

«¡Pásame la brújula!» Un ejemplo de metodología histórico-cultural en la enseñanza de las matemáticas

Pablo del Río



La enseñanza de las matemáticas ha estado tradicionalmente condicionada por una visión universalista de las capacidades mentales, que ha tenido poco en cuenta que el lenguaje matemático no es una abstracción apriorística y acontextual, sino que pasa por la utilización de «metáforas» instrumentales utilizadas por los propios matemáticos a lo largo de la historia y escamoteada al niño en la escuela. En este artículo se expone un diseño didáctico en que se hace una apuesta fuerte por una enseñanza de la geometría que recoja los instrumentos culturales (las «metáforas» materiales) presentes en nuestro entorno y los utilice en sus diseños como mediadores entre la realidad y los conceptos.

Profesor: «¿A qué temperatura hierve el agua?»

Alumno: «A noventa grados.»

Profesor: «Incorrecto. A cien grados.»

Alumno: «¡Anda! Es verdad, lo que hierve a noventa grados es el ángulo recto.»

1. PARA SITUARNOS MAS ALLA DE UNA PSICOLOGIA MENTALISTA Y DE UNA ENSEÑANZA MENTALISTA DE LAS MATEMATICAS

Desde que los psicólogos han tratado de meter la cuchara en las didácticas educativas, la enseñanza de las matemáticas ha estado rodeada de grandes paradojas. Por una parte parece claro a la opinión pública y a los educadores que las matemáticas son uno de los puntales de selección del alumnado y una de las piedras en que más alumnos tropiezan. No parecen ser por tanto muy «universales», algo que se adquiriera simplemente con el desarrollo, como echar los dientes o saber andar. Curiosamente, las tesis que mayoritariamente han soste-

nido los psicólogos que han ejercido un papel protagonista en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas son tesis «universalistas»: las matemáticas están «dentro» del sujeto. El educador sólo tiene que hacerlas aflorar en el momento oportuno del desarrollo.

En este artículo se trata de presentar a nivel aplicado la tesis psicológica contraria, la de que las matemáticas no están naturalmente «dentro» del sujeto, y que por tanto esas desigualdades que se constatan en la práctica educativa son esperables. En ese caso el desafío es bien claro. Si no están dentro naturalmente, ¿qué se debe hacer para que entren en la mente del alumno? ¿Cómo las construye o se las apropia éste? En último término, y éste es el eje de este artículo, ¿qué método educativo y material didáctico utilizar para lograrlo? En este artículo se intenta resolver esa cuestión desde un planteamiento fuertemente interdisciplinar, de unir Matemática/Psicología y Educación y fuertemente sociocultural (unido a la historia de los instrumentos para pensar y las actividades culturales reales). Para ello se hacen referencia, no todo lo detalladas que quizá requeriría el lector y le gustaría dar al autor, sobre un diseño didáctico comenzado y experimentado con éxito hace más de cinco años. Aunque el trabajo teórico de diseño ha continuado, las referencias empíricas se remiten a esa experiencia (Del Río, 1986).

Permítanos el lector una pequeña introducción al problema que nos sirva para acercarnos sin brusquedades a nuestra posición y que nos permita justificar el papel central que nosotros adjudicamos, en esa didáctica de las matemáticas, al medio y a los instrumentos culturales.

(Aunque esta introducción es conveniente para entender el modo concreto de abordar la didáctica que se recoge al final del artículo, en el punto 3, el lector impaciente puede comenzar si lo prefiere por este punto 3 y volver eventualmente sobre esta introducción.)

1.1. ¿Pinta algo la Psicología en la enseñanza de las matemáticas?

La introducción que acabamos de hacer parece dejar en mal lugar a la psicología. Con un planteamiento no innatista de las matemáticas, ¿puede seguir siendo útil la psicología a los educadores? Creemos que sí: diseñar una didáctica de las matemáticas concreta —por ejemplo, la geometría que aquí abordamos que se ocupa del espacio— parece que debería obligatoriamente pasar por un conocimiento tanto de esa matemática concreta (las matemáticas del espacio) como de la psicología que la sustenta (la del espacio). Es decir, tanto de los conocimientos de la ciencia sobre el espacio como de los procesos del sujeto para poder manejar el espacio real y esos conocimientos sobre el espacio matemático.

