1973)[en adelante B-S].

Mientras que algunos trabajos suponían, fundamentalmente por sencillez, un comportamiento constante en la volatilidad (Black-Scholes [1973]), otros, por el contrario, basaban su análisis en su variabilidad, que llegaba a ser, incluso, estocástica (Wiggins [1987], Hull y White [1987] y otros). Este supuesto se adoptaba toda vez que una abundante literatura empírica observaba un comportamiento heteroscedástico para la varianza de la rentabilidad de un activo, como por ejemplo, en Clark (1973), Blattberg y Gonedes (1974), Black (1976), Epps y Epps (1976) y Kon (1984).

Referido exclusivamente a acciones, se han barajado posibles razones que explican este comportamiento cambiante de la volatilidad en su rentabilidad, entre las que destacamos las siguientes:

1.- La llegada de nueva información, Press (1967), Beaver (1968), Merton (1976) y Macbeth y Merville (1980), basados éstos últimos en la teoría multiperíodo consumo- inversión(3).

2.- Cambios en el precio de la acción, Cox (1975), Black (1976), Cox y Ross (1976), Schmalensee y Trippi (1978), Geske (1979a), Beckers (1980), MacBeth y Merville (1980) y Christie (1982)(4).

3.- Por innovaciones tecnológicas y/o fusiones y adquisiciones, que pueden afectar a la distribución de las rentabilidades de las acciones de una empresa, y por tanto, a su varianza, Macbeth y Merville (1980).

4.- Modificaciones en el nivel de apalancamiento financiero (relación deuda/ valor de mercado de los fondos propios), ya que la volatilidad es una función creciente del apalancamiento financiero, Christie (1982).

5.- Variaciones del tipo de interés sin riesgo, ya que tienen un fuerte efecto positivo sobre la volatilidad, lo cual es consistente con el hecho de que el valor de la empresa es una función inversa del tipo de interés, Christie (1982).

6.- Nivel de negociación del activo: la volatilidad viene causada por la negociación en sí, de manera que el nivel de volatilidad es mayor cuando el mercado está negociando que cuando está cerrado, Fama (1965), French y Roll (1980), French (1984).

La consideración de la volatilidad como estocástica presenta problemas en la valoración de activos financieros derivados, como las opciones. La utilización de la metodología clásica de B-S de cara a lograr la cobertura total de una cartera y obtener así el valor de un activo financiero, eliminando las posibilidades de arbitraje, no es válida cuando la volatilidad del subyacente no es constante. La razón es que, en este caso, no pueden utilizarse solamente argumentos de cobertura y arbitraje para obtener el valor del activo derivado. En otras palabras, no puede formarse una cartera cubierta sin riesgo sólo con la opción y la acción y mediante el arbitraje. Será necesario introducir argumentos de equilibrio de los precios de los activos, basados en las preferencias de los inversores por el riesgo, para determinar la prima de riesgo (exceso esperado de rentabilidad) requerida sobre una cartera cubierta del activo y la opción.

La razón implícita de incluir supuestos sobre las preferencias por el riesgo de los inversores es que la volatilidad en sí misma, o un activo cuyo precio esté instantánea y perfectamente correlacionado con la volatilidad, no es un activo negociado (como puede ser el activo subyacente). Si fuera un activo negociado, todas las consideraciones de equilibrio general intertemporal asociadas con el precio del riesgo de volatilidad estarían reflejadas en su precio, y las opciones se podrían valorar con una cartera formada por la opción, el activo subyacente y ese activo correlacionado con la volatilidad. No obstante, cuando se dan determinados supuestos, que ya analizaremos más adelante, sí que pueden obtenerse soluciones para la valoración de una opción cuando la volatilidad es estocástica, sólo con argumentos de arbitraje y sin necesidad de introducir supuestos sobre las preferencias por el riesgo de los inversores.

DIFERENTES MODELIZACIONES PARA LA VOLATILIDAD

Como paso preliminar, se hace necesario enmarcar estos modelos de comportamiento de la volatilidad en la problemática sobre los diferentes procesos estocásticos que se han planteado a lo largo de la historia para describir la rentabilidad de un título [Figura 1].

Los primeros procesos planteados por Bachellier (1900), al que le siguieron Sprenkle (1964) y Boness (1964), no capturaban adecuadamente la trayectoria seguida por la rentabilidad de un activo, y a partir de ahí, el proceso estocástico que mayor aceptación y tratamiento teórico y empírico recibió fue el proceso de difusión lognormal(5), que constituye, a su vez, el supuesto básico del modelo de B-S. Bajo este proceso, la rentabilidad del activo subyacente tiene una trayectoria constante, con pequeñas modificaciones en intervalos de tiempo relativamente cortos, que se modelizan por un proceso de Wiener(6). Como un proceso alternativo al clásico lognormal que suponen B-S, se encuentra el proceso de difusión con saltos, proceso que combina elementos del proceso denominado «puro» de saltos, en el que todas las variaciones de la rentabilidad del título se consideran saltos, y, por otro lado, del ya mencionado proceso de difusión lognormal(7).

Los diferentes modelos de valoración de opciones que recogen un comportamiento variable para la volatilidad son:
- Modelo de elasticidad de sustitución constante (CEV).
- Modelo de opción compuesta.
- Modelo de difusión desplazada.
- Modelos de volatilidad estocástica.
- Aproximación por volatilidades implícitas.
- Modelos con procesos de difusión con saltos para la volatilidad.
- Modelos de opciones tipo ARCH.
- Procesos de caos para la volatilidad.
- Modelos del árbol binomial implícito.

Modelo de difusión de varianza de elasticidad constante

Esta alternativa fue planteada por Cox (1975) y desarrollada más tarde por Cox y Ross (1976). La propuesta que se hace con este modelo para la dinámica del precio del activo, así como para su volatilidad es que los precios del activo en un período no son independientes de los precios en períodos anteriores, por lo que no son, en ningún modo, caminos aleatorios, como se suponía en el proceso de difusión lognormal de B-S. La volatilidad, a su vez, depende del precio del activo, donde destaca un caso especial en el que la relación entre la volatilidad y el precio del activo es tal que su elasticidad es constante, denominándose *modelo de varianza de elasticidad constante* [en adelante CEV](8).

En los trabajos de Macbeth y Merville (1980), Beckers (1980), Emanuel y Macbeth (1982) y Lauterbach y Schultz (1990) encontramos aplicaciones empíricas del modelo de varianza de elasticidad constante. El principal inconveniente de utilizar esta modelización alternativa se encuentra en tener que llevar a cabo la estimación de varios parámetros.

Modelo de difusión de opción compuesta

Fue planteado inicialmente por Geske (1979a). Para la obtención de la fórmula de una opción call, Geske considera que una acción es una opción sobre el valor de la empresa, donde el valor de la empresa sigue un camino aleatorio estacionario. Para Geske, la fórmula de Black-Scholes da la relación entre el valor de una acción y el valor de una empresa, donde la acción sería la opción y el valor de la empresa sería el subyacente. Siguiendo los supuestos de Black-Scholes, la volatilidad del valor de la empresa deberá ser constante, sin embargo la acción sigue un camino aleatorio no estacionario con una volatilidad que se incrementa cuando el precio de la acción decrece, efecto empírico ya explicado en el modelo CEV anterior. Desde esta perspectiva, una opción call sobre una acción es una opción sobre una opción, lo que se ha denominado como una *opción compuesta*. Por último, un aspecto que habrá de tenerse en cuenta, desde esta perspectiva, es la influencia de la estructura de capital de la empresa sobre la distribución de la rentabilidad de la acción, por lo que habrán de incorporarse los efectos de apalancamiento derivados de la existencia de deuda en la empresa.

Modelo de difusión desplazada

Propuesto por Rubinstein (1983), este modelo parte del supuesto de una empresa que mantiene dos activos, uno con riesgo y otro sin riesgo, en una proporción determinada respecto al valor total de la empresa, V. En cualquier instante de tiempo anterior al pago de dividendos, k, donde $k<t$ se producirá el pago de dividendos correspondiente a la porción sin riesgo del valor de la acción, como porcentaje del valor de la acción, dS, y, de igual manera, se pagará un dividendo determinado debido a la parte con riesgo del valor de la acción.

De esta observación, Rubinstein obtiene el valor de la acción al final del tiempo t, dividido en dos componentes, un componente de riesgo, $ae^{y}S$, y un componente sin riesgo, bS, donde y es una variable aleatoria normal, con una volatilidad instantánea, $\sigma_R\sqrt{t}$ (9). Rubinstein, finalmente obtiene la expresión para el valor de una opción con argumentos de arbitraje sin riesgo con el razonamiento de Cox y Ross (1976), según el cual se puede obtener el valor de una opción call europea descontando el valor esperado futuro, bajo neutralidad al riesgo, expresión que es similar a la de Black-Scholes, $C(S,K,t,r,\sigma)$, excepto que la opción call es evaluada en $C(aS,K-bS,t,r,\sigma_R)$.

Como en los modelos anteriores, este modelo incluye como caso especial el modelo de Black-Scholes, tiene en cuenta la estructura de capital de la empresa, al igual que el modelo de opción compuesta de Geske (1979a). La diferencia con éste, es que en en este modelo, la volatilidad del valor de la empresa no es constante, sino estocástica. Una ventaja de este modelo de difusión desplazada es que admite diferentes políticas de dividendos más realistas, como puede ser el pago de un dividendo constante, no dependiente del precio de la acción. No obstante, su contrastación presenta problemas adicionales, como puede ser la estimación de más parámetros(10).

Modelos de volatilidad estocástica

Tanto el modelo de Cox (1975) como el de Geske (1979a) y Rubinstein (1983) analizados anteriormente, obtienen el valor de un activo derivado a partir del supuesto de que la varianza de la rentabilidad del activo subyacente es variable y además, dependiente del precio del activo. La diferencia con los modelos más generales de volatilidad estocástica es que estos últimos incorporan comportamientos totalmente aleatorios, estocásticos para la volatilidad. Dentro de esta clase hemos incluído los trabajos de Wiggins (1987), Scott (1987), Johnson y Shanno (1987) y Hull y White (1987), considerado este último como el más importante y pionero en la obtención de una solución al problema de valoración de opciones con volatilidades estocásticas(11), por lo que nos detendremos en su análisis.

