# Los problemas de la estadística [1]

GEORGE TH. GUILBAUD

## PRESENTACIÓN

El artículo que presentamos a continuación fue publicado en 1958 como una contribución al tratado de Sociología de Gurvitch, y aunque existía una edición española hecha en Méjico, la traducción no hacía ninguna justicia a la luminosidad y trascendencia de este texto, tal vez, porque no fue encargada a un especialista, o al menos, a un conocedor de los múltiples problemas que se derivan de la aplicación de las matemáticas. Esta nueva traducción realizada por el profesor Alejandro Almazán contribuye, sin duda, a aclarar alguno de los aspectos más interesantes, pero también más oscuros, de la estadística matemática. Sólo un matemático con profundos conocimientos de Historia como George Guilbaud, podía escribir un capítulo de estas características y titularlo «Los problemas de la estadística,» un título, que todavía hoy, cuando la mayor parte de los colegas tan sólo reconocen dificultad en el acopio masivo de los datos, resulta provocador. La maestría pedagógica de Guilbaud muestra cuan equivocadas resultan esas creencias, y pone de manifiesto algo que conviene recordar: en la estadística, como en cualquier otra disciplina, hay que tener en cuenta su grandeza y sus miserias.

George Guilbaud nace el 1914 y tiene la doble fortuna de haber pasado la mayor parte de su vida en Paris y seguir vivo para contarlo [2]. *Normalien* y matemático de formación, comienza a interesarse por la economía al finalizar la guerra mundial, aunque ya antes había enseñado *Estadística* en la Facultad de Derecho de Dijon y «*Pensamiento matemático*» en la Facultad de Letras. Estudia matemáticas con George Darmois [3], de quien adquiere el interés por la estadística. A

[1] Guilbaud, G.Th., *Les problèmes de la statistique*, en Gurvitch, G., Traité de sociologie, PUF, 1958. Traducción: Alejandro Almazán. Departamento de Sociología I (Teoría, Metodología y Cambio Social) UNED.

[2] La revista *Annales des Mines*, en su número 67 de 2002 incluía un dossier sobre el Instituto Henri Poincaré y la gestión, donde aparecía transcrita una entrevista realizada por Bernard COLASSE y Francis PAVÉ en el que Guilbaud hace gala de una gran energía y una admirable vitalidad intelectual.

[3] George DARMOIS, (1888-1960) fue el primer importador de trabajos ingleses sobre investigación operativa (campo que se desarrolla extraordinariamente en Inglaterra durante la II Guerra Mundial) Su tesis trataba sobre los problemas de la relatividad general y el movimiento de los pla-

petición suya, organiza el seminario del Instituto Henri Poincaré [4] sobre «Estrategia y decisión económica» cuyos materiales se publican más tarde en el CNRS bajo el título «*Leçons sur les éléments principaux de la théorie mathématique des jeux*. Es junto con Saltman el fundador de la sociedad francesa de investigación operativa (Recherche Operationnelle) y entre sus múltiples actividades hay que destacar su dedicación a la programación lineal, la aplicación a cuestiones de transporte, compañías petroleras, electricidad, siderugia, stocks de grandes almacenes, etc. [5]. Años más tarde, en 1964, es elegido presidente de la asociación francesa de informática e investigación operativa (AFIRO), puesto que ocupa después de haber dirigido la sociedad francesa de investigación operativa (SOFRO). Difusor del concepto praxeología [6] —reflexión sobre la acción humana independientemente de sus fines—, ha sido testigo del nacimiento del término *ordenador,* inventado por su colega Jacques Pret en la pequeña academia de discusión organizada por IBM, y de la palabra *informática*, lanzada por Philippe Dreyfus en los debates de su asociación, a propósito del *tratamiento de la información*.

Después de una larga actividad vinculada a la aplicación de la matemáticas a las actividades económicas y la ingeniería, además de la guerra naval y submarina [7], en 1956 recibe el encargo de Lucien Fevre de fundar en la Escuela Práctica de Altos Estudios, una dirección de Matemáticas Sociales, lo que significará un vuelco en su actividad intelectual y profesional. A partir de entonces, orienta toda su actividad y conocimientos, hacia los ámbitos de la sociólogía y la psicólogía. Ese mismo año comienza a colaborar con los historiadores Lucien Febvre y Fernand Brodel, y en 1958, crea junto a Marc Barbut [8] un centro de investigación aplicada que terminará convirtiéndose en el *Centre d'Analyse et de Matematiques Sociales* de la Escuela de Altos Estudios en Ciencias Sociales de Paris. Bajo el patrocinio de Claude Levi-Strauss y Charles Morazé, comienza una actividad interdisciplinar que contará con la participación entusiasta de los historiadores de la escuela de los Annales, y que termina convirtiendose en el núcleo duro de la corriente estructuralista [9].

---

netas. Además de profesor de matemáticas interesado por la estadística era jefe de un empresa metalúrgica que había heredado de la familia. Entre sus obras está *Statistique mathematique,* 1928 y *Statistique et applications,* A. Colin, 1934.

[4] El IHP se crea en 1928 con la contribución de las fundaciones americanas para abordar los problemas de la física moderna y contó, al menos desde 1940, con un departamento dirigido por Maurice Frechet dedicado a las aplicaciones matemáticas para la guerra.

[5] De sus preocupaciones por el mundo de la industria todavía saldrán *Statistique des chroniques*, Dunot, Paris, 1968 y *Élements de la théorie mathématique des jeux*, Dunot, 1968.

[6] Toma el término del polaco J.Kotarbinsky.

[7] Como resultado de esta actividad, publica en 1954 *La Cybernetique*, PUF, traducida a numerosas lenguas, entre ellas, el español.

[8] En un pequeño apartamento situado en el corazón de Pigalle. Marc Barbut nace en Paris en 1928 y es, junto a su maestro George Guilbaud, responsable de la formación en el uso y manejo de las tecnicas cuantitativas de investigación social de sucesivas generaciones de investigadores sociales europeos. Recientemente ha sido investido *Doctor Honoris Causa* por la UNED (21/I/2005).

[9] Brodel cita a Guilbaud a propósito de la *larga duración* y las matemáticas sociales.Véase BRODEL, F.: *La Historia y las Ciencias Sociales,* Alianza Editorial, Madrid, 1986, séptima reimpresión.

Los nuevos enfoques de la ciencia social, junto al papel asignado a las matemáticas por el colectivo Bourbaki, confluyen en la Escuela de Altos Estudios en Ciencias Sociales, convirtiendo el instituto de Guilbaud en un auténtico laboratorio de ideas y prácticas de investigación entre las llamadas ciencias duras y las humanidades. El CAMS, *Centre d'Analyse et de Mathematiques Sociales,* se convierte en el cuartel general de una revuelta contra las viejas concepciones de la matemática. El álgebra aplicada a las reglas del parentesco, la combinatoria, las teorías de redes, el análisis matemático de la desigualdad, la modelización y la historia de la ciencia, constituyeron las herramientas de esa agitación. Uno de los productos de ese período interdisciplinar que todavía pervive es el seminario *Histoire de la Statistique et du Calcul de Probabilités,* lugar de encuentro de los profesionales de la estadística, la sociología y la filosofía, por donde transitan desde 1982 los investigadores más relevantes del mundo en este campo.

No resulta fácil encontrar un manual de estadística donde se expliquen los problemas de la inferencia estadística a la luz de la Historia de la probabilidad. Los actuales manuales de estadística —escritos en cualquier lengua— son meras síntesis y malas copias de los primeros manuales redactados por Arthur L. Bowley e G. Udny Yule, con una estructura que arranca de los años veinte del pasado siglo, y que refleja los delicados consensos alcanzados en los inicios de la estadística matemática [10], en un momento en el que la estadística comenzaba ya jugar un papel relevante en la agricultura, la producción industrial y militar, o los servicios públicos. Es la época en la que aparece el manual de Schultz (1927) *Mathematical Economics and the quantitative methods,* el de G. Darmois (1928) *Statistique Mathématique*, o las traducciones y reediciones de los manuales de A. Bowley (1901) y U.Yule (1911), así como el primer manual español [11] que lleva el título de *Metodología estadística. Fundamentos de estadística Matemática* (1924). Aunque la econometría y la física matemática, fueron los principales dominios en los que se desarrolló la estadística, la teoría de muestreo muy pronto se convierte en el nucleo duro de la nueva disciplina, junto a las herramientas de la moderna encuesta estadística que nace en el seno de la investigación social, y en concreto, en las encuestas que Arthur L.Bowley y Jhon Hilton realizaron en Inglaterra para estimar el número de parados [12].

[10] En estos años también hay profundos debates, por ejemplo en la *Revue Philosophique* francesa, Meyerson escribe sobre la noción de causa, Goblot sobre física cuantica y Halbwachs sobre estadística . *Revue Philosophique de la France et de l'Etranger*, XCVI, julio-diciembre,1923, Félix Alcan,Paris.

[11] DE MIGUEL, A.: *Metodología Estadística. Fundamentos de Estadística matemática,* Madrid, 1924. Velarde Fuertes le dedica grandes elogios a pesar de los comentarios que Flores de Lemus escribió en la introducción del manual. AHEPE, (2002) *Historia de la Probabilidad y de la Estadística*. Ias Jornadas de Historia de la Estadística organizadas por la Asociación de Historia de la Estadística y de la Probabilidad de España. Madrid. P.300.

[12] Véase al respecto BOWLEY, A.: «La aplicación del muestreo a los problemas económicos y sociológicos», *Empiria*, n.º 5, 2002. Presentación y traducción de José M. Arribas.