Esto, que parece tan obvio (efectivamente al niño se le plantea una relación recíproca entre sus capacidades espaciales y los conocimientos matemáticos sobre el espacio que debe adquirir) no se realiza de hecho habitualmente. Pese a que Piaget (1950) lo planteó muy claramente, las críticas de los matemáticos y docentes de las matemáticas a su modelo psicológico (a la solución particular que dio a esa relación Matemáticas-Psicología) parecen haber hecho olvidar la validez de su planteamiento general: el problema de la enseñanza de las matemáticas pasa porque estas dos disciplinas lo resuelvan juntas. Añadiríamos aún, a las Matemáticas y a la Psicología, la Educación.

En este artículo trataremos de exponer un acercamiento distinto al problema de la enseñanza de las matemáticas del espacio, que afronta claramente esa

integración interdisciplinar. Este enfoque se diferencia del piagetiano en que, en lugar de tratar de encontrar en unas leyes de desarrollo internas los principios de la construcción del pensamiento matemático, trata de buscar las razones de esa construcción en la historia de la construcción del conocimiento social y cultural, tanto a nivel de toda la humanidad y de los grupos culturales específicos como al de la historia de la construcción cultural del conocimiento de cada niño particular.

Este enfoque histórico-cultural parece necesario para integrar las matemáticas del matemático y las de la mente si deseamos encontrar una explicación alternativa a la piagetiana, es decir, a la de suponer que la mente humana es «implícitamente matemática» y que su propia maduración desembocará, a través de un orden determinado (espacio topológico, proyectivo y euclideo), en las matemáticas más formales.

Este acercamiento no es fácil, porque los matemáticos hacen matemáticas y avanzan en su ciencia sin pedir para ello permiso a los educadores, para ver si sus descubrimientos serán fáciles de enseñar y, por supuesto, tampoco preguntar ni iluminan a los psicólogos respecto a los procesos implicados en esas nuevas representaciones que hacen avanzar su ciencia. Los psicólogos, a su vez, tratan de detectar procesos o características psicológicas que supongan un buen aprendizaje y funcionamiento con las representaciones y conocimientos matemáticos. Pero podríamos decir que nunca ha habido un diálogo muy estrecho. No es, pues, de extrañar que la psicología que explicaría los procesos cognitivos que respaldan un buen aprendizaje matemático y la que aplicaría ese conocimiento a la educación tengan su historia, pero una historia que, si no ha ignorado la matemática, sí que ha ignorado «la historia de la matemática».

1.2. ¿Es necesario enseñar las matemáticas o sólo se trata de enseñar a «hablar matemático»?

Pocas disciplinas parecen responder tan bien, tanto al supuesto de que dependen de la educación, de que son como un idioma nuevo o una clave críptica a desvelar, sólo posible para los iniciados; como al supuesto de innatismo, de la necesidad de poseer dotes intelectuales especiales para poder llegar a dominarlas. El primer supuesto carga la responsabilidad sobre los hombros de los educadores; el segundo la arroja íntegramente sobre los del niño y sus antecesores, hasta Adán. Ambos supuestos pueden ser ciertos, pero no dejan a primera vista de parecer contradictorios. Es claro que no todos los niños aprenden igual matemáticas. Ese hecho ha llevado a los psicólogos a tratar de descubrir por qué. Se han dado explicaciones más o menos duraderas y fáciles: los niños tienen distinta inteligencia, hay niños matemáticamente patológicos (recordemos con qué facilidad se diagnosticaban cosas como «discalculia» en los años sesenta), o sencillamente, el entorno y la cultura y, más en concreto la enseñanza, son responsables de los fallos.

Ante este problema las tesis de los psicólogos se han visto acompañadas por tesis igualmente fuertes y contradictorias de los matemáticos. Leamos a uno sólo de ellos: «Las matemáticas se corresponden a una estructura de la mente humana... el relativismo cultural no existe en matemáticas.» «Las matemáticas siempre han tenido la particularidad de no ser comprendidas sino por quienes las practican» (René Thom, p. 46). Fijémonos en que las dos afirmaciones se contradicen. Si las matemáticas fueran una estructura universal de nuestra mente

y no dependieran de la cultura, todos comprenderíamos las matemáticas. Cabe también pensar que las matemáticas estén implícitamente en nuestra mente (como sugieren Olson y Bialystok, 1983, para las categorías espaciales) y que la educación y la cultura se limitan a «explicitarlas», a dotarnos del código para traducirlas y manejarlas, como si hubiera que pasar el lenguaje de la mente al de los matemáticos, como si tuviéramos que aprender ese «francés especial». Un mismo matemático cree a la vez en el universalismo de las representaciones matemáticas, en lo que Toulmin (1972) ha llamado el «geometrismo de la mente» y en que a la vez no pueden entenderse por cualquiera.