El modelo de Hull y White (1987) considera los siguientes procesos estocásticos para el precio del activo, (S) y su varianza ($\sigma^2 = V$):

$$dS = \phi S\, dt + \sigma\, S dw$$
$$dV = \mu V\, dt + \xi\, V dz$$

donde ϕ es un parámetro que puede depender de S, σ y t. Las variables μ y ξ pueden depender de σ y t, pero se supone que no dependen de S. Los procesos dw y dz son procesos Wiener, con coeficiente de correlación ρ. En contraste a los modelos de Cox (1975), Geske (1979a) y Rubinstein (1983), en esta expresión se recoge la posibilidad de que la volatilidad no esté perfectamente correlacionada con el precio del activo. Según los valores de ρ, este modelo puede ser reducido a cualquiera de aquellos otros modelos(12) y también permitiendo que ξ sea una función no estocástica del precio del activo. También se recoge el caso especial de que haya una dependencia intertemporal en la volatilidad, como puede ser la tendencia a revertir en media, que analiza Scott (1987), y que se da cuando ξ y μ dependen de σ y t.

Haciendo uso de la ecuación diferencial de Garman (1976)(13), con la condición de que la volatilidad no esté correlacionada con el consumo agregado(14) y con el supuesto adicional de que la volatilidad no esté correlacionada con el precio del activo subyacente(15) (de manera que no hay apalancamiento y que la volatilidad del valor de la empresa es constante(16)), Hull y White obtienen el valor de una opción simplemente descontando su valor terminal esperado a la tasa de interés sin riesgo. La solución final que proponen expresa que el precio de la opción es la media del precio B-S, evaluada sobre la distribución condicional de la varianza media, $\overline{V}$ (17). Además, presenta la característica de que, igual que la de B-S, es neutral al riesgo, por lo que el uso de esta solución es válida para cualquier función de utilidad respecto al riesgo que se consideren para los inversores.

Utilizando datos simulados para los valores de la distribución normal, los resultados que obtuvieron Hull y White (1987) de la contrastación de esta solución fueron favorables, en tanto que se redujo el sesgo típico que comete la fórmula B-S. La principal desventaja de estos modelos de volatilidad estocástica, es que son difíciles de estimar por máxima verosimilitud. Concretamente y como mencionan Melino y Turnbull (1990), es bastante complicado determinar de forma analítica la función de densidad de $\overline{V}$, no es posible obtener una solución analítica o de forma cerrada para el valor de la opción y se han de utilizar técnicas numéricas, como por ejemplo la técnica de simulación de Monte Carlo [Hull y White, (1987), Johnson y Shanno, (1987) y Scott (1987)] o diferencias finitas [Wiggins, (1987)].

Otros trabajos que también suponen un comportamiento estocástico para la volatilidad son el de Eisenberg y Jarrow (1991) y de Stein y Stein (1991), que al igual que los anteriores, suponen que no hay correlación entre el activo y su volatilidad. Sin embargo, el principal problema que se plantea con los modelos que suponen que la volatilidad no está correlacionada con el precio del activo, es que no se recogen importantes efectos asimétricos que se han detectado entre ambas variables cuando están correlacionadas. Esta posibilidad aparece recogida en el modelo que propone Heston (1993), quien mediante simulación, muestra que, además de recoger esos efectos asimétricos, la existencia de correlación entre la volatilidad y el activo explica los sesgos de precio de ejercicio que produce el modelo B-S. La importancia del trabajo de Heston (1993) radica en que obtiene una solución analítica, en forma cerrada, para el valor de una opción sobre activos con volatilidad estocástica, igualmente válido para opciones sobre bonos, acciones, e incluso divisas.

Aproximaciones más recientes centran la discusión en torno a supuestos adicionales hasta entonces no tenidos en cuenta, como es, considerar dentro del comportamiento estocástico para la volatilidad, un componente sistemático y uno idiosincrático. Dentro de esta aproximación destaca el trabajo de Amin y NG (1993), que obtiene soluciones analíticas al problema de la valoración de opciones sobre acciones cuando la volatilidad de la rentabilidad de la acción subyacente es estocástica y presenta un componente sistemático, que está relacionado con la volatilidad también estocástica del crecimiento del consumo (cartera de mercado), y un componente «idiosincrático» o no sistemático. Esta nueva aproximación se encuentra avalada por una gran cantidad de trabajos que explican la evidencia empírica de que la volatilidad de la rentabilidad de las acciones no sólo es estocástica, sino que además está altamente correlacionada con la volatilidad del mercado [Wiggins (1987)].

La consideración de la volatilidad del crecimiento del consumo (o cartera de mercado) como estocástica significa que el tipo de interés spot, que está determinado por la volatilidad del consumo en equilibrio, sea en general también estocástico. De esta manera, este modelo incorpora de forma simultánea un tipo de interés estocástico y procesos estocásticos para la volatilidad de la rentabilidad de las acciones en la valoración de opciones, lo cual constituye, una novedad. La fórmula que obtienen Amin y NG (1993) es más general, pues recoge otras fórmulas propuestas en la literatura sobre valoración de opciones, como, por ejemplo, el modelo de Black-Scholes (1973), el modelo de Merton (1973), de Milne y Turnbull (1991) y de Amin y Jarrow (1992) que analizan la valoración de opciones con tipos de interés estocásticos y con volatilidad de la acción constante, el modelo de Hull y White (1987) que analiza la valoración de opciones con volatilidades estocásticas, pero con tipos de interés constantes y el modelo de Bailey y Stulz (1989), que analiza la valoración de opciones sobre índices cuando el activo subyacente es la cartera de mercado y su varianza es estocástica.

Aproximación Black-Scholes usando volatilidades implícitas

En un mercado eficiente, los precios de las opciones contienen información sobre el proceso estocástico que presenta la serie de rentabilidades del activo subyacente, proceso que es difícil y hasta imposible a veces de obtener con los datos de precios del activo. Por otro lado, las volatilidades implícitas -calculadas de un modo sencillo con la fórmula de Black-Scholes- de una serie de opciones de similares características recogen la «percepción del mercado» de la distribución de rentabilidades del activo subyacente.

Una aproximación diferente para valorar opciones con volatilidades estocásticas consiste en utilizar volatilidades implícitas en la fórmula de B-S. Este método es el que proponen Jarrow y Wiggins (1989), como alternativo a otros modelos, como por ejemplo el modelo de difusión de varianza de elasticidad constante (CEV) y los modelos de volatilidad estocástica [Hull y White (1987), Wiggins (1987), Scott (1987) y Johnson y Shanno (1987)], que proponen procesos alternativos para el subyacente, procesos estimados de datos de precios históricos, que incluyen muchos parámetros y, por tanto, son más difíciles y caros de estimar. Incluso a sabiendas de que se están violando los supuestos de B-S, en el que la volatilidad se supone constante, Jarrow y Wiggins consideran que por razones de simplicidad en el cálculo, el modelo B-S usando volatilidades implícitas, parece preferible a las fórmulas alternativas más complejas de valoración de opciones para volatilidades estocásticas que ya hemos comentado.

Modelos de difusión con saltos para la volatilidad

Aproximaciones alternativas no recogidas en los modelos anteriores para reflejar un comportamiento estocástico en la volatilidad se encuentra en los procesos de difusión y saltos, planteados tradicionalmente para la rentabilidad de un activo. Bajo este proceso, el comportamiento de la volatilidad se representa por un proceso de difusión en tiempo continuo, intercalándose en instantes discretos variaciones importantes en la volatilidad, que se denominan saltos, que a su vez, pueden considerarse sistemáticos o no sistemáticos. Este comportamiento es el que se supone en los trabajos de Amin y NG (1993) y Naik (1993).

Por ejemplo, Naik (1993) supone que hay dos estados posibles para el proceso de la volatilidad, de manera que uno de ellos se podría interpretar como el nivel de volatilidad normal y el otro como el nivel de volatilidad que se alcanza con la llegada de importantes y nuevas noticias. El proceso supuesto para el precio del stock en Naik (1993) tiene en cuenta la tendencia observada a nivel empírico de que los cambios en el precio del stock y los cambios en la volatilidad se producen conjuntamente, es decir, hay correlación entre ambas variables.

En un primer caso, cuando el riesgo de saltos en la volatilidad es diversificable, no sistemático, Naik (1993) obtiene que el valor de una opción call viene a ser un valor esperado de la fórmula de B-S, donde la esperanza matemática se obtiene integrando a lo largo de la varianza futura media del precio del activo subyacente(18). Naik (1993) también analiza el supuesto de que el componente de salto sea sistemático, posibilidad que resulta interesante para los inversores que replican el conjunto de pagos de la cartera de mercado, ya que los cambios de la volatilidad representarán cambios en el riesgo de la economía en su conjunto y llevará a saltos simultáneos en el nivel de output, consumo agregado y, por tanto, en el nivel de precios.

Para Amin y NG (1993), y a diferencia de Merton (1976) que considera sólo los saltos no sistemáticos, sólo serán importantes para determinar el valor de las opciones aquellos saltos que afecten simultáneamente al consumo agregado y al precio del activo, es decir, saltos sistemáticos, no diversificables, ya que como muestran Ball y Torous (1985) la presencia de saltos idiosincráticos, no sistemáticos no parece modificar sustancialmente el valor de las opciones respecto al valor B-S. Podrían darse saltos en el consumo agregado que no afecten al precio de la acción, sin embargo, no afectarán directamente al valor de la opción, sino de forma indirecta a través de la variable tipo de interés, determinada endógenamente. Por esta razón, Amin y NG. (1993) suponen que cualquier salto que ocurra en el precio de la acción, cuando el proceso del consumo no ha experimentado saltos, se considerará idiosincrático, no sistemático.