En España, la aproximación a la estadística matemática se produjo en el seno de la renovación general de la matemática impulsada por Rey Pastor [13]. La enseñanza del cálculo de probabilidades que había comenzado en el interior de las academias militares (D. Diego Ollero) y de las escuelas de ingenieros (José Antonio de Artigas) pasó a enseñarse en las facultades de ciencias a partir de 1931, y en concreto, en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid, donde el físico Esteban Terradas comienzó a impartir cursos, y donde Olegario Fernández Baños ganó la primera cátedra de estadística matemática en 1934. Aunque existían tratados anteriores de estadística administrativa y de cálculo de probabilidades (Merino Melchor (1868) [14], Ollero (1879): *Tratado de cálculo des probabilidades*, Gabriel Galan Ruiz (1923): *Cálculo de Probabilidades* [15], estos manuales utilizaban autores clásicos de lengua alemana y francesa y no abordaban las cuestiones relativas a la teoría muestral; el manual de Antonio de Miguel, por el contrario, supuso una verdadera ruptura con los manuales anteriores y puede considerarse el primer manual moderno, de estilo anglosajón [16].

La Guerra de 1936-39 interrumpió el proceso de expansión de la estadística matemática que se había iniciado en España (en 1931, unos meses después de proclamarse la II República, el Instituto Internacional de Estadística celebró en Madrid su congreso número XX) [17] por lo que habrá que esperar hasta 1945 para ver la publicación de un *Tratado de Estadística* como el publicado por Olegario Fernández Baños [18]. En 1959, un año después del artículo de Guilbaud que presentamos a continuación, apareció en España la traducción de un manual que consolidaba definitivamente la configuración de la disciplina, así como la estructura de todos los manuales posteriores: *Introducción a la Estadística Matemática* de G. Udny Yule y M. G. Kendall, traducido por José Ros Jimeno en la editorial Aguilar. Hemos de decir, no obstante, que a pesar de la importancia que

[13] A propósito del programa de renovación matemática de Rey Pastor, Sixto Rios ha señalado que « veinticinco años de trabajo ejemplar fueron suficientes para que el anatema que parecía existir sobre la capacidad del « homo hispanicus » para hacer matemáticas fuese abolido. Se puede afirmar objetivamente que durante los años treinta existe ya una cultura matemática contemporanea con aportaciones originales a nivel europeo. Es por ello que Rey Pastor y sus discipulos directos e indirectos publican trabajos importantes en las principales revistas internacionales *: Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* de Paris, *Acta Matematica, Ergebnisse eines Mathematischen kolloquiums* de Vienne*, Abhandlungen* de Hambourg*, Rendiconti* de Palerme*, Mathemastische Zeitschrift,* etc. Numerosos teoremas y teorías surgidos de estos trabajos pasa a textos de universidades europeas como en los trabajos de Doetch, S. Mandelbrojt, A. Denjoy, W. Hurewizc, Wilder, W. Blaschke, Menger, etc. » Rey Pastor, (1988) *Selecta*, Fundación Banco Exterior.

[14] En 1868 había hecho su discurso de recepción a la academia de ciencias *Sobre la aplicación del cálculo de probabilidades a los acontecimientos humanos*.

[15] Aunque se trata del mismo texto con el que había obtenido el premio de la Academia de Ciencias en 1909.

[16] Utiliza referencias de Bowley et Yule, motivo por el cual Flores de Lemus, tal vez el economista más prestigioso del momento, no lo apreció demasiado.

[17] Véase Arribas, J. M.: «Los comienzos de la estadística matemática», en Santos del Cerro, J, y García Secades, M. (coord.), Asociación de Historia de la Estadística y de la Probabilidad Española (2004), *Historia de la Probabilidad y la Estadística II,* pp. 331-359.

[18] Publicado con alguna dificultad en el Consejo Superior de Investigaciones Científicas.

el manual concedió a la teoría de muestreo y a los criterios técnicos necesarios para la realización de encuestas, en ningún momento alcanzó el rigor, ni la erudición y maestría didáctica del texto de George Guilbaud.

José M. Arribas Macho
Departamento de Sociología I,
UNED

* * *

## LOS PROBLEMAS DE LA ESTADÍSTICA

El intento que se hace en cada época de realizar una síntesis del conjunto de los resultados de una disciplina científica, es siempre provisional. Se oye a menudo a los usuarios de la estadística quejarse de que los instrumentos de análisis que han sido abocados a utilizar fueron forjados por otros: ¿por qué lo que proviene de la biometría o de la economía habría de ser adecuado para la sociología o la psicología? Para la estadística o las matemáticas, así como para bastantes otras disciplinas, no se trata evidentemente de hacer tabla rasa: podríamos hacer un traje cortado a medida, pero ¿el tejido sería el mismo para todos?

No sería razonable que el sociólogo o psicólogo, pretendieran construir el conjunto de elementos de una estadística particular que no tomara nada prestado de las estadísticas ajenas. Todo préstamo es peligroso: se dice que incita a aplicar recetas; y es cierto. Es encomiable denunciar el peligro, pero ¿cuál es el remedio? Hay que comenzar por reconocer la existencia de una ciencia estadística, considerablemente independiente de su objeto —o por decirlo mejor, una estadística general.

Para dar una idea de lo que es esta estadística, a menudo es imprescindible recurrir a la formulación matemática —ésta será aquí evitada al máximo, aunque no sin riesgos— y resulta de gran utilidad el estudio histórico de la evolución de las ideas —aunque se limitará en lo que sigue a una trama definida muy a grosso modo.

Para un excelente estadístico francés del siglo XIX, la situación de la ciencia estadística estaba clara: «la estadística es la ciencia de los hechos sociales» (Moreau de Jonès, 1847, Élements de statistique) ¿Qué es lo que ha pasado entonces desde esta fecha? ¿Acaso la estadística ha renegado de sus orígenes?

El verdadero objeto de la estadística no ha sido nunca la sociedad humana como tal, sino solamente ciertos aspectos, ciertas maneras de aprehender la realidad social. En primer lugar el número —es decir, por una parte la cantidad (o sobre todo la proporción)— y por otra parte lo numeroso. Después, y de forma bien definida, la detección de algunas regularidades —la búsqueda de «leyes». La Mortalidad o la natalidad —desde los orígenes— muestran un «orden» global detrás de las apariencias contingentes. No olvidemos que desde que fue constatada esta regularidad, inspiró tal confianza que no se tardó mucho en hacer de ella la base de una industria (los seguros) «de la misma manera que se aprovecha la fuerza del viento o la corriente de los ríos» (M. Block, 1878).

El nombre de *Estadística* se conserva desde los orígenes de la disciplina (¿pero quién entiende todavía Estado en Estadística?) y también permanece la situación de la estadística en la enseñanza y la investigación: es muy raro que se enseñe la estadística de forma aislada, estadística pura. Encontraremos estadística y economía, estadística y biología, estadística y psicología, de manera que las palabras econometría, biometría, psicometría, a menudo no tienen otra significación. En algunos casos incluso la separación de dos componentes es casi imposible: como en la demografía.

Por otra parte, convendría reconocer que la estadística se ha esforzado en su autonomía: hace 50 años surgió una metodología estadística con una conciencia clara de sus objetivos —con pretensiones universales aunque sin estatus reconocido. Pero no reclamó convenientemente el epíteto de Novum Organum: en ese momento tenía varios nombres.

La elección de la palabra «población» para designar todo conjunto estadístico, apunta a los estudios demográficos de los primeros estadísticos; hoy se estudiará bajo el nombre de población, el conjunto de los automóviles que circulan en un país dado en una fecha concreta, pero también una colonia bacteriana, un lote de tubos electrónicos, las palabras de un vocabulario o los hombres de un grupo. Consideremos que en la jerga estadística la palabra población designa el conjunto que se tiene a la vista y nada más; a diferencia del lenguaje común en el que significa el número de personas. Para designar ese número se dirá preferentemente: «efectivo».

En bastantes ocasiones ese efectivo puede ser considerable, e incluso si se han podido reunir todas las informaciones individuales, su ordenación planteará verdaderos problemas de método.

El motor permanente de toda actividad estadística es efectivamente el siguiente: lo real es siempre demasiado complejo y la descripción exhaustiva impracticable.

Reduzcamos la dificultad mediante la elección de un ejemplo simplificado; sea una población humana bien delimitada; para cada uno de los individuos que la componen nos interesamos en una característica única y concreta —digamos, para fijar las ideas, su edad. Imaginemos que fuera posible un censo exhaustivo: tenemos entonces un registro donde figuran los nombres (o los indicadores de identidad que se quiera, números de orden de registro u otros) y al lado de cada nombre la edad. Para empezar es necesario decir que lo que el estadístico quiere aprehender no es la población propiamente dicha, en tanto que conjunto de individuos, sino el conjunto de las edades. El anonimato es obligado. Se dirá *distribución estadística* para designar esta población de cifras que será nuestra única fuente ¿Qué queda de nuestro registro cuando ocultamos los nombres? Una lista de números. Si la población es grande me hará falta un medio para conocer la distribución de edades, que no sea la lectura de la lista por el orden de registro (que posiblemente no es otro que el alfabético, es decir, algo muy alejado de mis preocupaciones actuales). Ordenar a los individuos por tramos de edad, agruparlos en clases anuales o decenales, supone ya un avance, quiero decir, un medio de no perderse en la diversidad empírica. Mi primer movimiento espontáneo es simplificar el dato, siempre complejo, pero si simplificara demasiado mi exigencia por el rigor acabaría siendo superficial.

El ideal no sería un discurso ordenado como una lista cualquiera —en la que hace falta esperar al final para conocer verdaderamente el contenido— sino ordenado según un orden eficaz y didáctico: de manera que desde las primeras palabras se apreciaran los rasgos generales del objeto descrito; y que persiguiera el perfeccionamiento progresivo de la descripción, de forma que pudiéramos detenernos donde quisiéramos, obteniendo en cada paso la mayor cantidad de conocimiento posible, para el número limitado de informaciones que hubiéramos aceptado considerar.