Efectivamente la crítica a la objetividad de las matemáticas ha surgido también desde la antropología cultural. Las investigaciones de la matemática de la vida real de Saxe (1990) o de Lave (1988) han subrayado ese problema: hay dos matemáticas, una que funciona sobre los requerimientos de la actividad real y otra lógico-formal. Y parece que los autores no creen que la segunda sea la mejor.

Desde luego el debate no es nuevo, pero sigue manteniendo a los educadores en medio de un cúmulo de dudas y sospechas, sin al parecer aportar demasiados elementos para mejorar directamente la enseñanza.

Creemos que se pueden identificar correctamente las raíces de las críticas y del debate señalando dos principales problemas:

— Por una parte, el problema del significado de las matemáticas en la vida real, el problema del sentido y de la motivación para entrar en las matemáticas.

— Por otra parte, el problema del mentalismo y de la posibilidad de hallar soportes *materiales* más tangibles y asequibles al aprendizaje para hacerse con los formalismos y conceptos abstractos del conocimiento matemático.

— Entre medias de ambos, el problema de si es posible dar cuenta, con relevancia y rigor a la vez, de los problemas cotidianos mediante representaciones que sean tanto adaptadas a los contenidos cotidianos como correctas y funcionales para la matemática ortodoxa.

«Todos aprendemos la misma tabla de multiplicar.» *Esto podría ser, ciertamente, una observación sobre la clase de aritmética en nuestras escuelas, pero también podría ser una constatación sobre el concepto de tabla de multiplicar.* (L. Wittgenstein, 1988, p. 519)

1.3. La construcción cultural de las matemáticas

Wittgenstein (1974) ya creía que las matemáticas no son un sistema que exista y quepa considerar aparte de la *práctica de hacer matemáticas* y creía en su naturaleza social. El «idioma» de las matemáticas, la formalización matemática, no fue el descubrimiento básico de las matemáticas, sino una tarea teórica que se apoyó en las prácticas matemáticas. Las matemáticas no son por tanto un sistema de lógica formal que existe *sui generis*, sino una colección de *técnicas* o *juegos* cada uno de ellos con reglas consistentes, pero sin relación necesaria con los otros juegos.

La psicología histórico-cultural ha ofrecido una explicación sencilla a estos problemas. Sencilla teóricamente pero enormemente laboriosa a nivel aplicado, porque obliga a reelaborar con un enorme trabajo técnico lo que sabemos sobre las aptitudes, el aprendizaje y la construcción del conocimiento en el niño. Sintetizando mucho podemos decir que la educación es el motor del desarrollo psicológico para esta perspectiva, puesto que las funciones mentales más avanzadas del hombre (las competencias, las aptitudes) no son sino producto de la *interio-*

rización de las acciones externas que realizamos con ayuda de instrumentos culturales que sirven «para pensar externamente, para manejar el conocimiento en el entorno real». Si educamos desde ese supuesto, el niño aprenderá bien y con sencillez y, lo que es igual de importante, el educador enseñará con facilidad y eficacia, porque estará apoyado por aliados mucho más corpóreos y tangibles y cuya efectividad será más directamente mensurable. El educador hablará el «idioma» de los matemáticos y de los psicólogos sin tener que salir de los términos del suyo propio.

La psicología histórico-cultural ofrece también una respuesta al problema del idioma y el «formalismo». Por supuesto que Wittgenstein tiene razón: hay una base técnica, práctica, externa en la primera matemática («instrumentos psicológicos» en terminología de L.S. Vygotski), pero esos apoyos técnicos se traducen o representan en otros apoyos simbólicos, notacionales o formales que son los que constituyen el «idioma» matemático.

Esta prometedora perspectiva, sin embargo, exige una fuerte inversión en investigación psicológica, cultural y educativa antes de dar frutos. Porque se necesitaría previamente integrar las definiciones que nos aporta al psicología cognitiva sobre los procesos mentales que sigue el niño en las tareas de instrucción/aprendizaje, con la estructura de las actividades externas que realiza. Y sería preciso diseñar las actividades educativas integrando la estructura significativa de la actividad al nivel de «sentido» (el significado emocional y social que tienen para él sus actuaciones, los motivos que le impulsan a realizarlas y le permiten movilizar sus acciones) con la estructura significativa de la actividad al nivel del «significado» (el significado semiótico, instrumental que le permite conocer y manejar cognitiva y técnicamente sus acciones). Algo que sin duda parece sencillo pero que choca con frecuencia con la rigidez del modelo escolar en cuanto al marco e instrumentos externos de la actividad de alumnos y profesores.