Amin y NG. (1993) introducen el proceso de difusión con saltos para la rentabilidad de la acción de Merton (1976) e igualmente el proceso de difusión con saltos para la rentabilidad del consumo que plantearon Naik y Lee (1990), obteniendo un proceso bivariante de difusión con saltos. La fórmula que derivan puede ser usada para valorar opciones sobre la cartera de mercado, una vez que la cartera de mercado está perfectamente correlacionada con el consumo agregado, caso especial analizado por Naik y Lee (1990). Cuando los saltos en las rentabilidades de la acción son idiosincráticos, no hay saltos en la rentabilidad del consumo y la fórmula general de difusión con saltos anterior coincide con la fórmula de Merton (1976), que sólo considera el riesgo de saltos idiosincráticos o no sistemáticos.

Modelos de opciones GARCH

Duan (1991) y Engle y Mustafa (1992) proponen este modelo de valoración de opciones, denominado OGARCH, en el que se utiliza una especificación GARCH para el activo subyacente y que recoge ese comportamiento heteroscedástico y leptocúrtico detectado en las series empíricas de rentabilidades de un título. Además, Duan (1991) demuestra que este modelo OGARCH de desarrolla bajo la premisa de neutralidad al riesgo, es decir, válido para cualquier tipo de preferencias por el riesgo que tengan los inversores.

Bajo el supuesto de que la tasa de rentabilidad de un activo, de precio S, está distribuída de forma lognormal, condicionada a la información disponible, ϕ_{t-1}, es decir,

$$\ln\frac{S_t}{S_{t-1}} = \mu_t + \varepsilon_t \qquad\qquad \varepsilon_t \,|\, \phi_{t-1} \sim N\ (0,h_t)$$

y donde los errores ε_t siguen un proceso GARCH [como en Bollerslev (1986)],

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i h_{t-i}$$

Duan (1991) demuestra, bajo el principio de valoración neutral al riesgo, que la media condicional μ_t está negativamente correlacionada con la varianza condicional, es decir, $\mu_t = r_c - 0.5h^2_t$, tal que $r_c \equiv \ln(1+r)$, donde r es el tipo de interés sin riesgo, que se asume constante a lo largo del período de vida de la opción. De ese modo, aceptando el principio de de neutralidad al riesgo, el valor de una opción de compra será igual al valor actual del valor de expiración esperado de la opción, descontando al tipo de interés sin riesgo. Entonces, bajo la especificación GARCH (p,q), una opción de compra europea con precio de ejercicio K y fecha de vencimiento T, tendrá el siguiente valor en el momento t:

$$C_t^{GH} = e^{-(T-t)r_c} E\left[\max(S_T - K, 0) \middle| \phi_t\right]$$

donde S_t es el precio del activo subyacente en la fecha de expiración de la opción, que puede escribirse como

$$S_t = S_t \exp\left[(T-t)r_c - 0{,}5 \sum_{s=t+1}^{T} h_s + \sum_{s=t+1}^{T} \varepsilon_s\right]$$

Con datos simulados, Duan (1991) muestra que el modelo OGARCH es capaz de explicar algunos sesgos sistemáticos que produce el modelo clásico B-S. Un trabajo empírico que compara el modelo OGARCH y el B-S se presenta en Ho y Poon (1992).

Procesos de caos determinísticos

Estos procesos constituyen una alternativa para explicar las fluctuaciones económicas o de alguna variable en cuestión, como puede ser la volatilidad de la serie de rendimientos de un activo. Como define Brock (1986), el proceso de caos determinístico surge de un proceso dinámico no lineal, que es determinístico respecto a las condiciones iniciales, pero donde los errores producidos de la estimación de los parámetros y condiciones iniciales pueden acumularse dentro de los errores de predicción y parecer que el proceso es aleatorio. Los procesos determinísticos que parecen estocásticos son denominados *procesos de caos determinísticos*.

Un proceso de caos determinístico, además de recoger la leptocurtosis, también tiene en cuenta la dependencia (lineal o no lineal) y, por tanto, la correlación detectada empíricamente en la serie de rendimientos de un activo. Por esta razón, Savit (1989) considera a nivel teórico un proceso de caos para los movimientos del activo y estudia los efectos de este supuesto para el valor de una opción, y concluye que aunque las funciones de autocorrelación para este proceso y el clásico lognormal de B-S son las mismas, la consideración de un proceso de caos supone una reconsideración de las técnicas de cobertura y arbitraje de cara a obtener un resultado que sea neutral al riesgo. Un trabajo empírico en relación a este proceso se encuentra en B. W. Brorsen y S-R Yang (1993), quienes comparan el proceso GARCH(1,1) y el de caos determinístico para una muestra de cambios diarios de precios de futuros de mercancías.

Modelos de árbol binomial implícito

Catalogados como los «modelos de valoración de opciones de la nueva generación», el principal exponente se encuentra en el trabajo de Rubinstein (1994). Estos modelos surgen a raíz del resultado empírico bastante concensuado de que las volatilidades implícitas de las opciones obtenidas del modelo de Black-Scholes (1973) difieren de forma sistemática para diferentes precios de ejercicio (generando un patrón de comportamiento denominado cómunmente como «sonrisa de volatilidad») y diferente tiempo hasta el vencimiento (cuyo patrón se denomina «estructura temporal de volatilidades implícitas»). El estudio más riguroso y completo que observa empíricamente estos comportamientos es el de Rubinstein (1985)(19).

Dado que el modelo de Black-Scholes y otros similares no recogen este resultado empírico, surgen dos aproximaciones alternativas: la primera consiste en el uso de modelos de volatilidad estocástica, ya comentados, en los que se asume un proceso estocástico determinado para el activo, y del que puede derivarse cualquier tipo de sonrisa o estructura temporal de volatilidades implícitas; la segunda aproximación consiste en el uso de la información contenida en los precios de las opciones para estimar la función de densidad neutral al riesgo del precio terminal del activo, conocido el tipo de interés sin riesgo y los precios del activo subyacente y de sus opciones asociadas de tipo europeo con diferentes precios de ejercicio.

Esta segunda aproximación se basa en un resultado general de la moderna teoría de valoración de opciones que plantea que, bajo ciertas condiciones, un activo contingente que depende del precio terminal de un activo (y que no puede ser ejercitado hasta el vencimiento) puede valorarse como un conjunto de estados de ese activo contingente, multiplicando el pago en cada estado por el correspondiente precio «Arrow-Debreu»(20) de ese estado, y sumando para todos los estados. Así, por ejemplo, para N estados, el precio en el momento t de un activo derivado que vence en el momento T se calcularía como :

$$C(t) = \sum_{s=1}^{N} V(s)p(s)$$

donde V(s) recoge el pago en el momento T y p(s) el precio descontado Arrow-Debreu en el estado s.

Rubinstein (1994) lleva a cabo la estimación de la función de densidad neutral al riesgo consistente con los precios observados de las opciones, de manera que la varianza de esta «distribución implícita de mercado» podría definirse como una medida de la volatilidad futura hasta el vencimiento de la opción. Esta distribución implícita neutral al riesgo contiene, potencialmente, información más rica sobre las expectativas del mercado acerca de los movimientos futuros del subyacente. Un trabajo empírico que utiliza este método de Rubinstein (1994) es el de Kuwahara y Marsh (1994).

ESTIMADORES DE LA VOLATILIDAD

Una de las razones que han apuntado French y Martin (1988) a los diferentes, y en muchos casos, contradictorios resultados a la hora de contrastar las fórmulas de valoración de opciones es la utilización de diferentes métodos para estimar la volatilidad. Los diferentes estimadores de la volatilidad son simplemente un reflejo de la variabilidad que se espera (futura) en el movimiento de los precios. El problema se produce cuando hay elevada inestabilidad temporal en la volatilidad(21), en cuyo caso su estimación en base a la información pasada no es muy correcta.

Se han presentado diferentes técnicas de estimación de este parámetro, que podemos agrupar en tres bloques: en un primer bloque recogemos aquellas técnicas de estimación que utilizan datos de precios históricos del activo (volatilidad histórica), donde también incluimos los modelos heteroscedásticos condicionales autorregresivos (ARCH); un segundo bloque, en el que los datos del precio de las opciones permiten «extraer» de un modelo de valoración el valor de la volatilidad (volatilidad implícita); y finalmente, un tercer bloque que recoge a los modelos neuronales, en los que la serie histórica de volatilidades implícitas se utiliza para construir modelos multivariantes, que permitan predecir volatilidades implícitas, como aproximaciones a las volatilidades futuras o realizadas.

Entre los estimadores que utilizan datos de precios históricos del activo se pueden destacar los siguientes:

Volatilidad histórica o muestral

Se define como la desviación estándard de la distribución del logaritmo de precios relativos del activo subyacente (tasa de rentabilidad del activo), con una muestra de precios observados correspondiente a un período anterior concreto. Esta desviación estándard se calcula por las técnicas estadísticas ya conocidas:

$$\sigma = \sqrt{(1/n) \sum_{k=1}^{n} (\ln R_k - \mu)^2}$$

donde R_k son los precios relativos del activo subyacente en el momento k (S_k / S_{k-1}) y μ es la media de la distribución, cuyo valor es:

$$\mu = (1/n) \sum_{k=1}^{n} \ln R_k$$

Este podría ser el mejor estimador si las series de rentabilidades del activo fueran «estricto ruido blanco"(22) y además sería un estimador insesgado para períodos de tiempo relativamente largos. Este estimador fue propuesto, en un principio, por B-S (1972) para su modelo. Fue utilizado también por Galai (1977) y Finnerty (1978). No obstante, B-S comprobaron que con esta medida de la volatilidad, su modelo tendía a sobrevalorar opciones con volatilidades altas e infravalorar aquellas con volatilidades bajas.