Son bien conocidos algunos métodos parecidos de descripción progresiva: el juego de los «retratos»*, los cuestionarios destinados a la identificación de las plantas, los procedimientos de diagnóstico en los análisis químicos y muchos otros esquemas taxonómicos proceden de esta lógica común. Se puede decir que, en cierta medida, el estadístico decide actuar según principios análogos, construyendo una serie de clasificaciones encajadas unas en otras, una serie de filtros, o de cribas, cada vez más finas.

Conservemos nuestro ejemplo simple —demasiado simple— de la distribución de edades. Suponiendo que se conoce el efectivo total de la población estudiada, yo daría los efectivos de algunas categorías, muy amplias al principio, por ejemplo: menos de 20 años, entre 20 y 60, más de 60. Este será un primer grado de la clasificación, un primer golpe de vista panorámico, que puedo refinar subdividiendo en grados sucesivos. Aunque somos libres para escoger los cortes entre categorías: se puede pensar entonces en definir las categorías, no por los límites de edad sino por su contenido. Esta forma de proceder puede tener el mérito de adaptarse mejor al objeto de estudio, ya que la criba no está forjada de antemano. En esta segunda perspectiva tendrán lugar informaciones tales como: la mitad de la población tiene menos de 38 años, la otra mitad 38 o más (edad mediana). Después de lo cual se señalarían cuatro fracciones iguales (cuartiles) y así sucesivamente: deciles, percentiles (en general «cuantiles» o bien «fractiles», si no se quiere precisar el fraccionamiento); una técnica muy cómoda de aplicar y muy difundida en la actualidad.

Conservando siempre este estilo de clasificación, se pueden introducir muchas variantes. Indiquemos sólo de pasada algunas direcciones posibles. La información, en este estilo, se compone de tres datos numéricos: un intervalo de la variable estudiada (edad) definido por sus dos fronteras, y su contenido (como fracción del efectivo total). Pero la cuestión se puede plantear de diferentes

* N. T.: Juego que consiste en adivinar la identidad de los personajes a partir de una serie de preguntas sobre los rasgos distintivos que los caracterizan.

maneras: ¿qué contiene el intervalo de 18 a 45 años? ¿Cuál es la edad por debajo de la cual se encuentra un tanto por ciento de la población? (el conjunto de las respuestas constituye la función de partición) o bien: ¿Cuál es el menor intervalo que contiene un porcentaje dado de la población? (el conjunto de respuestas constituye la función de concentración). Quedan por organizar una serie de preguntas de este tipo, o más bien varias series, entre las cuales se elegirán las más oportunas, según la naturaleza de la población estudiada y de la característica que compone la distribución. En principio estos cuestionarios deberán esperar hasta un examen completo de la distribución, de manera que se pueda elegir el grado de precisión requerido para su conocimiento.

A pesar de sus variantes, este primer estilo no agota las posibilidades de descripción progresiva. Hay otra escala bien conocida; la que utiliza las *medias*. No es necesario ser estadístico para comprender lo que se quiere decir —y comprender que se trata de una información acerca de la distribución— cuando se afirma que la edad media es de 34 años. Tampoco hace falta ser notario para darse cuenta de que dos distribuciones muy diferentes pueden presentar la misma media: entonces la información dada por la media es insuficiente, igual que ocurre con la mediana. La media ordinaria puede ser considerada como la primera información de una serie que, como la serie de fractiles, proporcione una descripción progresiva (y, si se quiere, completa) de la distribución. Se trata de la serie de los momentos. No podemos perdernos en detalles técnicos; será suficiente bosquejar la idea general. Sabemos que la media de una característica numérica como la edad, suele venir acompañada de la media de los cuadrados, la media de los cubos o de potencias cualesquiera de esta variable. El procedimiento parece menos natural que el de las categorías, pero como es sabido su empleo está justificado por ciertas comodidades. Citemos de pasada una de ellas. La descripción de una distribución aislada no es el fin último: habría que comparar diversas poblaciones y, más en particular, comparar entre sí las diversas partes de una misma población. Sería suficiente un instante de reflexión para percibir, por ejemplo, que tanto la mediana como los otros fractiles que se recomendaban por la simplicidad de su definición, son difíciles de emplear en las operaciones de división o agregación de poblaciones. Supongamos que se tienen dos poblaciones de las que se conocen las medianas respectivas: si se las reúne para constituir una nueva población, la nueva mediana no es función de las medianas parciales. Por el contrario, la ley de agregación de las medias es simple; la media general es la media de las medias parciales. Esto es una ventaja considerable. Se trata entonces de construir una serie de características numéricas que posean las mismas propiedades respecto a la suma y puedan, partiendo de la media, como primer término, construir una descripción progresiva. Este papel, como se muestra fácilmente, puede ser desempeñado por las medias de $x$, $x^2$, $x^3$, etc., en general, de $x^k$ a la que llamaremos momento de orden $K$. El desarrollo de esta idea conduce a la *función generatriz* de Laplace y a las funciones llamadas *características* en los autores modernos.

La descripción por los momentos es seguramente menos intuitiva que la descripción por los fractiles. Puede ser útil buscar una manera de hacer más sencilla la comprensión de los momentos y dar cuenta de los vínculos que existen entre los dos tipos de estilos descriptivos. Algunos ejemplos bastarán para mostrar esta cuestión. Se trata como siempre de una variable (más arriba era la edad) que denotaremos por $x$, susceptible de tomar diferentes valores, pongamos, para fijar las ideas: $x = 0, 1, 2, \ldots$, etc.

Tenemos una distribución estadística asociada, a cada uno de los valores posibles, un efectivo, el número de individuos que cumplen sea $x = 0$, sea $x = 1$, etc. —o bien una frecuencia, como referencia de los efectivos parciales respecto al efectivo global. Designamos estas frecuencias como $f_0$, $f_1$, $f_2$, etc. Estos números (esencialmente positivos) verifican en primer lugar la igualdad:

$$f_0 + f_1 + f_2 + \text{etc.} = 1$$

Si se conoce la media que llamaremos $M^{(1)}$ se tendrá:

$$f_1 + 2f_2 + 3f_3 + \text{etc.} = M^{(1)}$$

Si se tiene también el dato del segundo momento $M^{(2)}$:

$$f_1 + 4f_2 + 9f_3 + 16f_4 + \text{etc.} = M^{(2)}$$

Se puede entonces dar cuenta de las condiciones que vinculan las frecuencias $f$: éstas no pueden ser cualesquiera. Bien entendido, hay infinidad de distribuciones posibles que tendrían los mismos momentos $M^{(1)}$ y $M^{(2)}$ —pero no obstante, tendrían algo en común, formarían una familia de la que se puede obtener un análisis completo.

Supongamos por ejemplo que sean posibles cuatro valores de $x$: $x = 0, 1, 2$ ó 3 y partamos de la distribución «uniforme» que asigne el 25% de la población a cada valor. Entonces $M^{(1)} = 1{,}5$ y $M^{(2)} = 3{,}4$. Si se examinan todas las distribuciones que tienen los mismos dos momentos, se verá que los valores intermedios $x = 1$ y $x = 2$, suponen juntos la mitad del efectivo, la otra mitad está situada en los extremos ($x = 0$ y $x = 3$). Se verá también que a cada uno de esos valores extremos se debe asignar al menos 1/6 del efectivo total y como máximo 1/3.

Tales ejercicios permiten percibir mejor el alcance de las proposiciones generales que establecen un vínculo entre el conocimiento de los momentos y ciertas particularidades de la partición. Entre las proposiciones, es necesario citar la que establece Bienaymé en 1853 y que fue generalizada por Tchebycheff. Supongamos que se conocen los dos primeros momentos, es decir, la media y la desviación estándar; la regla de Bienaymé permite entonces construir intervalos centrados en la media que contengan con determinada certeza una proporción dada del efectivo. Así, por volver al ejemplo de las edades, si sé que la media es 34 y la desviación estándar es 7, puedo situar dos desviaciones típicas a cada lado de la media, obtener el intervalo 20-48, y afirmar que al menos las tres cuartas partes de la población se encuentran en esa clase central. De esta forma se construye una especie de diccionario que permite traducir al el estilo de las categorías diversas informaciones dadas en el estilo de los momentos.

* * *

Antes de ir más lejos hay que regresar a la noción primitiva de distribución estadística. El ejemplo sumariamente presentado más arriba concernía a una característica numérica simple; a cada individuo se asociaba un número. Pero es de esperar, y no solamente en las ciencias sociales, que nos encontremos con características que no puedan ser reducidas a un número: ya sea porque se trata de una característica cualitativa no mensurable, o porque siendo mensurable requiera de varios números para hacerlo.

En todo caso, se comenzará por designar la variabilidad de las características observadas. El caso más simple será el de un pequeño número de categorías bien definidas: el estado civil, por ejemplo. En este caso la distribución estadística consiste simplemente en proporcionar los efectivos de cada categoría: solteros, casados, viudos, divorciados, y no hay más que decir al respecto. No hay nada aquí que recuerde a las medianas o las medias. Pero puede ser que las categorías sean más numerosas y, lo que a menudo viene unido, peor delimitadas. Podemos pensar en las categorías socio-profesionales de la estadística oficial —o bien en una encuesta de opinión. Posiciones, estatus, actitudes —sociales o no—, no siempre se dejan enumerar fácilmente. Hay que comenzar por analizar esta «variedad». Quizá se pueda establecer una *ordenación*, es decir, dar un sentido a la alocución «situada entre», y colocar las categorías en una serie bien ordenada. En ese caso la mediana y los fractiles obtienen una significación —pero no así la media ni ningún otro momento (a menos que la *ordenación* sea transformada en escala de medida, lo que puede ser imposible) [19].