Y sin embargo no se trata de una utopía. Se va a exponer aquí un programa experimental de enseñanza y adquisición de operadores básicos para la geometría (podríamos llamarlo de pregeometría) en el que se han puesto en práctica estos supuestos, desarrollando el trabajo de investigación histórico-cultural y cognitiva, previo y comprobando la eficacia de este planteamiento.

Tratando de no extendernos demasiado, necesitamos sin embargo partir de unos supuestos teóricos sobre ese encuentro entre los supuestos psicológicos y los supuestos matemáticos del espacio y sobre los conceptos de la psicología histórico-cultural que permiten integrarlos, tanto a nivel del conocimiento en general como en la práctica educativa. Sintetizamos, pues, brevemente unos conceptos claves.

2. ALGUNOS CONCEPTOS BASICOS PARA ENTENDER LA INSTRUCCION Y EL APRENDIZAJE MATEMATICOS DESDE LA PERSPECTIVA HISTORICO-CULTURAL

«Si cambiáramos los instrumentos que utiliza el niño, su mente sería radicalmente distinta» (L. S. Vygotski).

2.1. ¿Es mental el material pedagógico? La vía desde los objetivos hasta los conceptos.

Antes de los códigos y lenguajes formalizados Vygotski analiza la aparición de instrumentos materiales que juegan un papel mental, un papel representacio-

nal. Frente a los instrumentos que habitualmente han investigado antropólogos, arqueólogos o etnólogos, los instrumentos eficientes como la azada (es decir, aquellos instrumentos que el hombre dirige hacia fuera, hacia la naturaleza), este autor se fija en los instrumentos que el hombre usa para influir sobre su propia psique, sobre sí mismo. La azada cambia el medio y está dirigida al exterior; en cambio, un nudo, una taba o un dibujo están dirigidas a mi interior, y si cambian el medio es sólo como un rodeo para influir en mi mente. Se trata de mediadores psicológicos que me permiten ampliar y extender la conciencia o las funciones psicológicas naturales, traspasando el esfuerzo constructivo o evolutivo de nuevos mecanismos desde la genética biológica a la genética cultural. Gracias a ellos, supero el contexto concreto o situacional, el nivel de la «presentación» directa de las cosas, para representar en esa situación elementos de otras situaciones (solemos olvidar el significado etimológico y literal de la palabra representar). Estos «instrumentos psicológicos» permiten, pues, una primera representación aún muy rudimentaria y natural, aún muy ligada al nivel visual y manipulativo. Es decir, construyen la representación mental, *en el exterior*, y física o técnicamente. Este tipo de instrumentos no sólo se encuentran en las etapas iniciales de la evolución cultural del hombre, sino que hemos llegado a formar con ellos nuestro entorno cotidiano y nos rodean a todas horas y en todas las situaciones: colocamos un libro al lado de la taza del desayuno para que no se nos olvide cogerlo, usamos la regla para medir, el reloj para saber el tiempo, o una orla de cierto color para expresar que somos doctores en cierta disciplina.

Este enfoque nos permite reconceptualizar algo que hasta ahora ha sido ignorado por la Psicología o tratado con gran incomodidad, como son todos los elementos culturales materiales del entorno. El enorme y reciente desarrollo de la Semiótica refleja, aparte de sus propios méritos, una expresión de esa dejadez de los psicólogos y de la imposibilidad de ignorar esos hechos. Porque si la Psicología los ha ignorado, la Educación y el avance tecnológico, no. El material educativo, desde S. Agustín, Itard, Montessori, hasta el gran alarde tecnológico actual ha sido uno de los puntales de las situaciones de enseñanza que los psicólogos han despachado como «condiciones de la tarea» o de la situación. La ingeniería del conocimiento trata de conocer los modelos, reglas y estructuras de un saber determinado y debemos aceptar que, pese a su validez, opera con supuestos sobre operadores mentales. A su lado, la ingeniería psicológica trabaja sobre operadores tecnológicos, y trata de analizar y diseñar diferentes artefactos que puedan ayudar al desempeño y aprendizaje en diferentes situaciones (pilotos y astronautas son quizá sus mayores beneficiarios, pero algo se ha hecho para simples alumnos también). Sin embargo, estas dos ingenierías no han sabido articularse, al faltarles una teoría para abordar lo mental y lo cultural a la vez, lo interno y lo externo. Y el material pedagógico sigue diseñándose con cierto intuitivismo. Reconceptualizar el diseño de material pedagógico considerando como sistemas de instrumentos psicológicos, de mediadores que permiten representar externamente los hechos, permite avanzar por primera vez de manera organizada en el diseño de ayudas educativas.