Volatilidad histórica o muestral corregida

Para garantizar que las estimaciones de la media y la desviación estándard tienen las propiedades deseadas de parámetros insesgados, Cox y Rubinstein (1985), proponen este estimador, también utilizado por Rogalski (1978), Analistas Financieros Internacionales (1992) y Chamorro (1993). Este estimador sólo añade a la volatilidad histórica unos factores de correción para la varianza y para la desviación estándard. Estos estimadores insesgados para la varianza y la desviación estándard son

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (\ln R_k - \mu)^2 \qquad \sigma = \left[\frac{(\frac{1}{2}n)^{1/2}(\frac{1}{2}n - \frac{3}{2})!}{(\frac{1}{2}n - 1)!}\right]\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\ln R_k - \mu)^2\right]^{1/2}$$

donde x! es la función gamma, definida como $\int_0^{\infty} e^{-\upsilon} \upsilon^x d\upsilon$.

Volatilidad histórica con precios altos y bajos

El cálculo de la volatilidad histórica con los precios de cierre de los activos, aunque muy sencillo, no permite incorporar toda la información disponible y relevante del comportamiento observado de la volatilidad, por lo que reduce su nivel de eficiencia. A lo largo de un día de negociación, el precio de un activo parte de un valor concreto, precio de apertura, experimenta diferentes cambios, que oscilan entre un valor máximo y un valor mínimo, para terminar en el último precio del día, o «precio de cierre».

Parkinson (1980), Garman y Klass (1980), Beckers (1983) y Kunitomo (1992) estiman la volatilidad histórica usando los precios intradía, pues estos precios contienen más información referente a la volatilidad que simplemente los precios de apertura y cierre del día. La hipótesis subyacente es que el uso de un conjunto de información más amplio producirá un estimador más eficiente. Por ejemplo, para Parkinson (1980), el estimador usado para la volatilidad diaria es el siguiente:

$$\sigma^2 = \frac{0{,}361}{n} \sum_{i=1}^{n} (H_i - L_i)^2$$

donde H_i y L_i son los precios máximos y mínimos correspondientes a cada día de negociación, n. Este estimador, según demuestran Garman y Klass (1980) es cinco veces más eficiente que el clásico que utiliza sólo los precios de cierre. De otro modo, produce estimaciones equivalentes a la utilización de precios de cierre con una muestra cinco veces mayor. Garman y Klass (1980) mejoran el estimador de Parkinson añadiendo los precios de cierre de cada día, proponiendo entonces el siguiente:

$$\sigma^2 = 0.511\,(H_t - L_t)^2 - 0.019[(C_t - C_{t-1})(H_t + L_t - 2C_t) - 2(H_t - C_t)(L_t - C_t)] - 0.383\,(C_t - C_{t-1})^2$$

que incluye los valores de C, que representa los precios de cierre de cada día. Garman y Klass (1980)(23) demuestran que este estimador es casi ocho veces más eficiente que el estimador clásico que usaba tan solo la diferencia de los precios de cierre de cada día. Otra mejora respecto al estimador inicial de Parkinson se presenta en Beckers (1983)(24) y Kunitomo (1992)(25).

Aproximación Bayesiana para la estimación de la volatilidad

Desarrollada por Karolyi (1993), este método estadístico bayesiano hace uso de la información anterior de los datos de corte transversal de las volatilidades de todas las acciones, clasificadas por el tamaño (valor de capitalización de la empresa), nivel de apalancamiento financiero y volumen de negociación. De forma implícita, esta aproximación se basa en el hecho empírico observado por diversos autores, como Black (1976), Epps y Epps (1976), Morgan (1976), Christie (1982) y Pitts y Tauchen (1983), de que la volatilidad está relacionada con esas tres variables mencionadas anteriormente. Un supuesto restrictivo de este método es que los procesos estocásticos que describen la rentabilidad de las acciones deben ser independientes y lineales, que para la mayoría de los activos financieros no suele ser frecuente.

Otros estimadores para la volatilidad con información histórica de precios son el estimador de máxima verosimilitud de Lo (1986), el estimador «encogido» (shrinkage) de Geske y Roll

(1984) y el estimador robusto de Geske y Torous (1987). No obstante, aunque más eficientes, la dificultad en su cálculo hace que su utilización práctica sea limitada.

Dentro de este primer bloque de estimadores incluímos además los modelos tipo ARCH, que también hacen uso de datos de precios históricos de la rentabilidad del subyacente. Estos modelos constituyen aproximaciones en tiempo discreto de los procesos estocásticos en tiempo continuo que se suponen para la volatilidad en los diferentes modelos teóricos de valoración de opciones que hemos analizado con anterioridad(26), en los que su ventaja principal es que los parámetros de estos modelos se pueden estimar fácilmente, mediante aproximaciones de máxima verosimilitud.

Los modelos ARCH se definen como modelos autorregresivos donde la varianza condicionada a la información disponible en el instante t -1 (varianza condicional) no es constante, sino que depende de la información disponible en cada instante y de ahí su variabilidad en el tiempo (heteroscedasticidad).

Dado que muchos estudios econométricos, tales como Officer (1972), Black (1976), Bollerslev y Engle (1986) y French, Schwert y Stambaugh (1987) han contrastado ese comportamiento heteroscedástico en los datos observados de la volatilidad de los activos financieros, la utilización de estos modelos para predecir el riesgo y, en consecuencia, para la valoración de activos ha proliferado en la mayoría de los trabajos de investigación en el área de las finanzas [Duan (1991), Engle y Mustafa (1992)].

La expresión analítica del modelo ARCH (p) para la varianza condicional (σ^2_t) es la siguiente:

$$\sigma_t^2 = \sigma_0 + \sum_{i=1}^{p} \sigma_i \varepsilon_{t-i}^2$$

Es de esperar que los errores de retardos más antiguos, tendrán menos efecto sobre la volatilidad actual y así en el modelo ARCH(p), los errores que se produjeron antes de los «p» períodos o retardos, no tienen ningún efecto en la volatilidad actual. Como una generalización del modelo ARCH (p), Bollerslev (1986) propone los modelos GARCH (p,q), que se expresan del siguiente modo:

$$\sigma_t^2 = \sigma_0 + \sum_{i=1}^{p} \sigma_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

Este modelo añade al modelo ARCH (p) inicial un término que tiene en cuenta el efecto de la volatilidad de períodos anteriores en la volatilidad actual. El modelo GARCH (p,q) es un modelo ARCH (p) de orden infinito y como puede observarse, la varianza condicional depende sólo de la magnitud de ε_t y no de su signo. Concretamente en el modelo GARCH (1,1)(27) el efecto de una innovación sobre la volatilidad actual se reduce de forma geométrica a lo largo del tiempo.

Tanto los modelos ARCH como GARCH imponen restricciones a sus parámetros para garantizar que la varianza sea positiva, que son, σ_0,σ_i y $B_j > 0$. Además, una condición adicional para garantizar la estabilidad o estacionariedad es que:

$$\sum_{j=1}^{q} \beta_j + \sum_{i=1}^{p} \sigma_i < 1$$

Cuando esta última condición no se cumple, de manera que las innovaciones tienen influencia permanente, surgen los modelos GARCH integrados (IGARCH).

A pesar del aparente éxito de estas parametrizaciones simples, los modelos ARCH y GARCH no pueden capturar algunas importantes características de los datos, además de que presentan restricciones en los parámetros, como su no negatividad, que algunas veces no se satisface en el análisis empírico(28). La característica más importante que no recogen esos modelos es el efecto de apalancamiento o «efecto asimétrico» detectado inicialmente por Black (1976) y confirmado por los resultados de los trabajos de Christie (1982), French, Schwert y Stambaugh (1987), Wiggins (1987), Nelson (1990) y Schwert (1990), entre otros, que demuestran que los rendimientos de los activos están negativamente correlacionados con los cambios en su volatilidad, de manera que el riesgo previsto varía según el signo de la innovación (εt). Estadísticamente, este efecto ocurre cuando una caída inesperada en el precio (debida a malas noticias), incrementa la predición de volatilidad más que un incremento inesperado de similar magnitud en el precio (debido a buenas noticias) . Para tener en cuenta este efecto, Nelson (1991) propone el modelo GARCH exponencial o EGARCH(29),(30). Una revisión de modelos ARCH aplicados a series financieras se presenta en Bollerslev, Chou y Kroner (1992).

Por último, entre los modelos en tiempo discreto para describir el comportamiento de la volatilidad se encuentran los *modelos de volatilidad estocástica* (ARV), propuestos por Taylor (1986) y que, a diferencia de la metodología tipo ARCH, es el logaritmo de la varianza, σ^2_t, el que sigue un proceso lineal estacionario, (generalmente un proceso autorregresivo), que para el concreto ARV(1) viene dado por:

$$\begin{aligned} y_t &= \varepsilon_t \sigma_t & \varepsilon_t &\approx \mathrm{IID}(0,1) \\ \log\sigma_t^2 &= \gamma + \phi \log\sigma_{t-1}^2 + \eta_t & \eta_t &\approx \mathrm{NID}(0,\sigma_\eta^2) \end{aligned}$$

donde los residuos η_t son independientes de ε_t.

En cuanto a los resultados de la contratación de las formulaciones tipo ARCH, destacan los trabajos de Akgiray (1989), Alegría y Calatayud (1989), Engle y NG (1993), Peña (1993), Ruiz (1993).

El segundo bloque de estimadores, se expresa en términos del concepto de volatilidad implícita, estimadores que pasamos a comentar a continuación:

Volatilidad implícita (ISD)

Utilizada por primera vez por Latané y Rendleman (1976), se define como aquel valor de la volatilidad que iguala el precio de mercado de la opción (precio observado) al valor teórico de dicha opción haciendo uso de un modelo de valoración, donde los más utilizados tradicionalmente han sido el modelo de B-S y el binomial de Cox-Ross-Rubinstein (1979) [CRR en Figura 1]. Por tanto, conociendo el precio observado de la opción y el resto de las variables que intervienen en la formación del precio de estos activos derivados (precio de ejercicio, tipo de interés, tiempo hasta el vencimiento expiración y precio del activo subyacente), el modelo de valoración produce un único valor para la volatilidad, valor que se denomina «volatilidad implícita» o como denominan Cox y Rubinstein (1985) «estimación de mercado de la volatilidad». La volatilidad así obtenida hace referencia, de alguna manera, a la volatilidad futura que se intenta estimar.