Pero cuando es radicalmente imposible establecer un orden, puede que exista al menos una configuración más o menos evidente. Se tratarán de probar agrupamientos parciales: si parece imposible reunir en una sola clase A, B, C, sin añadir D, esto puede ser interpretado como una indicación de situación relativa sobre la que se podría enumerar una «gama» de categorías. En otras palabras, es precisamente el estudio de los cortes posibles el que deberá arrojar luz sobre la topología del sistema. Un caso interesante es aquel en el que la configuración espacial deseada viene dada de una vez: como un esquema figurativo (una parrilla, una rejilla, un árbol genealógico, etc.) o bien como una realidad geográfica. En este último caso la descripción por clases no es otra que la descripción por regiones, y posee el interés de permitir, entre otras cosas, la búsqueda de las regiones que se encuentren por debajo de tal porcentaje del efectivo total.

Por otra parte, el caso geográfico no está alejado de aquellos en que se trabaja con una característica mensurable pero compleja, es decir, que requiere ser re-

[19] La presencia de cotas numéricas no es condición suficiente: no se pueden tratar los números de orden como los números naturales sometidos a las reglas de la adicción y la multiplicación, sin tomar ciertas precauciones.

presentada por varios números. No se puede obviar fácilmente esta complejidad: supongamos que una encuesta sobre presupuestos familiares haya permitido caracterizar cada hogar de una población por su gasto y su presupuesto. En lugar de tratar por separado las dos distribuciones, se deberá en primer lugar estudiar su asociación. Para esto la representación gráfica proporciona una gran ayuda: un punto en el plano, definido por sus coordenadas, representa cada unidad de nuestra población. Los dos estilos descritos más arriba están aquí permitidos, ya sea designando el corte de las clases (encajadas o disjuntas) o evaluando su contenido, o bien calculando las medias y los diversos momentos (dos medias, dos desviaciones típicas, el primer coeficiente de correlación…). En todo caso, está claro que los instrumentos ya definidos —función de repartición, función de concentración, función característica— serán más difíciles de manejar.

Cualesquiera que sean las dificultades específicas que se encuentren, vemos cómo se constituyen diferentes modalidades de empleo de la noción extremadamente general de distribución estadística y de sus descripciones progresivas. Es en esta lógica —o esta gramática, si se prefiere— en lo que consiste la estadística descriptiva. Resulta frecuente que se presente esta parte de la técnica estadística, aparentemente más simple, como un primer capítulo. Esto no está mal, pero conviene señalar que este primer capítulo no puede, de ninguna manera, construir sus desarrollos de forma autónoma.

Este es un punto importante —a veces ignorado y no sin graves perjuicios— que conviene explicar.

* * *

Hemos intentado en las páginas precedentes, situar muy sumariamente, algunos de los sistemas usuales de «filtros» que permiten aprehender las distribuciones estadísticas de forma progresiva. Esta progresión ha sido organizada, según se ha dicho, para permitir la parada en el proceso: si la descripción pudiera ir tan lejos como quisiéramos —aunque de hecho no va a poderse llegar a ese punto. Cuántas veces no se llegará sino a conformarse con las medianas y los deciles, o incluso simplemente con establecer una región del 95% —o bien con la media y el segundo momento (bajo la forma de varianza o desviación estándar)— es decir, de una forma general, las primeras informaciones solamente.

Debemos entonces reivindicar el derecho a emplear descripciones incompletas —precisamente en vista de las cuales han sido puestas a punto algunas técnicas— puede que debamos contentarnos con dibujar las «grandes líneas» y renunciar a los «detalles». Es entonces cuando se aprecia la importancia de una estadística descriptiva bien hecha, y que no siempre es fácil: aprender a distinguir los detalles de lo esencial, o más precisamente, a jerarquizar los detalles de desigual importancia ¿Deberíamos limitarnos a los consejos del sentido común y confiar en los diversos especialistas en cada campo? Ha ocurrido a veces en el pasado y ocurre todavía hoy, que el Tratado de Estadística se encasilla en esa posición prudente que indica las reglas formales del cálculo sin creerse autorizado a hablar de su empleo. Se enseña a calcular correctamente las medias (incluso las desviaciones estándar y los coeficientes de correlación) ignorando que la primera tentación de quien se va a enfrentar a los resultados en bruto de la investigación será contentarse con reducir los datos empíricos a esta media, a esta desviación estándar, a ese coeficiente —y la segunda tentación será rechazarlo todo por demasiado simplista.

¿Qué es lo que no se ha dicho ya sobre las deficiencias de la media? (¿Porqué la mediana ha sido menos maltratada?) ¿Qué réplica no se ha sabido hacer sobre sus virtudes? Este es uno de los empeños —y no de los menores— de la estadística, explicar en qué cuadro de hipótesis tal o cual reducción de la observación empírica es legitima o no.

Es ya una tradición recordar el caso, muy especial, del astrónomo o el físico que habiendo realizado mediciones —de la declinación de una estrella o de la temperatura o el magnetismo terrestre— encuentra natural hacer la media de todas las medidas efectuadas y declarar que, el único número así obtenido, representa el resultado del conjunto de sus experimentos. Pero en semejante materia se supone: 1.º La existencia de un valor *verdadero* de la magnitud a medir; 2.º La presencia inevitable de elementos perturbadores y variables que deforman ese valor verdadero; 3.º La construcción de un modelo teórico que explique los mecanismos de esos errores de medida; 4.º Algunas razones para encomiar la estimación del verdadero valor por el ministerio de la media.

La teoría (estadística) de los errores de observación se ha construido a partir de instituciones inmediatas: valor central, valor más probable, compensación de las diferencias, etc. Pero ha necesitado también largas construcciones matemáticas. Citemos a uno de los fundadores de la doctrina, Laplace: «los fenómenos de la naturaleza están, la mayor parte de las veces, rodeados de tantas circunstancias extrañas, de tal número de causas perturbadoras mezclando su influencia, que es muy difícil reconocerlas. No se podrá lograr sino multiplicando las observaciones o los experimentos, con el fin de que los efectos extraños vengan a compensarse recíprocamente, los *resultados medios* ponen en evidencia estos fenómenos y sus diversos elementos» —vemos aquí tanto el nivel del sentido común como las exigencias del cálculo: «Por la teoría de la probabilidad se determina que los resultados medios son los más ventajosos o los que dan el menor error. Pero esto no es suficiente; es necesario, además, indicar la probabilidad de que los errores de esos resultados estén comprendidos en unos límites dados; sin esto no tendríamos más que un conocimiento imperfecto del grado de exactitud obtenido. Las fórmulas apropiadas para estos objetos suponen entonces un verdadero perfeccionamiento del método de las ciencias… el análisis que requieren es el más delicado y más difícil de la teoría de las probabilidades…» (Laplace, Introducción a la teoría de las probabilidades, Paris, 1814).

Sin entrar aquí en detalles, conviene hacer notar que, incluso en el caso de que una simple media de medidas baste para hacer una estimación, no se presentará nunca esta estimación como verdadero valor. Se sabe que ese valor existe —y se sabe que es inaccesible. Pero si hay que dar una cifra, se presentará la menos imprudente, la más ventajosa, «la que tenga menor error de estimación» —asociándola, como recomienda Laplace, a un margen de incertidumbre.

El resumen de la serie de observaciones comportará no sólo un número, sino dos —en ciertos casos sencillos éstos serán la media y la varianza— el primero como la mejor estimación posible, el segundo como indicador de la amplitud a considerar para el error inevitable. Por otra parte, finalmente —y gracias al propio Laplace[20]— se constituye un método de análisis esencialmente *estadístico* de los resultados de experimentos.

Conviene, no obstante —cualquiera que sea la belleza y la fuerza de esta construcción— no perder de vista el problema planteado: las medidas de nuestro astrónomo apuntaban a una realidad bien definida, ya que existía un valor verdadero (al menos este es el postulado). Se puede establecer una comparación: si encontramos marcas de proyectiles sobre un muro ¿se supone que alguien se ha estado ejercitando tirando al blanco, o bien que era el propio blanco? Pero sería muy diferente si se tratara de un blanco móvil, o más aún, si no hubiera habido ningún blanco.

Pero si es natural tomar la media de múltiples medidas, hechas en condiciones homogéneas y con resultados muy próximos los unos a los otros, para representar al conjunto, no es menos evidente que la edad media, o el salario medio de una población, no se justifican del todo de la misma manera, no pudiendo, evidentemente, tener una significación del mismo orden: edad «verdadera», salario «verdadero» —no significan nada.

Todavía es necesario volver a Laplace: se determina, dice, el resultado medio más ventajoso, el que da un menor margen de error. No se trata de determinar el valor verdadero, se trata de una apuesta ¿No es algo sin sentido aparente que la lógica del juicio de lo probable y la lógica del juego, sean limítrofes? Pero para aclarar la conducta de nuestro astrónomo nos falta, como para guiar a un jugador en sus astucias[21], un «modelo» construido según los principios de la teoría de las probabilidades. En el caso de los errores de observación, Laplace nos propone el célebre, demasiado célebre, modelo que distribuye las probabilidades de obtener diferentes valores según una exponencial del cuadrado de las diferencias. Forma bastante sutil que había entrevisto Moivre, y a la cual la opinión pública, de ordinario injusta, asignará el nombre de Gauss[22].

Sin detenernos en la forma particular de esta ley, retengamos solamente que se trata de una ley fuerte y precisa. Ley de los errores, se la ha llamado alguna vez, pero en realidad es la ley de probabilidad de los errores, susceptible de

[20] Desde las primeras memorias de 1774, encontramos planteado el problema: determinar el *término medio* que se debe tomar entre las diversas observaciones dadas de un mismo fenómeno.

[21] Martingales en el original: hace referencia a las astucias del jugador en un lance del juego del monte, que consiste en apuntar simultáneamente a tres de las cartas del albur y el gallo contra las restantes.