Los instrumentos psicológicos (como una cuerda tensa o el ábaco) no sólo permitieron históricamente acceder a los conceptos matemáticos (como la recta o el número negativo) como sugería Wittgenstein o sugiere el matemático Aleksandrov. Se convierten en traductores de estos conceptos, en la medida en que estos instrumentos son etiquetados con otros, de carácter ya más comunicativo

y menos manipulativo, cada vez más fáciles de «llevar» por el sujeto (como el lenguaje escrito o el oral) y en último término se interiorizan tras todo un proceso de re-representaciones hasta estar presentes en nuestra mente como habla interna o representaciones mentales. Una enseñanza que arranca de los peldaños finales, de los más formales, de esta escalera de traducciones, se sitúa muchas veces a un nivel excesivo de alejamiento de la realidad y exige una arquitectura previa que no tiene siempre el niño. Podemos decir que el niño no conoce los controles o carece de los peldaños que le permiten pasar de ese nivel indirecto de referirse a las cosas, a las propias cosas. Si el niño aprende pese a todo superficialmente ese formalismo, lo hace sin poder ligarlo a los escalones inferiores que lo conectan a los hechos. Un conocimiento muy «semantizado», expresado en conceptos muy abstractos, no es para el niño sino un conocimiento concreto, «episódico», de las etiquetas o palabras, muy raras, que lleva una caja «que no le ha sido presentada».

Para Vygotski (1982), en efecto, la abstracción no era sino el conocimiento de los mediadores culturales (objetos, etiquetas sémicas) que permiten separar o redefinir operativamente distintos hechos. Sólo tomar conciencia de la etiqueta permite acceder conscientemente al concepto y esto no se logra sin que la etiqueta a su vez esté traducida a otra, sin que «se hable» de ella. Los mangos (los «instrumentos psicológicos» en mi particular terminología; Del Río, 1990) son manipulables por la mente a través de la mano, pero no directamente por la mente. Sólo cuando al mango se le superpone una etiqueta tomamos conciencia de lo que manipulamos con ese mango. Podríamos decir que el hombre o el alumno manejan una serie de cajas para guardar hechos-significados con sus *mangos* para cogerlar (instrumentos psicológicos) y sus *etiquetas* para identificarlas. Si va conociendo con suficiente apoyo factual las relaciones de unas cajas con otras (conocimiento jerarquizado), puede que llegue a alcanzar el manejo de conceptos muy abstractos (cajas con una gran capacidad de inclusión y de precisión a la vez), pero si accede directamente a estos grandes cajones sin conocer lo que tienen dentro, los conceptos abstractos serán artificiosos: el alumno está manejando una «caja negra».

Todo el conocimiento natural está lleno de «cajas negras», de «algoritmos invisibles», es decir, de procedimientos o cadenas de hechos de los que puedo prescindir provisionalmente o porque puedo usar limitadamente esa caja sin saber su contenido, o porque otros pueden abrir la caja por mí y ocuparse de manejar su contenido (puedo decir a mi hijo que programe el vídeo por mí, o pedir a un compañero que me sople una ecuación).

No puede escamotearse al niño, para «sintetizar» conocimientos, esa escalera, esa jerarquización, esa arquitectura que permite llegar a los conceptos más formales. La síntesis siempre es personal, porque la apropiación de los mediadores culturales lo es. Es decir, funciona en el plano de la acción y la representación a la vez; y no hay nada más personal que la acción (característica básica de ese ordenador tan «personal» que es la mente humana). El hecho de que la acción pase a estar incluida en representaciones cada vez más lejanas e indirectas no debe hacernos olvidar que es el hecho inicial el contenido de significación básico. (Yo sé muy bien lo que puse en la caja inicial que ha ido siendo incluida en diversas cajas.) Sin embargo, una vez que el instrumento va alejándose del contexto visomotor y haciéndose cada vez más indirecto es cuando realmente se accede al nivel más formalizado y potente del pensamiento. Los instrumentos con «mango» manipulativo son necesarios inicialmente, pero la de-

pendencia estancada en ellos no permite alcanzar niveles superiores (el propio Vygotski señalaba ya esto en relación a las diferencias entre la matemática preescolar y escolar, 1983). Es este sentido el diseño instrumental va más allá del material de carácter sensoriomotor.