La volatilidad implícita dependerá, fundamentalmente, de los cambios en las expectativas que los flujos de información provoquen en el mercado. Las principales fuentes de información que afectan a las expectativas sobre el precio de los activos provienen de anuncios sobre determinadas variables económicas o financieras, acontecimientos de divesa índole o decisiones de política monetaria o fiscal(31).

Bajo los supuestos estrictos del modelo de Black-Scholes, la volatilidad implícita se interpreta como la estimación de mercado del parámetro constante de la volatilidad. Si se supone, por el contrario, que la volatilidad varía de un modo determinístico en el tiempo, la volatilidad implícita se interpretaría como el acuerdo del mercado sobre la media de la volatilidad durante el resto de vida de la opción. Finalmente, si la volatilidad del activo es totalmente estocástica, aleatoria, como por ejemplo se supone en los modelos ya comentados de volatilidad estocástica, de igual manera los precios de las opciones pueden usarse para estimar los parámetros del proceso estocástico de la rentabilidad del subyacente(32).

Las fórmulas de valoración de opciones no pueden invertirse analíticamente, y para el cálculo de la volatilidad implícita se requiere, por tanto, el uso de métodos numéricos, tales como el método de bisección y el algoritmo de Newton-Raphson(33) para su obtención. Aún así, para algunos precios de las opciones no pueden encontrarse valores para la varianza implícita que justifiquen esos precios(34). En último caso, los procedimientos numéricos no son siempre necesarios: para el caso especial de opciones at-the-money, Brenner y Subrahmanyam (1988) muestran que la fórmula de B-S puede invertirse y así obtener una solución sencilla para derivar la volatilidad implícita.

Desviación estándard implícita ponderada (WISD)

En la medida en que puede haber diferentes opciones sobre el mismo activo con diferentes vencimientos y diferentes precios de ejercicio en un momento del tiempo, se deberían obtener diferentes volatilidades implícitas según sea el vencimiento y el precio de ejercicio. Incluso si los participantes en el mercado valoraran las opciones de acuerdo al modelo de B-S, las volatilidades implícitas observadas diferirían entre las opciones por muchas otras causas como por diferentes costes de transacción, por el hecho de tratarse de precios en términos discretos, por no ser sincrónica la negociación, etc.(35).

En respuesta a este problema, una extensa literatura sugiere calcular la volatilidad implícita para cada serie de opciones y entonces usar una media ponderada de esas volatilidades implícitas como una estimación de la volatilidad futura. La idea detrás de esta aproximación es simple: si el modelo es correcto, entonces las desviaciones respecto de los precios que da el modelo se pueden reducir utilizando un mayor número de observaciones. Así, si hay «n» series de opciones sobre una acción en un momento del tiempo, habrá que proceder al cálculo de las correspondientes desviaciones estándard implícitas para los diferentes vencimientos de las opciones sobre el mismo activo, siguiendo el cálculo que se proponía con anterioridad para la obtención de la volatilidad implícita.

No sería correcto utilizar como ponderación $\omega_j = 1/n$, para j=1,2,.....n, tal y como hacen Schmalensee y Trippi (1978) y Patell y Wolfson (1979), pues hay algunas opciones (at-the-money) que son más sensibles a ¡Error! Marcador no definido. la volatilidad que otras, por lo que deberían de tener una mayor ponderación. Es más, dado que los valores de las opciones call «at-the-money» son más sensibles a la volatilidad que las «out-of-the-money» y las «in-the-money», en lugar de estudiar las ponderaciones, se podría utilizar como volatilidad implícita la correspondiente a aquellas opciones que están «at-the-money». Por esa razón, Latané y Rendleman (1976) y Rogalski (1978) ponderan de acuerdo a la derivada parcial del valor de la opción call calculada por la ecuación B-S respecto a cada desviación estándard implícita, la «vega» ¡Error! Marcador no definido. de la opción, es decir:

$$\omega_j = \partial C_j / \partial \sigma_j \qquad j = 1,\ldots\ldots\ldots\ldots n$$

de manera que las opciones más sensibles a la desviación estándard son ponderadas más fuertemente que aquellas que no lo son. No obstante, esta estimación tiene la desventaja de que está sesgada en la medida de que las ponderaciones no suman la unidad. Por esta razón, Chiras y Manaster (1978) y Resnick, Sheikh y Song (1993) utilizan como ponderación la elasticidad del precio de la opción call de B-S con respecto a cada desviación estándard implícita, es decir:

$$\omega_j = (\partial C_j / \partial \sigma_j)(\sigma_j / C_j) \qquad j = 1,\ldots\ldots\ldots\ldots n$$

Un procedimiento alternativo para obtener la volatilidad implícita es el propuesto por Beckers (1981) y Whaley (1982) que difiere de los anteriores en que en lugar de utilizar ponderaciones ya prefijadas (ad hoc), se calculan ponderaciones «implícitas» que permiten estimar la desviación estándard implícita, de forma que se minimice :

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_i [C_i - BS_i(\hat{\sigma})]^2$$

donde C_j es el precio de mercado de la opción, BS_i es el precio que da el modelo B-S de la opción i (donde se conocen todos los argumentos excepto σ) y ω_i son las ponderaciones a calcular.

Modelos neuronales

Finalmente, en el tercer bloque recogemos el modelo neuronal que aplicado a las finanzas permite recoger características de no-linealidad, más complejas, de las series financieras, por ejemplo, de volatilidad implícita. Respecto a esta variable, el objetivo de esta metodología es encontrar un estimador fiable de los cambios de volatilidad implícita, reconocida su superioridad -respecto a volatilidad histórica o volatilidad de un modelo ARCH- para predecir la volatilidad realizada o futura. Algunos trabajos importantes en el uso de esta técnica para predicción de series temporales en series financieras son los de White (1988), Kingdon (1993), y en concreto, para predicción de volatilidad Burgess y González Miranda (1994)(36).

Respecto a los modelos estadísticos tradicionales, las redes neuronales son una clase de técnicaS de modelización no lineal, consideradas como «aproximadores universales», pues pueden aproximar automáticamente cualquier función -por compleja que ésta sea- que mejor caracterice a los datos, con la particularidad de que son más robustas a valores atípicos que los modelos tradicionales. No se necesita incorporar información adicional al modelo y su estimación puede ser automatizada. Por último, los modelos neuronales, a nivel empírico, presentan resultados que al menos son iguales (si no superiores) a los resultados obtenidos de modelos tradicionales.

Entre las desventajas se encuentra su dificultad, dada la compleja forma funcional, y su reducido desarrollo, por lo que no se dispone aún de intervalos de confianza o test de hipótesis; los sistemas neuronales suelen presentar más parámetros a optimizar que los modelos clásicos, y, por último, la optimización de una red neuronal requerirá, en general, mucho más tiempo que el requerido en los modelos clásicos.

La idea que subyace en estos modelos es que, al igual que una neurona del cerebro, es posible describir la relación entre el input de la neurona y su output de una forma matemática, relación que aprende la red neuronal gracias a que las conexiones entre neuronas cambia con el tiempo. Una vez planteadas y verificadas las diferentes redes en un esquema estático, comienza el proceso de aprendizaje y entrenamiento de cada una de las redes, definidas en tres capas: una capa de inputs, una capa oculta(37) y la capa de output, sin conexiones directas entre inputs y output.

La cuestión que debe ser resuelta durante el proceso de aprendizaje o entrenamiento es cuándo interrumpir el entrenamiento de la red, para lo cual se utilizará una primera porción de los datos de la muestra en el conjunto de entrenamiento y las siguientes observaciones, para el conjunto de validación. El entrenamiento de la red continúa sin interrupción siempre y cuando el resultado en el conjunto de validación mejore, de manera que si empieza a empeorar se interrumpe el entrenamiento. El estadístico utilizado para seleccionar el mejor modelo en esta estrategia de aprendizaje es la raíz del error cuadrático medio. Para todas las redes, el entrenamiento es llevado a cabo hasta un número de iteraciones igual a 10.000. Finalmente, de entre todas las redes, se elige la más pequeña posible, capaz de generalizar y modelizar los datos razonablemente bien, determinando los inputs que contribuyen de forma más significativa en la explicación de la variable output.

González Miranda (1995), después de un exhaustivo desarrollo teórico del modelo neuronal, lleva a cabo una aplicación empírica en la que combina el uso de ese modelo y de las técnicas lineales clásicas para encontrar la relación entre cambios de volatilidad implícita y diferentes variables explicativas sugeridas por la literatura financiera al respecto, con datos intradiarios de opciones sobre el IBEX 35 (período Noviembre de 1992 a Abril de 1883). La evaluación de las predicciones del modelo neuronal respecto a otros modelos clásicos por medio de una estrategia simulada de «trading»(38) muestra una ganancia acumulada tomando en consideración los costes de transacción, por lo que mejoraría los resultados en la cuenta de pérdidas y ganancias de un inversor imaginario en un «trading» real. Sin embargo, en cuanto a la capacidad de predicción, el modelo neuroral presenta los peores resultados respecto a las técnicas clásicas(39) cuando la base de datos es reducida, y por tanto, es una restricción clara en la capacidad de aprendizaje del modelo.

CONCLUSIONES

La extensa literatura financiera presentada en este trabajo muestra la importancia de la volatilidad, tanto en el campo teórico como variable fundamental en la derivación de modelos para la valoración de activos derivados, como en la práctica diaria de los operadores en los mercados financieros, interesados cada vez más en la búsqueda de estimadores capaces de predecir con más exactitud la volatilidad esperada o futura en el mercado: la gestión de sus carteras, la cobertura de riesgos y la selección de su estructura financiera dependerá de forma crucial de sus expectativas sobre la volatilidad.