[22] Dejemos por el momento la impunidad, la torpeza de quien concibió la supresión del nombre propio para decir, no ya Ley de Gauss, ni siquiera de Laplace, sino «ley normal». Canonización que hizo bastantes estragos y que no ha dejado de hacerlos hasta el momento de escribir estas líneas.

verificaciones experimentales (intentadas por primera vez en 1838 por el astrónomo Bessel). Para saber si un dado es «justo», es decir, para verificar que el as tiene una probabilidad sobre seis, ni más ni menos, se tirará el dado muchas veces seguidas y se hará la estadística de los puntos obtenidos; incluso aquí, se debe prever una cierta conformidad (aunque no rigurosa) entre la ley de probabilidad de los errores y la lectura estadística de las diferencias, es decir, la forma de la población de las medidas en definitiva. No se trata sólo de un histograma que tenga vagamente la forma de una «campana», sino una conformidad analítica que habrá que precisar.

Vemos surgir así una convergencia entre la estadística y la teoría de los errores (convergencia entrevista por Laplace, desarrollada por Cournot y Poisson y apenas concluida al final del siglo XIX).

Cada medida es una unidad estadística, un individuo —su conjunto constituye una población. La distribución de las medidas no es cualquier cosa: no está ya sometida a una «ley» como la de Kepler, que impone una forma a las órbitas planetarias. La mejor forma de representar las cosas es la extracción al azar: la población de las observaciones debe ser considerada como una muestra de la población más vasta de las observaciones *posibles*. La clave de todo este sistema es ver lo real como la extracción de una muestra aleatoria del seno de lo posible: se van a confrontar las estadísticas de lo real (obtenidas de los listados, las investigaciones, los censos, etc.), con la estadística de lo posible (a la que llamamos Cálculo de Probabilidades).

Al mismo tiempo, la propia noción de error y su correlativa del valor verdadero ya no son necesarias. Cada medida realizada es una extracción o al menos es análoga a lo que entendemos por ello, aunque, a la inversa de lo que sucede en las loterías, los diferentes números no son igualmente probables ya que la población de las bolas en el bombo tiene una cierta estructura; por ejemplo, hay una concentración alrededor de un valor «central» o «típico» (aunque en definitiva no es más «verdadero» que cualquier otro).

Tenemos entonces la primera idea del modelo probabilista: las características de una población sometida a observación están ligadas a las de una población ideal o población-madre, de la que la población empírica es una «consecuencia». Las primeras formas de este esquema que nos vienen a la mente recuerdan muy directamente a la lotería, o —según en vocabulario tradicional— a la *urna* y sus bolas. Antes del momento en que se intentara representar el mecanismo de los errores de observación como juego de azar (en astronomía en primer lugar), este tipo de explicación había penetrado ya en el estudio científico de los fenómenos humanos ¿Acaso la metáfora de la urna es demasiado simple? El mismo Laplace llama la atención sobre este punto: «He visto hombres que deseaban ardorosamente tener un hijo y veían con pena el nacimiento de varones en el mes en que ellos iban a ser padres. Imaginaban que la razón entre los nacimientos de varones y mujeres debería ser el mismo al final de cada mes, estimaban que los varones ya nacidos hacían más probables los próximos nacimientos de niñas. Así, la extracción de una bola blanca en una urna que encierra un número limitado de bolas blancas y negras en una proporción dada, aumenta la probabilidad de sacar una bola negra la vez siguiente. Pero esto deja de ocurrir cuando el número de bolas en la urna es ilimitado, como debe suponerse para poder asimilar este caso al de los nacimientos». ¿Pero qué es entonces esta «urna» infinita? A decir verdad la imagen de la urna y las bolas, adoptada desde un loable espíritu didáctico, es de aquellas sobre las que cabe preguntarse si no han hecho más mal que bien ¿El «modelo» tiene que ser necesariamente un objeto que se pueda tocar y manipular? Lo que se quiere es describir un *proceso aleatorio* adecuado —y no encargar la construcción de un ingenio mecánico a un artesano. La idea misma de proceso aleatorio ha invertido mucho tiempo en librarse del museo de los accesorios, y hoy está suficientemente claro como para que se abandonen, cuando sea necesario.

Examinemos más de cerca la ventaja que se obtiene cuando se quieren representar los datos de una investigación estadística como resultados de un proceso aleatorio. Será suficiente con evocar el esquema más simple, designado normalmente bajo el nombre de Bernoulli, una serie de pruebas repetidas, independientes unas de otras y con probabilidades fijas. En cada prueba, un cierto evento puede realizarse o no, siendo $p$ la probabilidad de ocurrencia. Se efectúan $N$ pruebas y se designa por $n$ el número de éxitos. La frecuencia (la proporción de éxitos respecto al número de pruebas $n/N = f$) no puede ser predicha de forma cierta. Mejor dicho: todos los valores de $f$ son *posibles*. Pero son desigualmente probables, y se puede mostrar mediante el cálculo que los valores que difieren bastante de $p$ son muy poco probables (tanto menos cuando $N$ sea mayor —precisar este enunciado es establecer con Jacques Bernoulli la primera «ley de los grandes números» conocida).

Supongamos ahora que se efectúan numerosas series de $N$ pruebas. A cada una de esas series se asocia una frecuencia $f$ y para una población, en el sentido estadístico del término, una distribución estadística para las $f$ ¿Qué se puede decir de esta distribución? Conviene en este punto no abusar de una «ley de los grandes números» imaginada vagamente. Es necesario afirmar en primer lugar —como antes para una $f$ única— que todas las distribuciones de $f$ son a priori posibles. Pero habrá que añadir que las diferentes formas son desigualmente probables.

Se ha obtenido de esta manera un modelo que pueden proporcionarnos las distribuciones estadísticas; todas las distribuciones así construidas tienen algo en común —una «ley»— pero esa ley no se expresa como la conformidad a un arquetipo. Una vez introducida la aleatoriedad en el origen del modelo, permanecerá siempre presente. Y esta misma aleatoriedad nos proporciona la flexibilidad que necesitábamos, para servirnos de ella. Pero nos queda saber dirigir apropiadamente una verificación experimental.

Ya hemos tenido la ocasión de señalar que los primeros intentos de la ciencia estadística se desarrollaron con ocasión de los estudios sobre los fenómenos demográficos. Hacia 1770, Buffon registra la proporción entre sexos en los nacimientos en las parroquias de los alrededores de Montbard. Esta proporción no es verdaderamente fija, varía de una parroquia a otra ¿Se puede encontrar una característica común a pesar de la diversidad? Podemos sumar todos los resultados en conjunto para calcular la tasa «media» de masculinidad. Evidentemente, es en el esquema de Bernoulli en lo que pensaron los estadísticos del siglo XVIII, aunque no sin algunas tentativas. Retomemos las notaciones precedentes: $N$ será en número de nacimientos en un determinado lugar y por un cierto período, $n$ el número de varones, $f$ la proporción $n/N$. Pero ¿cómo elegir $p$, parámetro fundamental del modelo, esto es, la probabilidad de un nacimiento masculino? Se trata del problema de la estimación de los parámetros que se remonta a Bayes (probabilidad de las causas, 1765). Segmentemos la dificultad y procedamos en dos etapas.

Supongamos en primer lugar que tengamos una idea a priori sobre esta probabilidad. ¿Por qué no $p = {}^1/_2$ por ejemplo? Es una teoría: hay que verificarla. Se va entonces a proceder a la enumeración de los $f$. Cualquiera que sea este valor es, por construcción, posible; pero más o menos probable. Y se entiende que si lo que se ha constatado es muy improbable respecto a la teoría, la teoría estará equivocada. Como refiere Diderot del Abad Galiani: si el lanzador obtiene cinco veces seguidas el trío de seises, es necesario concluir que los dados están cargados. La introducción de forma regular de este procedimiento de decisión conduce a la construcción de lo que a veces se llama «test de hipótesis» y que son verdaderos «criterios estadísticos». Se trata de calificar de verosímil o inverosímil una hipótesis presentada, que será en consecuencia aceptada o rechazada. Si la hipótesis es rechazada, deberá ser modificada, pero de forma progresiva. Y se pueden incluso construir los criterios que puedan ayudar. Por ejemplo, se podrá examinar la hipótesis: ¿la probabilidad de un nacimiento masculino (cuya existencia postulamos) puede ser la misma en el país A que en el país B? Esta hipótesis no es incompatible con la observación de dos frecuencias diferentes $f_A$ y $f_B$ —pero resulta poco verosímil si la diferencia entre ambas es grande. Tales exámenes, surgidos evidentemente de procedimientos codificados, podrían llamarse criterios (o test) de homogeneidad. De esta manera comparando los registros de bautismos en Londres y en Paris, Laplace concluye (mediante un cálculo un poco diferente de nuestros test, pero análogos en su espíritu): «Se puede apostar trescientos mil contra uno a que en Londres la posibilidad de bautizos de varones es mayor que en Paris. Y esta probabilidad se aproxima de tal manera a la certidumbre que da pié a la investigación de las causas de tal superioridad». Esta conclusión, debe ser subrayada: el juicio no es sino una invitación a la investigación. Señalemos, de paso, que Laplace se orienta hacia una explicación sociológica, y no biológica.

Finalmente llegamos a la estimación propiamente dicha. Se ha construido un mecanismo aleatorio, establecido según un parámetro (aquí $p$) y capaz de producir una distribución (en nuestro caso de la variable $f$). De la misma manera que $p$ no «determina» la distribución observable, es imposible obtener, hablando en sentido estricto, una determinación exacta del valor del parámetro $p$ —sino que se llega a la elección de $p$, de forma relativa, mediante juicios de probabilidad. En ciertos problemas (que no es necesario precisar aquí) se puede dar un sentido preciso a la expresión: *maximun de verosimilitud*. Pero conviene destacar también la importante noción de *resumen exhaustivo*. La observación que se ha hecho debe ser una de las posibilidades de realización ofrecidas por el modelo y esta posibilidad para la elección del valor del parámetro $p$, está dotada de una probabilidad. Se puede muy bien concebir que varios resultados tengan la misma probabilidad, cualquiera que sea la elección de $p$. Resultará que el conocimiento completo de la observación no es necesario, y que se sabe todo lo que se tiene que saber cuando se dispone simplemente de algunas características de la distribución observada. Así, por limitarnos a un caso simple, si se han observado diferentes pruebas en las que se cumple o no un cierto evento, el numero de éxitos bastará para guiar la elección de la probabilidad desconocida.