Aunque la psicología que estudia la enseñanza de las matemáticas no parta de un modelo tan ceñido a estos conceptos, no ha dejado de manejar en los últimos años el concepto central de instrumento o herramienta cultural. Cada cultura ofrece un repertorio de ellos a sus miembros para construir su mente y su conocimiento. Los operadores no suelen estar, sin embargo, en vitrinas o en archivos organizados, sino que están distribuidos por el entorno, integrados e insertos en contextos y sistemas de actividad. Por ejemplo, Jean Lave (1988) ha subrayado que la mayoría de los instrumentos de medida de nuestra cultura están incluso «deformados» para aplicarse mejor a las acciones significativas de sus usuarios (cocinar, ver si estoy enfermo, etc.), es decir, para dar cuenta con más rapidez y claridad de ciertos hechos que el instrumento es capaz de detectar (por ejemplo, el termómetro del horno, además de los grados, pondrá en ciertos lugares «crudo», «medio» o «pasado») y estará integrado en el propio horno o tendrá un lugar en el escenario próximo de la cocina.

Los instrumentos psicológicos/culturales juegan, pues, un papel central en la construcción de la mente y el conocimiento, pero nos rodean de tal manera que no solemos verlos en su verdadero papel. Los solemos usar más de manera analógica y adaptada a la «presentación» que de manera semántica (es decir, no solemos comprender conscientemente el mecanismo que realizan a través de la representación). Vygotski señalaba que el instrumento cultural se incorporaba realmente en el marco de un nuevo sistema psicológico funcional (nuevas capacidades) cuando sustituía a las funciones naturales, a los instrumentos biológicos de nuestro propio organismo: cuando me fío más del termómetro o de la regla que de mi piel o de mi vista, es cuando realmente tomo conciencia del proceso de medida de la temperatura o de la distancia. Es entonces cuando el *mecanismo indirecto y cultural* de manejar la realidad se ha «psicologizado», se ha hecho mental, se ha hecho algo propio.

Lave (*op. cit.*) señala que los instrumentos están insertos en las prácticas culturales y sociales. Es cierto. Pero no se puede sostener que deba ser así y que no quepa una comunicación con el mundo de los formalismos escolares como también parece sostener. La tarea de la educación es objetivarlos, hacer que «transiten» operativamente de una situación a otra de modo que se puedan despegar de ella y ser visualizados y así asumidos conscientemente.

2.2. La construcción histórica del conocimiento matemático y de las competencias psicológicas espaciales a través del material científico y el material pedagógico.

Si hacemos un inventario de las operaciones internas y externas que debe realizar un niño y un ciudadano de nuestra cultura actual en España para manejar el espacio en todas las situaciones de la vida, nos encontraremos con una serie de acciones cotidianas y culturales y sus correspondientes procesos y operaciones mentales. Si convertimos ese inventario en un conjunto de pruebas psicotécnicas, en una batería de tests que nos dé cuenta de manera actualizada y relevante (las baterías de tests de espacialidad son en este sentido muy limitadas y restringidas y cubren un repertorio muy pobre y no significativo de operacio-

nes), podríamos medir las competencias espaciales «reales» de los alumnos de EGB de 9 y 10 años por ejemplo. Cuando realizamos esa tarea (Del Río, 1986; y en prensa) nos encontramos con que las competencias están muy irregularmente distribuidas y están mucho menos «normalizadas» que las verbales, por ejemplo. Y eso pese a que habla mucho de las influencias culturales en el lenguaje y se piensa en cambio que el espacio es uno de los dispositivos psicológicos más innatos, más universalizados por la fuerza de los genes. Nos encontramos también que la posesión en el hogar y la práctica y el dominio de determinados instrumentos psicológicos presentes en la cultura daba cuenta de esas diferencias. La cultura, a través del instrumental cognitivo que facilita al niño y que éste incorpora psicológicamente, explicaría la posesión de estas aptitudes espaciales que correlacionarían a su vez la formación matemática en geometría.

En realidad la consecución y generalización del repertorio de operaciones y de instrumentos culturales que permiten realizar éstas ha seguido una serie de líneas históricas: la cuerda tensa nos lleva a la recta; el muro nos lleva al plano; el aro al concepto de órbita, los instrumentos ópticos llevan a la geometría proyectiva, etc. Y cada cultura (aunque la homologación de la cultura occidental y de la escuela nos lo puedan a veces ocultar) ha construido sistemas de operadores más o menos propios.