Obviamente, una incorrecta predicción de la volatilidad futura dará lugar a un error en la valoración del activo derivado y, por la misma razón, a una «mala» gestión de carteras por parte de agentes financieros. Aunque si bien es cierto que no es posible predecir la volatilidad futura con absoluta certeza, debido a su propia naturaleza, sí que es posible avanzar en la investigación de mejores estimadores y de recomendaciones en cuanto al uso de uno u otro estimador. De ahí, de su importancia cada vez mayor, es por lo que la investigación en este campo sigue abierta, cada vez es más abundante y, más aún, cuenta con el asesoramiento y apoyo de instituciones e intermediarios financieros, interesados en un mayor conocimiento del mercado.

NOTAS

(1) Este trabajo es una síntesis actualizada del segundo capítulo de la tesis doctoral «Valoración de opciones: una contrastación del modelo de difusión con saltos de Merton», que he presentado el 19 de mayo de 1995, en la Universidad de La Laguna y que fue evaluada por los profesores Gonzalo Rubio, Francisco Valero, Emilio Ontiveros, Dulce Contreras y Manuel Navarro.

(2) Agradezco los valiosos comentarios del profesor Francisco Pérez Calatayud.

(3) Para Macbeth y Merville (1980), si en cada período el agregado de consumidores-inversores planea su consumo e inversión para múltiples períodos futuros, entonces las varianzas de sus activos pueden cambiar a lo largo del tiempo con la llegada de nueva información, que da lugar a que se modifiquen las preferencias y la oferta de activos con riesgo en los mercados de capital.

(4) Christie (1982) calcula la elasticidad de la volatilidad de las acciones y obtiene una relación negativa respecto al precio de la acción.

(5) Una explicación detallada del proceso de difusión lognormal se encuentra en Gonzalo Rubio (1989).

(6) Un proceso de Wiener, dZ, es definido como: $dZ = e\sqrt{t}$, siendo $\varepsilon \Rightarrow N(0,1)$

(7) Un análisis más detallado del proceso de difusión con saltos y su relación con otros procesos estocásticos se presenta en R. L. Alegría (1995).

(8) Dos casos especiales de este modelo que han sido analizados detenidamente en Beckers (1980), es cuando $\theta=1$, denominándose proceso de raíz cuadrada (square root process) y cuando $\theta=0$, proceso absoluto (absolute process). Cox y Ross (1976) analizan estos dos casos, como dos ejemplos límites del proceso puro de saltos más general.

(9) Las expresiones para a y b pueden recogerse de Rubinstein (1983, pag 214).

(10) Una comparación de este modelo con otros alternativos, (como por ejemplo, el clásico B-S, el modelo de opción compuesta, el modelo de difusión absoluta, el modelo puro de saltos y el modelo de difusión y saltos) se encuentra en Rubinstein (1985).

(11) No obstante, la consideración de la volatilidad como totalmente estocástica se remonta al trabajo preliminar de Johnson (1979), que no obtuvo una solución analítica cerrada.

(12) Cuando $\rho=\pm1$.

(13) La ecuación diferencial de Garman (1976) plantea que para un activo derivado, cuyo precio f, depende del precio de unas variables de estado determinadas, θi, se debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j\frac{\partial^2 f}{\partial\theta_i\partial\theta_j} - rf = \sum_i \theta_i \frac{\partial f}{\partial\theta_i}\left[-\mu_i + \beta_i(\mu^* - r)\right]$$

donde σ_i es la desviación estándard instantánea de θ_i, ρ_{ij} es la correlación instantánea entre θ_i, θ_j, μ_i es la tendencia (media) de θ_i, β_i es el vector de las betas para la regresión de las variables de estado «rentabilidades» ($\partial\theta$ / θ) sobre la cartera de mercado y las carteras más cercanamente correlacionadas con las variables de estado, μ^* es el vector de rentabilidades esperadas instantáneas de la cartera de mercado y las carteras más cercanamente correlacionadas con las variables de estado y r es el vector donde sus elementos son el tipo de interés sin riesgo, r.

(14) La volatilidad no presentaría riesgo sistemático, por lo que todo el riesgo sería diversificable

(15) Como expresan Lamoureux y Lastrapes (1993), Hull y White suponen que el riesgo de volatilidad no afecta al precio de la opción, de manera que el coeficiente de correlación entre dw y dz es cero.

(16) Supuestos que también utiliza Geske (1979a).

(17)

$$\overline{V} = \frac{1}{T}\int_0^T \sigma^2 (t)dt.$$

(18) Se puede demostrar que si no hay riesgo de cambios de la varianza, la expresión que obtiene se reduce a la fórmula de B-S para la valoración de opciones call europeas.

(19) Otros trabajos que también examinan el comportamiento de las volatilidades implícitas son el de Shastri y Tandon (1986), Stein (1989), Sheikh (1993), Heynen (1994), Taylor y Xu (1994), Heynen, Kemna y Vorst (1994).

(20) El precio Arrow-Debreu es el precio de un activo contingente de estado que paga un dólar si el estado ocurre y cero si no.

(21) Peiró (1992) presenta evidencia de la fuerte variabilidad de la volatilidad a lo largo del tiempo en el mercado de acciones español.

(22) Para Akgiray (1989) un proceso «estricto ruido blanco» se define cuando la variable X_{t+s} no está correlacionada con sus valores pasados, X_t y además dichos valores son independientes.

(23) No obstante, Beckers (1983) considera que en la práctica el estimador propuesto por Garman y Klass (1980) es una media ponderada entre el estimador de Parkinson (1980) y el tradicional de los precios de cierre.

(24) Beckers (1983) propone el denominado estimador «empírico», que viene a ser una transformación lineal del estimador de valores extremos de Parkinson.

(25) Una explicación detallada del método clásico, del de Parkinson y de Kunitomo, se presenta en Chamorro (1993), en el que además se calculan a nivel empírico los tres estimadores.

(26) Para una demostración de esta aproximación, véase Nelson (1990).

(27) El modelo GARCH (1,1) es el modelo preferido en la mayoría de los casos por Bollerslev *et al.*(1992).

(28) Véase Nelson (1991).

(29) Una comparación del modelo GARCH y el EGARCH se encuentra en el trabajo de Engle y NG (1993).

(30) Formulaciones alternativas de modelos para la varianza condicional heterocedástica, que recogemos de forma breve, serían: ARCH en media (ARCH-M), propuesto por Engle, Lilien y Robins (1987), ARCH Semiparamétrico (SPARCH) de Engle y González (1991), el ARCH Estructural (STARCH) de Harvey, Ruiz y Sentana (1992), el ARCH no lineal de Bollerslev y Engle (1986), el ARCH multiplicativo de Mihoj (1987), Geweke (1986), Pantula (1986), el modelo CJR de Glosten, Jagannathan y Runkle (1989), el modelo de desviación estándard autorregresiva de Schwert (1990), el GARCH Asimétrico (AGARCH) de Engle (1991), el GARCH no lineal asimétrico, el VGARCH , el A-PARCH (Asymmetric Power ARCH) de Ding, Granger y Engle (1993), el GARCH-M de Bollerslev y Engle (1986), el Log-GARCH de Pantula (1986) y Geweke (1986), los modelos ARCH- multivariantes, definidos en Bollerslev, Engle y Wooldridge (1988), entre otros.

(31) Entre otros factores, los cambios de la volatilidad histórica parecen influir en los cambios en las expectativas sobre la volatilidad implícita, según demuestran Analistas Financieros Internacionales (1992).

(32) Por ejemplo, Engle y Mustafa (1992) muestran cómo usar los precios de las opciones para estimar los parámetros de la volatilidad, cuando el activo subyacente sigue un proceso GARCH.

(33) Para una revisión de cómo aplicar ambos métodos el de bisección y el de Newton-Raphson, ver Kritzman (1991).

(34) En relación a esta observación, el trabajo de Koehler y Manaster (1982) presenta las condiciones necesarias y suficientes para que exista una varianza implícita positiva.

(35) Cox y Rubinstein (1985) plantean que diferentes opciones sobre el mismo activo pueden tener diferentes volatilidades implícitas, incluso para opciones con el mismo día de expiración: puede existir alguna diferencia que haga que el ejercicio anticipado sea óptimo, por lo que el tiempo de vida de esa opción no es el mismo. Por ejemplo, si una call está «muy en dinero» y el día más próximo de pago de divi-

dendos es dentro de un mes, en el que se ejercitará probablemente, la volatilidad implícita reflejará la estimación de mercado de la volatilidad para sólo un mes, aunque el día de expiración sea dentro de más meses.

(36) Referenciados de González Miranda (1995).

(37) Una capa oculta no hace contacto con el mundo exterior, sólo con las capas de inputs y de outputs. Existe una única conexión entre cada unidad de la capa de inputs y cada unidad de la capa oculta, donde cada unidad tiene un peso, almacenado y mantenido al final de cada conexión.

(38) Esta estrategia de «trading» requiere la compra/venta de opciones call sobre el índice IBEX35 en cada límite temporal (final de cada hora).

(39) Las técnicas clásicas utilizadas por González Miranda (1995) son la metodología univariante de Box-Jenkins y las técnicas econométricas estándar de regresión.

BIBLIOGRAFÍA

ALEGRÍA, R. L. (1995): Valoración de Opciones: una Contrastación del Modelo de Difusión con Saltos de Merton, Tesis Doctoral no publicada, Universidad de La Laguna.

ALEGRÍA, R. L. y F. P CALATAYUD (1989). Modelos ARMA con errores ARCH aplicados a la valoración de opciones sobre acciones, Documento de Trabajo, Nª 13, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad de La Laguna.

AKGIRAY, V. (1989): Conditional Heteroscedasticity in Time Series of Stock Returns, Journal of Business, 62, nº1, pp. 55-80.

AMIN, A. I. y R. A. JARROW (1992): Pricing Options on Risky Assets in a Stochastic Interest Rate Economy, Mathematical Finance, Vol. 2, Nº 4, pp. 217-237.

AMIN, K. I. y V. K. NG (1993): Option Vatuation with Systematic Stochastic Volatility, Journal of Finance, 48, Nª 3, pp. 881.910.

ANALISTAS FINANCIEROS INTERNACIONALES (1992): La estimación de la volatilidad en la valoración de opciones, Análisis Financiero Internacional, febrero-marzo, pp. 45-54.