Aquí surge un vínculo muy profundo entre la teoría de la estimación y la estadística descriptiva. La media, por ejemplo, resultará un procedimiento justificado, si resume verdaderamente y de forma completa aquello que se debe conocer de la observación para poder elegir los parámetros del modelo. Puede darse así un sentido preciso a la técnica espontáneamente adoptada por los usuarios: pero es necesario, como se ve, un cuadro de hipótesis, es decir, un modelo.

A la vista de una distribución estadística hay que preguntarse en efecto —para emplear un lenguaje usual e impreciso— si tal o cual particularidad de la distribución «no será simplemente debida al azar». Para dar un sentido inequívoco a una cuestión semejante es necesario especificar cómo se representa ese «azar». Una vez hecha esta declaración, se comprende el análisis que diferencia lo contingente, lo no significativo (bajo la forma de lo aleatorio), para no conservar más que lo esencial. En última instancia esta es una posible respuesta a la pregunta: ¿cómo hacer una descripción sin sumergirse en los detalles? Y como se recordaba al principio, es la cuestión clave de toda estadística.

Pero queda por determinar ese «azar» que sirve para distinguir entre lo importante y lo que no lo es. Abordamos aquí un campo fundamental de la estadística, la cual no puede prescindir del «azar» ¿Pero qué azar? En los inicios, los juegos proporcionaban el material necesario: en primer lugar los dados que daban 6, 36, …probabilidades iguales, después la lotería, es decir, la famosa urna llena de bolas coloreadas en proporciones variables. Bien entendido que la composición de esa urna, que basta imaginar para hacer los cálculos, debe permanecer constante: o como se dice, es necesario reponer la bola en la urna después de cada extracción. La comodidad de este modelo ha sido causa de algunos prejuicios: algunos han podido creer que este era el modelo ideal, el mejor de todos los modelos. Está claro que estas falsas ideas no las encontraremos en Pascal, Bernoulli, Laplace o Cournot —¿Pero quién aprende estadística leyendo a los clásicos en nuestros días?

Detengámonos un momento en estos prejuicios. La idea de un azar «puro» —y por tanto la de un azar más puro que otro— y la idea de un fenómeno «perfectamente aleatorio» fueron ideas-fuerza, pero no ideas claras. Es interesante encontrarnos aquí y allá con los testimonios de esa dificultad. Veamos en

S. F. Lacroix (1816): «mientras que las diferentes suertes de un juego son rigurosamente de igual probabilidad, tanto por la construcción de los instrumentos aleatorios como por la manera de servirse de ellos, los eventos pasados no podrían tener ninguna influencia sobre los futuros». Y veamos en J. Beltrand (1889): «supongamos diez millones de electores. Atribuyamos seis millones de votos a un partido y cuatro solamente a la minoría. Se forman mil colegios de diez mil electores cada uno: todo candidato que reúna más de cinco mil sufragios será elegido. La opinión mantenida por las cuatro décimas partes de los votantes estaría representada proporcionalmente por cuatrocientos diputados. Las leyes de azar no concuerdan en absoluto: sobre mil representantes, ni uno sólo. El cálculo reduce a cero, por así decir, la verosimilitud de una hipótesis diferente. Supongamos… que un jugador se comprometiera a pagar tantos millones como diputados encontrara de la minoría… No se podría (es la respuesta rigurosa, si no aceptable) ofrecer equitativamente más de un céntimo. Ese céntimo podría costarle caro. Minorías, incluso bastante menores, obtendrían algún representante. Los electores no están asociados a la suerte, las influencias locales triunfan sobre las leyes del azar…» Hoy ya no se da un sentido tan restrictivo a las palabras «azar» y «leyes del azar». Pero la construcción de Beltrand debe ser resaltada «es necesario, con gran desafío, siguiendo las huellas de Condorcet, iluminar las ciencias morales con la llama del álgebra». Es así como ocurren las cosas a menudo: se comienza por levantar barreras: «he aquí el único y verdadero azar»: después de lo cual es fácil renunciar a todo esfuerzo de conquista: «este azar (así definido, es decir, delimitado) no sirve para nada en tal dominio» —¡por ejemplo en las ciencias humanas!

Pero continuemos nuestra lectura de J. Beltrand: «bastantes jugadores, preocupados por la necesaria *regularidad* de las *medias*, buscan en las partidas precedentes a la que ellos juegan una indicación y un consejo… ilusión que reposa sobre un sofisma; se afirma la ley de Bernoullí como cierta cuando no es más que probable. Sobre veinte mil tiradas a la ruleta, el negro no puede salir más de diez mil quinientas veces —si de las diez mil primeras partidas ha salido seis mil veces negro, las diez mil restantes han contraído una deuda con el rojo. *Se le concede demasiado honor a la ruleta, que no tiene ni conciencia ni memoria»*.

El cálculo de probabilidades (y la estadística) deberían entonces acotarse así: no estudiar nunca lo que no tiene ni conciencia ni memoria. Pero la frase, bella y llamada al éxito, había sido desmentida antes de haber sido escrita. ¿Consciencia? Cuando Montmort y Bernoulli se preguntaban cómo aconsejar al jugador de «Hère» (ancestro de nuestro Bacará) —Cuando el propio Beltrand se pregunta si hay que apostar al cinco en el Bacará— ¿de qué se trata entonces? Las primeras investigaciones sobre el juego o la reflexión sobre las habilidades de los jugadores están mezcladas en el azar «puro» ¿Memoria? Las partidas de Pascal y Fermat están ya en un tiempo irreversible o dependen de lo que fue? ¿No es esto el humilde comienzo del análisis secuencial moderno?

La segunda mitad del siglo XIX se aventuró en una vía demasiado estrecha reservando el cálculo de probabilidades a los procedimientos más ciegos de la producción del azar. Esto fue un mérito de H. Poincaré y de A.A. Markoff retomando una vieja tradición, un momento interrumpido[23].

«Barajar» las cartas, dice Littre, es «mezclarlas *con el fin* de que sólo el azar presida su distribución». Esto es definir un procedimiento por las intenciones ¿Pero estos gestos tradicionales cumplen correctamente su fin? Por qué cuando se ha barajado de forma continuada admitimos que las posibles ordenaciones son igualmente probables y que el rey de diamantes tiene la misma posibilidad de estar aquí o allí? Nada es menos evidente, nos recuerda Poincaré, ya que el punto de partida, la disposición de las cartas antes de barajar es el resultado de las peripecias de la partida anterior —y se pretende realmente borrar toda huella de lo que haya ocurrido en la primera mano. Se trata, por hablar como Bertrand, de abolir toda memoria. Entonces cada uno de los gestos elementales en los que consiste el barajado usual no está desprovisto de memoria: consiste en realizar una serie de permutaciones, es decir, pasar de una ordenación a otra. Pero un solo gesto no puede transformar un orden dado en no importa qué otro: tal vez porque la confianza que se tiene en la eficacia del barajado es proporcional a la duración de las manipulaciones; si fuera demasiado breve no valdría. Dos estados sucesivos del mazo de cartas no son independientes el uno del otro si están suficientemente próximos. ¿Qué hace que la dependencia disminuya cuando la distancia aumenta?

Para Poincaré este problema debería servir para aclarar otros fenómenos físicos: la mezcla de los líquidos o los gases, por ejemplo. Tomemos aún una metáfora más; la del recorrido al azar en una red de calles. Supongamos que en cada cruce echo a suertes la dirección que he de seguir. Este azar no impide completamente el encadenamiento: cualquiera que conociera únicamente mi punto de partida no se encontraría en la ignorancia o la indiferencia total, para conocer mi situación actual. Sin embargo, el conocimiento de la posición inicial da una información más fiable a medida que mi excursión prosigue. Es esta idea vaga la que tratamos de precisar mediante los cálculos. El cálculo proporciona los resultados que no resultaban fáciles de prever: así, si la red de calles es regular, cada cruce presenta cuatro direcciones, se puede apostar que el viandante pasará por tal cruce designado de antemano, cualquiera que sea el punto de partida; sólo hay que esperar. La sabiduría popular ya decía: todos los caminos conducen a Roma —sin precisar la duración del peregrinaje ¿Pero habría sido capaz de prever que la apuesta dejaría de ser recomendable en otras redes? Si se toma una red regular, pero situada en el espacio (cada cruce tendría seis direcciones), ya no sería del todo cierto, ni aún cercano a la certeza, que se debiera pasar a la larga por tal sitio designado de antemano.