No todos los individuos, pues, ni todas las culturas acceden a la matemática más desarrollada. De hecho la mayoría se mueve durante su vida con un repertorio de operadores muy limitado y que sólo representa una parte de los desarrollos en la evolución histórica de la ciencia. En este sentido, si todos tenemos determinados dispositivos de manejar el espacio al nivel de las funciones naturales heredadas, las funciones o capacidades más característicamente humanas requieren una incorporación cultural a través de esos operadores y el repertorio de instrumentos y actividades de la vida cotidiana por una parte y la escuela por otra, determinan en este caso el desarrollo de esas competencias. Que un niño tenga y utilice habitualmente en su casa determinados objetos (agenda, metro, reloj, «legos», parchís, cuentapasos, etc.) y existan ciertos hábitos de medir de una manera u otra los itinerarios, determina claramente la incorporación de operadores mentales.

En este sentido, serían para nosotros materiales con valor pedagógico, tanto materiales pedagógicos específicos (como por ejemplo puedan ser regletas Cuisenaire, o un instrumento tan reciente y formalizado como el lenguaje LOGO de ordenador) como materiales científicos o cotidianos con valor como mediadores psicológicos externos de las operaciones que deseamos incorpore el niño. Muy especialmente, el diseñador de programas educativos, cuando no halle entre el material acumulado históricamente que le resulte accesible o conocido, aquel mediador que necesite el niño para pasar de un tipo de operación a otro, se enfrentará a la necesidad de diseñar o inventar nuevos materiales (si deseáramos presumir tecnocráticamente no sería abusivo hablar de «ingeniería psicopedagógica») que le permitan construir ese paso en sus alumnos.

3. QUE ENSEÑAR EN PRE-GEOMETRIA Y COMO ENSEÑARLO.

No es este el lugar para entrar en la arquitectura psicológica del espacio, ni la «natural» (los potentísimos dispositivos biológicos heredados) ni la «cultural» (los no menos ricos dispositivos culturales que acumula la historia y la vida cotidiana, en repertorios muy diversos, en el marco del desarrollo de un niño).

Ni siquiera podemos entrar en todo el contenido de un programa educativo para desarrollar un abanico rico de competencias culturales. Vamos a concentrarnos en algunos aspectos, creemos que los más susceptibles de tratamiento educativo en el marco curricular actual, de ese programa potencial. En todo caso pueden verse ambos en detalle en otro lugar (Del Río, 1986; y en prensa).

3.1. Qué enseñar: operaciones, operadores y marcos del pensamiento espacial y geométrico.

Los grandes procesos de rozamiento espacial que han permitido construir la geometría y que se utilizan también para enseñarla (a veces excesivamente verbalizados de modo que el razonamiento original no es muy reconocible) tienen un correlato en una serie de «capacidades» mentales que es preciso poseer para poder seguirlos. Vamos a definir sucintamente esos grandes procesos que constituirán el núcleo de contenidos centrales a enseñar (o dicho con más propiedad, de competencias a construir).

3.1.1. *De estar en el espacio a estar fuera: de la acción a la medición*

El dominio natural del espacio se apoya en la acción. El niño pequeño recorre el espacio y su apreciación depende de ese movimiento dentro del espacio. No mide el espacio sino que se adapta a él. En este sentido y como sugiere Pribram (1986) el cerebro humano no procesa espacio ni tiempo, sino espacio-tiempo. Regula su acción en el espacio por un acercamiento progresivo que se desenvuelve a la vez en tiempo, ajustando el exceso o defecto con movimientos que afina progresivamente hasta llegar al contacto. En cambio, el espacio instrumentalizado culturalmente ha separado artificialmente, como precio de la conciencia, espacio y tiempo. En este sentido el espacio euclideo no es el culmen del desarrollo cognitivo espacial como sugiere Piaget, sino que lo sería la reintegración científica (por ejemplo la vía de la relatividad o del principio de incertidumbre) al espacio-tiempo natural.

Pero dejando estas disquisiciones, el hecho es que todos los espacios conscientes son culturales y requieren ser reconstruidos externamente, al margen de la construcción biológica interna. Para ello debemos situar instrumentos cognitivos entre el sujeto y el espacio y la acción directa pasa a estar mediada, interrumpida o realizada indirectamente: veo el espacio a través del metro, la regla, los días de viaje... De un espacio continuo, dominado por el movimiento, se ha pasado a un espacio discreto, dominado por el instrumento psicológico, por una regulación externa mucho más objetiva. Esta disparidad total en la manera de tratar el espacio está muy clara en la aporía del sabio Zenón. La acción en el espacio natural dice que Aquiles alcanzará a la Tortuga. Pero llevar el análisis discreto a sus últimas consecuencias (a unidades discretas indefinidamente divisibles) parece decir que nunca lo logrará. El significado, la posibilidad de objetivar y definir el espacio, parece aquí un asesino del sentido, de la posibilidad de utilizarlo.