BACHELLIER, L. (1900):Theorie de la Speculation, traducido inglés por A. J. Boness en The Random Character of Stock Market Prices, ed. P. H. Cootner, pp. 17-78.Cambridge, Mass.:M.I.T.Press, 1967.

BAILEY, W. y R. M. STULZ (1989): The Pricing of Stock Index Options in a General Equilibrium Model , Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 24, Nª 1, pp. 1-12.

BALL, C. A. y W. N. TOROUS (1985): On jumps in Common Stock Prices and Their Impact on Call Pricing, Journal of Finance, 40, pp. 155-174.

BEAVER, W. H. (1968): The Information Content of Annual Earnings Announcement, Empirical Reseach in Accounting; Selected Studies, Journal of Accounting Research, Vol. 6, pp. 67-92.

BECKERS, S. (1980): The Constant Elasticity of Variance Model and its Implications for Option Pricing, Journal of Finance, Vol. 35, pp. 661-673.

BECKERS, S. (1981): A Note on Estimating the Parameters of the Diffusion-Jump Model of Stock Returns, Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 16, Nª 1, pp. 127-139.

BECKERS, S. (1983): Variances of Security Price Returns Based on High, Low, and Closing Prices, Journal of Business, 56, pp. 97-112.

BLACK, F. (1976): Studies of Stock Price Volatility Changes, Proceedings of the 1976 Meetings of the American Statistical Association, pp. 177-181.

BLACK, F. y M. SCHOLES (1972): The Vatuation of Option Contracts and Test of Market Efficiency, Journal of Finance, Vol. 27, pp. 399-417.

BLACK, F. y M. SCHOLES (1973): The Pricing of Options and Corporate Liabilities, Journal of Political Economy, 81, pp. 637-659.

BLATTBERG, R. C. y N. J. GONEDES, (1974): A Comparison of the Stable and Student Distribution of Statistical Models for Stock Prices, Journal of Business, 47, pp. 244-280.

BOLLERSLEV, T. (1986): Generalized Autoregresive Conditional Heteroskedasticity, Journal of Econometrics, 31, pp. 307-327.

BOLLERSLEV, T, R. Y. CHOU Y K. F. KRONER (1992): ARCH Modeling in Finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence, Journal of Econometrics, 52, pp. 5-59.

BOLLERSLEV, T. y R. F. ENGLE (1986): Modelling the Persistence of Conditional Variances, Econometric Reviews, 5, pp. 1-50, 81-87.

BOLLERSLEV, T., R. F. ENGLE y J. M. WOOLDRIDGE (1988): A Capital Asset Pricing Model with Time Varying Covariances, Journal of Political Economy, 96, pp. 116-131.

BONESS, A. J. (1964): Elements of a Theory of Stock-Option Value, Journal of Political Economy, 72, pp. 163-175.

BRENNER, M. Y SUBRAHMANYAN, M.G. (1988): A Simple Formula to Compute the Implied Standard Deviation, Financial Analysts Journal, Vol. 44, Nº 5, pp. 80-83.

BROCK, W. A. (1986): Distinguishing Random and deterministic Systems: Abridged Version, Journal of Economic Theory, Vol. 40, pp. 168-195.

BRORSEN, B. W. y S-R YANG (1993): Nonlinear Dynamics of Daily Futures Prices: Conditional Heteroskedasticity or Chaos?, Journal of Futures Markets, Vol. 13, Nº 2, pp. 175-191.

BURGESS N. Y F. GONZÁLEZ MIRANDA (1994): Intraday Volatility Forecasting for Option Pricing using a neural Network Approach, European Journal of Finance.

CANINA, L. y S. FIGLEWSKI (1993): The Informational Content of Implied Volatility, The Review of Financial Studies, Vol. 6, Nº 3, pp. 659-681.

CHAMORRO, J. M. (1993): Volatilidad de las Acciones y Garantía de los Depósitos, Documento de Trabajo 93.14, Facultad de Ciencias Económicas, Bilbao.

CHIRAS, D. P. Y S. MANASTER (1978): The Informational Content of Option Prices and a test of Market Efficiency, Journal of Financial Economics, Vol. 6, pp. 213-234.

CHRISTIE, A. A. (1982): The Stochastic Behavior of Common Stock Variances, Journal of Financial Economics, 10, pp. 407-432.

CLARK, P. K. (1973). A Subordinated Stochastic Process Model with Finite Variance for Speculative Prices, Econometrica, Vol. 41, pp. 135-156.

COX, J. C. (1975): The Pricing of Options for Jump Processes, Rodney L. White Center Working Paper Nº 2-75. University of Pennsylvania, Philadelphia.

COX, J. C. y S. A. ROSS (1976): The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes, Journal of Financial Economics, 3, pp. 145-166.

COX, J. C., S. A. ROSS y M. RUBINSTEIN (1979): Option Pricing. A Simplified Approach, Journal of Financial Economics, 7, pp. 229-263.

COX, J.C. y M. RUBINSTEIN(1985):Option Markets.Prentice-Hall,Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

DAY, F. y C. M. LEWIS (1992): Stock Market Volatility and the Information Content of Stock Index Options, Journal of Econometrics, Vol. 52, Nº 1/2, pp. 267-287.

DING, Z., W. J. GRANGER y R. F. ENGLE (1993): A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model, Journal of Empirical Finance, 1, pp. 83-106.

DUAN, J. C. (1991): The GARCH Option Pricing Model, Proceedings 18th European Finance Association Conference, Vol. II. Rotterdam.

EISENBERG, L. K. y R. A. JARROW (1991): Option Pricing with Random Volatilities in Complete Markets, Federal Reserve Bank of Atlanta Working Paper 91-16.

EMANUEL, D. C. y J. D. MACBETH (1982): Further Results on the Constant Elasticity of Variance Call Option Pricing Model, Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 17, pp. 533-554.

ENGLE, R. (1982): Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation, Econometrica, 50, pp. 987-1008.

ENGLE, R. (1991): Statistical Models for Financial Volatility, Working Paper, Department of Economics. University of California San Diego.

ENGLE, R. y G. GONZÁLEZ-RIVERA (1991): Semiparametric ARCH Models, Journal of Business and Economic Statistics, 9, pp. 345-360.

ENGLE, R., D. M. LILIEN y R. P. ROBIN (1987): Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure. The ARCH-M Model, Econometrica, 55, pp. 391-407.

ENGLE, R. F. y C. MUSTAFA (1992): Implied ARCH Models from Options Prices, Journal of Econometrics, 52, pp. 289-311.

ENGLE, R. F. y V. K. NG (1993): Measuring and testing the Impact of News on Volatility, Journal of Finance, 48, nº 5, pp. 1749-1778.

EPPS T. W. y M. L. EPPS (1976): The Stochastic Dependence of Secutity Price Changes and Transactions Volume: Implications for the Mixture-of-Distribution Hypothesis, Econometrica, 44, pp. 305-321.

FAMA, E. E. (1965): The Behavior of Stock Market Prices, Journal of Business, 38, pp. 34-105.

FINNERTY, J. E. (1978): The CBOE and Market Efficiency, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 13, pp. 29-38.

FRENCH, D. W. (1984): The Weekend Effect on the Distribution of Stock Prices: implications for option pricing, Journal of Financial Economics, 13, pp. 547-559.

FRENCH, D. W. y L. J. MARTIN. (1988): The Measurement of Options Misspricing, Journal of Banking and Finance, 12, Nº 4, pp. 537-550.

FRENCH, K. Y ROLL, R. (1980): Stock Return Variances: the Arrival of Information an the Reaction of Traders, Journal of Financial Economics, 8, pp. 79-96.

FRENCH, K. R., G. W. SCHWERT, y R. F. STAMBAUGH (1987): Expected Stock returns and Volatility, Journal of Financial Economics, 19, pp. 3-29.

GALAI, D. (1977): Tests of Market Efficiency of the Chicago Board Options Exchange, Journal of Business, 50, pp. 167-197.

GARMAN, M. (1976): A General Theory of Asset Valuation Under Diffusion State Processes, Working Paper Nº 50, University of California, Berkeley.

GARMAN, M. B. y M. J. KLASS (1980): On the Estimation of Security Price Volatilities from Historical Data, Journal of Business, 53, Nº 1, pp. 67-78.

GESKE,R.(1979a):The Valuation of Compound Options,Journal of Financial Economics,7, pp. 63-81.

GESKE, R. (1979b): A Note on an Analytical Formula for Unprotected American Call Options on Stocks with Know Dividends, Journal of Financial Economics, 7, pp. 375-380.

GESKE, R. y R. ROLL (1984): On Valuing American Call Options with the Black-Scholes European Formula, Journal of Finance, 49, Nº 2, pp. 443-455.

GESKE, R. y W. TOROUS (1987): Volatility and Misspricing: Robust Variance Estimation and Black.-Scholes Call Options pricing, UCLA Finance Working Paper, 10-87.

GEWEKE, J. (1986): Modeling the Persistence of Conditional Variances: A Comment, Econometric Review, 5, pp. 57-61.

GLOSTEN, L., R. JAGANNATHAN y D. RUNKLE (1989): Relatinship Between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks, Journal of Finance, 48, nº5, pp. 1779-1801.

GONZÁLEZ MIRANDA, F. (1995): Análisis de la Volatilidad en Opciones Financieras: Una Variable Fundamental, Tesis Doctoral no publicada, Universidad Autónoma de Madrid.

HARVEY, A., E. RUIZ y E. SENTANA (1992): Unobserved Component Time Series Models with ARCH Disturbances, Journal of Econometrics, 52, pp. 62-74.

HESTON, S. L. (1993): A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options, Review of Financial Studies, 6, Nº 2, pp. 327-343.

HEYNEN, R. (1994): An Empirical Investigation of Observed Smile Patterns, Working Paper, Tinbergen Institute, Erasmus University, Rotterdam.

HEYNEN, R.,A. KEMNA y T. VORST (1994): Analysis of the Term Structure of Implied Volatilities, Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 29, 1, pp. 31-56.