«Recorrido al azar» puede ser una designación metafórica. Si se quiere hablar en lenguaje abstracto, imaginaremos, con Markoff (1907), una serie de es-

[23] El propio J. Bertrand es consciente en su capítulo «Las leyes de la estadística», y escribe: «todas las formas de consultar el azar no son equivalentes; sin querer cuestionarlo, se ha mostrado con frecuencia muy poco riguroso en la elección que hay que hacer entre ellas».

tados posibles (las diferentes ordenaciones del mazo de cartas, los diferentes cruces de la red de calles). El paso de un estado a otro es aleatorio —y el azar estará definido no por la probabilidad de *estar* en tal estado, sino la probabilidad de pasar de un estado a otro. Una de las aplicaciones propuestas por Markoff merece un poco de atención: se trata del empleo de la estadística en la descripción de una lengua. Se ha constatado después de mucho tiempo que las frecuencias de las letras en un texto escrito son bastante estables —sin que sean rigurosamente constantes. Esta constatación había sido utilizada a menudo para ayudar a descifrar los mensajes transmitidos por medio de una escritura secreta ¿Se puede representar esta estabilidad (y sus fluctuaciones) mediante un modelo probabilístico? Una urna que contuviera las letras según proporciones dadas es un modelo grosero. Markoff propone vincular la probabilidad de aparición de una letra a la naturaleza de la letra precedente. Tomando, por ejemplo, un texto de Pushkin (Eugenio Onegin) Muestra que la relación entre vocales y consonantes es casi constante, no obstante es imposible representar las fluctuaciones alrededor de esa media como resultado del «simple azar» que proporciona la urna de Bernoulli —por el contrario si se imaginan dos urnas una de las cuales servirá para extraer la letra que sucederá entre las vocales y otra para las consonantes el modelo será más satisfactorio.

Con las investigaciones de Markoff y de Poincaré, se inició y desarrolló un estudio sistemático de los procesos aleatorios en los que el azar juega su papel fundamental sin exigir a cada instante hacer tabla rasa de todo el pasado del fenómeno. Los eventos sucesivos son aleatorios, aunque mutuamente «encadenados».

El tratamiento sistemático de las probabilidades «en cadena» permitía enriquecer de forma prodigiosa el arsenal de modelos, hasta ese momento exclusivamente tributario del material del casino.

El desarrollo de las ideas teóricas y de los esquemas probabilistas abstractos va evidentemente a la par con el de las aplicaciones en los diversos dominios científicos. Bajo el nombre de Mecánica estadística, se construyeron diversas síntesis que prolongaban las primeras investigaciones sobre los gases y daban un nuevo fundamento a la termodinámica clásica. Las ciencias de la naturaleza comenzarían también a plantear problemas de la misma índole: está claro que la presencia de un encadenamiento es esencial para el estudio cuantitativo de las poblaciones humanas o animales. Diversos modelos de procesos aleatorios fueron creados, en efecto, por la demanda directa de la demografía (mortalidad, natalidad, migraciones, epidemias, etc.).

Pero es en el estudio de los fenómenos sociales donde más a menudo se ha señalado la inadecuación de las hipótesis de independencia —podemos ver aquí un campo abonado para el empleo de procesos aleatorios menos sumarios que el de la urna de Bernoulli. Este era, por otra parte el convencimiento de los estadísticos de finales del siglo XIX. Por ejemplo, las tentativas de W. Lexis (hacia 1880) —hoy un poco olvidadas en los manuales, en beneficio de los trabajos posteriores de K. Pearson— para estudiar las formas de la dispersión en los fenómenos sociales, se inscriben en esta línea. Más tarde la investigación teórica en estadística ha estado, con más frecuencia, al servicio de la biología, mientras que las exigencias propias de la sociología apenas han sido tomadas en consideración; subdesarrollo análogo al percibido en el ámbito de la estadística económica.

La reducción del azar a ciertos esquemas privilegiados, considerados como los únicos que proporcionaban el «verdadero» azar, como los únicos que representaban lo aleatorio en estado «puro», ha jugado, después de un siglo, un rol bastante más importante de lo que se cree. Las formas de consultar la suerte son diversas y pueden llevar a resultados extremadamente variados; casi se siente vergüenza de enunciar semejante banalidad, pero: han permitido enunciar las «leyes del azar», que no consisten sino en poner de forma rigurosa (especificando las hipótesis necesarias) la creencia común en una regularización a la larga, de una compensación de las diferencias o los errores. No sorprende demasiado entonces que el azar fuera definido de forma tan estrecha.

La historia de las investigaciones estadísticas sobre las desigualdades económicas y sociales proporcionaría varios ejemplos de estas visiones demasiado cortas. Las personas y los grupos son desiguales: cabría preguntarse como Rousseau qué parte de la desigualdad es «natural» y que parte se debe a la acción humana. Se puede pretender con Lassalle que la desigualdad en la riqueza se debe al azar de la vida social. Pero se plantea un problema: ¿cuál es el rol del azar? Mientras que Pareto (1896), para combatir las tesis lassallianas, busca saber si el azar explica o no las desigualdades de la renta —para él y sus contemporáneos esto significaba solamente: determinar si se pueden asimilar las distribuciones estadísticas, fiscales o de otro tipo, a la ley conocida de los errores, a saber, la ley de Gauss.

Es cierto que la incipiente biometría había constatado que esta prestigiosa ley representaba convenientemente ciertas desigualdades físicas: las tallas o los pesos de un grupo humano homogéneo dibujaban, en efecto, bastante bien la famosa curva ¿Era este motivo suficiente para establecer una equivalencia? Pareto debe concluir con la negativa: las rentas no se distribuyen estadísticamente según la llamada «ley normal». Pero va más allá: mostrando que las distribuciones de las rentas tienen una forma definida, suficientemente estable en las diferentes épocas y en las sociedades más diversas, y propone una formulación analítica. Más tarde esta fórmula llamaría la atención por su extraña universalidad: la distribución de las poblaciones de las ciudades, la concentración industrial, diversas estadísticas geográficas, lingüísticas, etc., presentaban las mismas características que las estadísticas originalmente compiladas por Pareto. No se podía pensar entonces, que se trataba de una ley tan general y formal como la de Laplace y Gauss.

¿Pero de dónde viene entonces el privilegio de esta última? La justificación que más a menudo se ha invocado a favor de la ley normal es el que resulta de sus propiedades establecidas por Laplace (1812), generalizadas por Liapounoff (1901) y algunos otros: se trata de la distribución de una suma en el que cada sumando es aleatorio. Mediante algunas hipótesis sobre estos elementos se establece que la ley de probabilidad de la suma está cerca de ser gaussiana, cuando el número de elementos es muy grande. La aplicación es evidente: un error de medida puede ser considerado como la suma de un gran número de errores parciales, independientes unos de otros, todos esos errores parciales son casi del mismo orden de magnitud, participando cada uno en pequeña medida en el error total. Se pueden traducir estas hipótesis a un lenguaje matemático suficientemente preciso para poder aplicar el mencionado teorema. Cada vez que se pueda representar la magnitud de un fenómeno como resultado de la suma de una multitud de variables, se podrá intentar emplear el siguiente esquema: habrá que examinar si los diversos elementos que intervienen son independientes (en términos de probabilidad) y si alguno de ellos es preponderante.

Se comprende entonces que estas condiciones sean bastante restrictivas y que sea difícil admitirlos en los fenómenos económicos o sociales en particular. Pero el privilegio aparente de la ley normal fue comprendido mejor el día en que nos preguntamos con Paul Levy (1935), cuáles son las leyes estadísticas que pueden ser ley-límite de la suma de un gran número de términos. Existe, como se sabe, la ley de Gauss —pero también existen otras, entre las cuales hay algunas tienen un importante parentesco con la de Pareto. Es el importante grupo de las distribuciones «estables», es decir, en las que la forma no es modificada por la adición de las magnitudes.

En esta vía hallamos la exigencia fundamental de toda explicación: a saber, un modelo, en este caso un proceso aleatorio —y se aclara al mismo tiempo la naturaleza profunda de ciertas constantes estadísticas, o si se prefiere, se da cuenta mejor de la naturaleza de las regularidades introducida por los «grandes números»

* * *

Es necesario que nos detengamos un momento en la «ley de los grandes números». Debemos a Bernoulli el primer enunciado correcto de una proposición vinculada al sentido común y la experiencia de cada uno. Pero al querer reducir el teorema a una máxima de buen sentido nos arriesgamos a cometer graves errores. En primer lugar, es necesario destacar que el cálculo de Bernoulli no se aplica mas que a un modelo muy particular (la repetición de una prueba que puede producir uno u otro de dos resultados alternativos con probabilidades constantes). Poisson ya había percibido que haría falta liberarse de estas hipótesis demasiado restrictivas si se quería enunciar una proposición que mereciera un título tan ambicioso: «ley de los grandes números»; a decir verdad este título era más un programa de investigaciones, una invitación a generalizar los primeros esquemas simples. Después de Poisson, la realización del programa avanzó mucho. Pero mientras se proseguía con el trabajo propiamente matemático, se intentaba también establecer una comunicación entre los diversos teoremas asintóticos y la idea intuitiva de la «regularización del azar» por la repetición de los experimentos o por la extensión de la investigación; lo que resultó bastante más difícil que establecer los propios teoremas. Cada uno se forja una ley de los grandes números personal a la medida de su experimento, a menudo bastante más ricas que las construcciones del cálculo de probabilidades —pero en todos los casos difícilmente comparables.

No se trata aquí de saber quienes son los culpables de los abusos ¿Son los estadísticos, los matemáticos o los «otros»? No intentemos una indagación difícil, pero observemos las consecuencias. En ciertas discusiones o querellas, todo parece suceder como si «ley de los grandes números» significara que para comprender un fenómeno fuera siempre necesario recurrir al mayor número posible de observaciones. Pero quien no observe que esta recomendación aparentemente banal, corre el riesgo de animar —para enriquecer la colección— a «meter en el mismo saco» cosas que no lo toleran demasiado. Un peligro real, parece ser, en la historia y la sociología. Y se dirá que «la ley de los grandes números no se adapta». Pero ¿qué ley? Habría sido mejor no seguir a Poisson, abandonar «ley» y «grandes números», y hablar como se hace frecuentemente en la actualidad de formulación asintótica, de convergencia en probabilidad, etc.