HO, T. y S. POON (1992): The GARCH Option Pricing Model: U.K. Evidence, Proceedings 19th European Finance Association Conference, IV. Lisboa

HULL, J. y WHITE, A. (1987): The Pricing of options on Assets with Stochastic Volatilities, Journal of Finance, 42, Nº 2, pp. 281-300.

JARROW, R. y RUDD, A. (1982): Approximate Option Valuation for Arbitrary Stochastic Processes, Journal of Financial Economics, 10, pp. 347-369.

JARROW, R. A. y J. B. WIGGINS (1989): Option Pricing and Implicit Volatilities, Journal of Economic Surveys, 3, Nº 1, pp. 59-81.

JOHNSON, H. E. (1979): Option Pricing when the Variance Is Changing, Graduate School of Management Working Paper 11-79. University of California, Los Angeles.

JOHNSON, H. E. y D. SHANNO (1987): Option Pricing when the Variance Is Changing, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 22, Nº 2, pp. 143-151.

KAROLYI, G. A. (1993): A Bayesian Approach to Modelling Stock Return Volatility for Option Valuation, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 28, Nº 4, pp. 579-594.

KINGDON, J. (1993): Neural Bets for Time Series Forecasting: criteria for performance with an application in gilt futures pricing, Proceedings of the First International Workshop on Neural Networks in the Capital Markets, London.

KOEHLER, G. Y S. MANASTER (1982): The Calculation of Implied Variances from the Black-Scholes Model: A Note, Journal of Finance, 37, Nº 1, pp. 227-230.

KON, S. (1984): Models of stock Returns: A Comparison, Journal of Finance, 39, Nº 1, pp. 147-165.

KRITZMAN, M. (1991): What Practitioners Need To Know About Estimating Volatility: Part I, Financial Analysts Journal, 47, pp. 22-25.

KUNITOMO, N. (1992): Improving the Parkinson Method of Estimating Security Price Volatilities; Journal of Business, 65, Nº 2.

KUWAHARA, H. y T. MARSH (1994): Why Doesn´t the Black-Scholes Model Fit Japanese Warrants and Convertible Bonds?, Japanese Journal of Financial Economics, Vol 1, 1.

LAMOREUX, C. G. y W. D. LASTRAPES (1993): Forecasting Stock-Return Variance: Toward an Understanding of Stochastic Implied Volatilities, Review of Financial Studies, 6, Nº 2, pp. 293-326.

LATANÉ, H. A. y RENDLEMAN, R. J. (1976): Standard Deviations of Stock Price Ratios Implied in Option Prices, Journal of Finance, Vol. 31, Nº 2, pp. 369-382.

LAUTERBACH, B. y P. SCHULTZ (1990): Pricing Warrants: An Empirical Study of the Black-Scholes Model and Its Alternatives; Journal of Finance, 45, Nº 4, pp. 1181-1209.

LINTNER, J. (1965): The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets, Review Economics and Statistical, 47, pp. 768-783.

LO, A. W. (1986): Statistical Tests of Contingent Claims Asset Pricing Models: A New Methodology, Journal of Financial Economics, 17, pp. 143-174.

MACBETH, J. D. y MERVILLE, L. J. (1980): Tests of the Black-Scholes and Cox Call Option Valuation Models, Journal of Finance, 35, pp. 285-300.

MELINO, A. y S. TURNBULL (1990): The Pricing of Foreng Currency Options with Stochastic Volatility, Journal of Econometrics, 45, pp. 239-265.

MERTON, R. (1973): Theory of Rational Option Pricing, Bell Journal of Economics and Management Science, 4, pp. 141-183.

MERTON, R. (1976): Option Pricing When Underlying Returns are Discontinuous, Journal of Financial Economics, 3, pp. 125-144.

MIHOJ, A. (1987): A Multiplicative Parameteretization of ARCH Models, Working Paper, Department of Statistics, University of Copenhagen.

MILNE, F. y S. M. TURNBULL (1991): A Simple Approach to Interest-Rate Option Pricing, Review of Financial Studies, 4, Nº 1, pp. 87-120.

MORGAN, I. (1976): Stock Prices and Heteroscedasticity, Journal of Business, 49, pp. 496-508.

MOSSIN, J. (1966): Equilibrium in a Capital Asset Market, Econometrica, 34, pp. 768-783.

NAIK, V. (1993): Option Vatuation and Hedging Strategies with Jumps in the Volatility of Asset Returns, Journal of Finance, 48, Nº 5, pp. 1969-1984.

NAIK, V. Y M. LEE (1990): General Equilibrium Pricing of Options on the Market Portfolio with Discontinuous Returns Review of Financial Studies, 3, pp. 493-522.

NELSON, D. (1990): ARCH Models as Diffusion Approximations, Journal of Econometrics, 45, pp. 347-370.

NELSON, D. (1991): Conditional Heteroskedasticity in Asset returns: a New Approach, Econometrica, 59, pp. 347-370.

OFFICER, R. R. (1972): The Distribution of Stock Returns, Journal of American Statistical Association, 67, pp. 211-232.

PANTULA, S. G. (1986): Modeling the Persistence os Conditional Cariances: A Comment, Econometrica Review, 5, pp. 71-74.

PARKINSON, M. (1980): The Extreme Value Method for Estimating the Variance of the Rate of Return, Journal of Business, 53, Nº 1, pp. 61-65.

PATELL, J. M. y M. A. WOLFSON (1979): Anticipated Information Releases Reflected in Call Option Prices, Journal of Accounting and Economics, 1, pp. 117-140.

PEIRÓ, A. (1992): La Volatilidad del Mercado de Acciones Español, Working Paper 92-12. Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas.

PEÑA, I. (1993): Medidas de volatilidad en mercados financieros, Documento de Trabajo, Departamento de Economía, Universidad Carlos III de Madrid.

PITTS, M. y G. TAUCHEN (1983): The Price Variability-Volume Relatinship of Speculative Markets, Econometrica, 51, pp. 485-505.

PRESS, S.J.(1967):A Compound Events Model for Security Prices,Journal of Business,40,pp.317-335.

RESNICK, B. G., A. M. SHEIKH y Y-S SONG(1993):Time Varying Volatilities and Calculation of the Weighted Implied Standard Deviation,Journal of Financial and Quantitative Analysis,28, pp.417-430.

ROGALSKI, R. J. (1978): Variances and Option Prices in Theory and Practice, Journal of Portfolio Management, pp. 43-51.

ROLL, R. (1977): An Analytic Valuation Formula for Unprotected American Call Options on Stocks with Know Dividends, Journal of Financial Economics, 5, pp. 251-258.

RUBINSTEIN, M. (1983): Displaced Diffusion Option Pricing, Journal of Finance, 38, pp. 213-317.

RUBINSTEIN, M. (1985):Nonparametric Tests of Alternative Option Pricing Models Using All Reported Trades and Quotes on the 30 Most Active CBOE Option Classes from August 23, 1976 through August 31, 1978, Journal of Finance, 40, pp. 455-480.

RUBINSTEIN , M. (1994): Implied Binomial Trees, Journal of Finance, 3, pp. 771-818.
RUBIO, G. (1989): Una Introducción a los procesos de Ito: El modelo de Valoración de Activos de Capital como Condición Suficiente para la Valoracióndе Opciones, Revista Española de Financiación y Contabilidad, pp. 701-717.
RUIZ, E. (1993): Stochastic Volatility Versus Autoregressive Conditional Heteroscedasticity; Documento de Trabajo 93-44, Departamento Estadística y Econometría, Universidad Carlos III Madrid.
SAMUELSON, P. A. (1965): Rational Theory of Warrant Pricing, Industrial Management Review, 6 , pp. 13-31.
SAVIT, R. (1989): Nonlinearities and Chaotic Effects in Options Prices, Journal of Futures Markets, 6, pp. 507-518.
SCHMALENSEE, R. y R. R. TRIPPI (1978): Common Stock Volatility Expectations Implied by Option Premia, Journal of Finance, 33, pp. 129-147.
SCHWERT, G. W. (1990): Stock Volatility and the Crash of 87, Review of Financial Studies, 3, pp. 77-102.
SCOTT, L. O: (1987): Option Pricing when the Variance Changes Randomly: Theory, Estimation and a Application, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 22, Nº 4, pp. 419-438.
SHARPE, W. F. (1964): Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk, Journal of Finance, 19, pp. 425-442.
SHASTRI, K. Y K. TANDON (1986): An Empirical test of a Valuation Model for American Options on Futures Contracts, Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 21, 4, pp. 377-392.
SHEIKH, A. (1993): The Behavior of Volatility Expectations and Their Effect on Expected Returns, The Journal of Business, Vol. 66, Nº 1, pp. 93-116.
SPRENKLE, C. M. (1964): Warrant Prices as Indicators of Expectations and Preferences, Yale Economic Essays, 1, pp. 172-231.
STEIN, J. (1989): Overreactions in the Options Market, Journal of Finance, 44, pp. 1011-1023.
STEIN, E. M. y J. C. STEIN (1991): Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analityc Approach, Review of Financial Studies, 4, pp. 727-752.
TAYLOR, S. J. (1986): Modelling Financial Time Series, Jhn Wiley, Chichester, U. K.
TAYLOR, S. J. y X. XU (1994): The Term Structure of Volatility Implied by Foreign Exchange Options, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 29, nº 1, pp. 57-74.
WHALEY, R. E. (1981): On the Valuation of American Call Options on Stocks with Know Dividends, Journal of Financial Economics, 9, pp. 207-212.
WHALEY, R. E. (1982): Valuation of American Call Options on Dividend-Paying Stocks: Empirical Tests, Journal of Financial Economics, 10, pp. 29-58.
WIGGINS, J. B. (1987): Option Values Under Stochastic Volatility: Theory and Empirical Estimates, Journal of Financial Economics, 19, pp. 351-3.
WHITE, H. (1988): Economic prediction using Neural Nets: the Case of the IBM Daily Stock returns, Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks, Vol. 2 IEEE.

FIGURA 1: DIFERENTES MODELIZACIONES PARA LA VOLATILIDAD