Retomemos el esquema clásico: una frecuencia $f$ depende del número de pruebas $N$; ¿qué es lo que ocurre cuando $N$ aumenta indefinidamente? Se puede decir sin reservas de lenguaje, que $f$ tiene un límite —ya que esta frecuencia es aleatoria. Para medir la longitud de un círculo se inscriben polígonos regulares y se dice que el límite del perímetro del polígono, que es una función del número de lados, tiene por límite la longitud del círculo. Es decir, que se puede obtener una aproximación tan precisa como se quiera a condición poder elegir polígonos que tengan un número de lados tan grande como sea necesario. En el caso presente no es incorrecto decir que la frecuencia $f$ es una aproximación de la probabilidad $p$ —pero no puede decirse que se sea posible obtener una aproximación *tan precisa como se quiera*; en efecto, esto significa que la diferencia entre lo que se observa y lo que se quiere ajustar (entre el perímetro poligonal y la circunferencia del círculo) puede ser inferior a unos requisitos de precisión deseados. Esto no es posible aquí: siempre puede darse que la diferencia entre frecuencia y probabilidad sea mayor. Se debería decir: una aproximación *tan segura como se quiera*. Es decir, que las probabilidades de obtener una gran diferencia entre $f$ y $p$, sean tan pequeñas como se quiera: la aproximación no es más o menos precisa, es solamente más o menos probable que sea suficientemente precisa. En el caso de la circunferencia interviene solamente la precisión, aquí intervienen simultáneamente precisión y seguridad: intervalos de error y probabilidad de no superar esos intervalos.

Desde un punto de vista matemático estricto nos contentamos a menudo con la afirmación de la existencia: el límite existe (definido aquí correctamente: en términos de probabilidad). Desde un punto de vista más amplio, es necesario (y para el usuario es suficiente) precisar las características de esta convergencia ¿Qué valor $N$ elegir para que se pueda apostar tanto contra uno a que la diferencia entre $f$ (observable) y $p$ (ideal) sea inferior a un valor dado? Es decir, las leyes de los grandes números deben ser refinadas para ser verdaderamente útiles.

Su utilidad es por otra parte múltiple: hasta aquí hemos insistido en los vínculos lógicos que existen entre una estadística aparentemente descriptiva y una estadística formal y probabilista: para separar lo importante de lo que no lo es, se considera lo real como una muestra obtenida del universo de lo posible. Pero cuando se habla de muestra se evoca sobre todo la técnica de encuesta: es la observación la que no es sino una parte de la realidad observable. Si quiero estudiar las características del trabajo (tal o cual «trabajo») en la población activa francesa no podré, la mayor parte de las veces, pensar en un análisis completo. La encuesta exhaustiva es imposible ¿Pero cómo pasar del conocimiento de la muestra al de la población total? La primera idea, aplicada espontáneamente antes de cualquier teoría, consiste en desear que la muestra sea una imagen fidedigna, una especie de miniatura de la población, al menos en lo que respecta a las distribuciones estadísticas estudiadas —que la muestra sea *representativa*. Para esto es necesario, evidentemente, tener un cierto conocimiento de la población total —y saber qué pensar de los vínculos que pueden existir entre las características ya conocidas y lo que se quiere estudiar.

Si me intereso especialmente en la duración del trabajo —y si para hacer esto elijo un cierto número de individuos en cada región y cada profesión— está claro que debería haber reflexionado previamente: 1.º el vínculo entre profesión, región y duración del trabajo; 2.º la manera de escoger la muestra en cada subdivisión (región-profesión).

Recapacitando: puede que no sea posible, ni incluso necesario, transformar esta reflexión en un cálculo propiamente dicho. No obstante la experiencia muestra que es bastante más difícil de lo que se cree escapar a los espejismos sin una disciplina verdaderamente rigurosa.

La severidad extrema está, en cierto sentido, representada por el sondeo clásico con extracción al azar (y sus modalidades: estratos, conglomerados, etc.) —que nos remiten directamente a los cálculos que hemos evocado en las páginas precedentes.

Reaparece la urna —o sus refinamientos— y se sabe qué confianza hay que atribuir a los resultados. La investigación sociológica no puede ignorar —y no ignora— los refinamientos modernos de la teoría de los sondeos y sus modalidades de aplicación. Pero hay que constatar que no siempre se puede sacar beneficio de las notables construcciones teóricas ofrecidas. Se puede lamentar entonces que el asunto adopte la forma de un dilema: sondeo por «cuotas» *o bien* sondeo aleatorio. Sería urgente establecer formas intermedias —o más exactamente mostrar que son indispensables unas exigencias teóricas mínimas para llevar a cabo una encuesta— y construir modelos que representen mejor el necesario procedimiento de elección. El terreno no está completamente inexplorado: conviene beneficiarse de toda la riqueza de los métodos de planificación experimental (design of experiment). Reservados durante mucho tiempo a la experimentación biológica, agrícola, médica —esta teoría se desarrolla rápidamente, y debería, en un futuro próximo, constituir una verdadera lógica (y práctica) de la experimentación. La teoría debe poder asimilar, sin destruirlas, las diversas «reglas del método» establecidas en varias ciencias de la observación. Las recientes orientaciones de la teoría de las probabilidades nos dan buenas esperanzas en ese sentido. Destaquemos sobre todo la tendencia que se funda en el tratamiento de los problemas de Decisión Estadística como problemas de acción más que de conocimiento: no hay regla del razonamiento inductivo, decía Neyman, sino reglas de conducta inductiva. Este punto de vista, praxeológico, ha dado ya importantes resultados en el control estadístico industrial —y ha permitido numerosas síntesis eficaces sobre el plano teórico. Aunque no es, probablemente, sino el comienzo.

## NOTA BIBLIOGRÁFICA GENERAL

### Histórica

Es muy importante conocer a los grandes clásicos: Buffon, Laplace, Cournot, Poisson, Quetelet, Galton, Poincaré, …, y, cuando sea posible, leerlos en el original.

Para tener una idea de la Probabilidad al principio del siglo XX, se podrá echar un vistazo a los artículos: «Cálculo de Probabilidades», «Teoría de los errores», «Estadística», en *L'Encyclopédie des Sciences Mathematiques* (Paris, Leipzig, 1909-11).

Algunas notas útiles en Westergaard (*Contributions to the history of statistics*, London, 1932) —para el período anterior a Laplace es necesario ver también Todhunter (*A history of the mathematical theory of probability*, 1865).

### Ténicas y métodos

1.º Para los que teman a las matemáticas, los textos citados aquí de: Borel (1,2), Frechet, Darmois (2,4), Vessereau, Yule, y Kendall, Monjallon, Yates, podrán aclarar las ideas fundamentales y sus principales técnicas.
2.º Sin requerir una verdadera especialización matemática, sino solamente algunos conocimientos comunes: Fisher (1,2), Neyman, Darmois (1,3), Morice y Chartier, Thionet, Finney.
3.º Más difícil: Cramer, Blackwell y Girshick, Savage.
4.º Servirá de obra de referencia y de bibliografía: Kendall.

### Bibliografía seleccionada

BLACKWELL, D. y GIERSHICK, M. A.: *Theory of games and statistical decision*. New Cork, Wiley, 1954, p. 355.
BOREL, E.: «Les probabilités et la vie», *Coll. Que sais-je?*, n.º 91, Paris, P.U.F., 1943.
—: «Probabilité et certitude», ibid, n.º 445, Paris, 1950.
CRAMER, M.: *Mathematical methods of statistics*. Princeton, 1956, p. 575.
DARMOIS, G.: *Statistique mathématique*. Paris, Doin, 1928.
—: «Statistique et applicatons», coll. A. *Colin*, n.º 174.
—: *Les mathématiques de la psychologie* (mémorial des sicences mathématiques, fasc. 98) p. 51.
—: *L'analyse des corrélations* (les conferences du Palais de la Découverte, 17 janvier 1948), p. 20.
FINNEY, D. J.: *Experimental design and its statistical basis*. Chicago University Press, 1955, p. 169.
FISHER, R. A.: *Statistical methods for research workers*. Oliver and Boyd, Edinburgh, 1.ª ed., 1925, p. 354.

FISHER, R. A.: *The design od experiments*, ibid, 1.ª ed., 1935, p. 242.
FORTET, R.: *Calcul des probabilités*. Paris, C.N.R.S., 1950, p. 330.
FRECHET, M.: *Les mathématiques et le concret*. Paris, P.U.F., 1955, p. 438.
FRECHET, M. et HALBWACHS: *Le calcul des probabilités a la portée de tous*. Paris, Dounod, 1924, p. 297.
HALPHEN, E.: «La notion de vraisemblance, essai sur les fondements du calcul des probabilités et de la statistique mathématique», Publications de *l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, vol. 4, fasc. 1, 1955, pp. 41-92.
KENDALL, M. G.: *The advanced theory of statistics*, 2 vol., Griffin, London, 1948.
MONJALLON, A.: *Introduction à ña méthode statistique*. Paris, Vuibert, 1954, p. 279.
MORICE, E. et CHARTIER, F.: *Méthode statistique*, 2 vol., Paris, 1954.
MORLAT, G.: *L'usage du calcul des probabilités, Revue d'Économie politique*, n.º 6, 1956, pp. 889-907.
NEYMAN, J.: *First course in probability and statistics*. Holt, New York, 1950, p. 350.
SAVAGE, L. J.: *The foundations of statistics*. New York, Wiley, 1954, p. 294.
THIONET: *La méthode des sondages*. Paris, I.N.S.E.E., 1953, 2 vol.
VESSEREAU, A.: *La statistique* (coll. « que sais-je ? », n.º 281), Paris, P.U.F., 1947.
WESTERGAARD, H.: *Contributions to the history of statistics*. King, London, 1932, p. 280.
YATES, F.: *Méthodes de sondage pour reccensements et enquêtes*. Paris, Dunod, 1951.
YULE, U. and KENDALL, M. G.: *An introduction to the theory of statistics* (1.ª ed., 1911; 14.ª ed., 1950) Griffin, London, p. 701.