El desarrollo de la geometría supone pasar de una manera natural de regular el espacio-tiempo a una manera euclidea, basada en modelos instrumentales de espacio y tiempo discretos y separados. A nivel espacial en concreto, será preciso sustituir el reconocimiento de formas en base a *configuraciones* (reconocer un cuadrado porque tiene determinado aspecto «familiar» o ciertos rasgos

como puntas o bordes planos) por *un sistema de formas basado en reglas y algoritmos*; la orientación natural sobre el esquema corporal (de frente, detrás, etc.) por un sistema canónico organizado sobre operadores objetivos como el «grado»; el sistema natural de evaluar las distancias, basado en apariencias, por otro dominado por la *medida* de longitudes. El niño deberá transferir su manejo del espacio «desde el sujeto que actúa dentro» para situarse a sí mismo como objeto en ese espacio visto «como desde fuera» (el sujeto psicológico piensa desde fuera y se ve así mismo como un objeto dentro del espacio) y evaluado a través de operadores externos nuevos. En el punto siguiente veremos cómo podrá lograrlo adecuadamente.

3.1.2. *Del escenario natural al marco objetivo de la geometría*

El niño pequeño reconoce y estructura el espacio según la función natural de las proximidades y el control del territorio. La «posesión» (es mío, está en mi lado, etc.) o el control motor le permiten realmente situar las cosas en el espacio, justamente porque es un espacio visual, enactivo y gestual. Está demostrado que la memoria natural de posiciones es enormemente poderosa e inconsciente.

Sin embargo, el paso al conocimiento espacial cultural que denominamos euclideo exigirá al niño la construcción y dominio de un sistema de marcos o escenarios formalizados (espacios delimitados y organizados en ejes o sistemas de referencias objetivos) en que situar los elementos espaciales. Olson y Bialystok (1983) han formalizado ese espacio como un conjunto de conocimientos organizable en proposiciones. Dicho sencillamente, si afirmo que «la casa es alta», digo algo espacial (predicado = alta) de algo (argumento o referente objetivo del que hablo = casa). Cada predicado se refiere a una dimensión o cualidad espacial y cada argumento implica un punto de referencia que establece una relación entre el sujeto que habla y el referente (la casa es grande en relación a mí) o entre el referente y un *marco de referencia*. Ese espacio de referencia no es ya el espacio envolvente que rodea al niño que ambula y se mueve en un espacio natural enactivo. Es un espacio totalmente formalizado, cerrado semánticamente, al que yo domino desde fuera. Yo domino una hoja de papel, que es un espacio de trabajo. Yo domino mi mesa de despacho o mi pupitre, que son espacios de trabajo. El pintor domina el lienzo, que es un espacio de trabajo. El niño domina la pantalla del videojuego, etc. Adquirir un sistema euclideo implica construir un marco estable dentro del cual predicar proposiciones espaciales de los elementos que situemos en él. El problema es que el marco, el contexto de las predicaciones espaciales, suele ser transparente al alumno (y muchas veces al enseñante) como ocurre en el contexto de muchas novelas. Efectivamente, el medio suele ser invisible o transparente hasta que se sitúa como objeto en otro medio mayor (por ejemplo, coloco la hoja de papel en la mesa, o dibujo la pantalla del televisor en la hoja de papel).

Con el tiempo, ese sistema de marcos dará lugar a una memoria de posiciones que se apoya en esa estructura jerarquizada de marcos y que acabará sustituyendo en gran parte a la memoria natural de posiciones. La geometría que según Herodoto se inicia en el Nilo para reconstruir las posiciones de las tierras borradas por las crecidas es el arquetipo de ese cambio hacia una nueva competencia espacial de posicionar.

A nivel de la historia cultural puede rastrearse la construcción de los siste-

mas formalizados de marcos, con sus ejes de referencia que los convierten en espacios canónicos (de posiciones objetivas respecto a ciertos puntos aceptados por todos). Los marcos suelen estar jerarquizados de modo que pueden comprenderse y hacerse conscientes situándolos en otro marco mayor (metaconocimiento). La psicología cognitiva del procesamiento de la información ha propuesto un modelo de la inteligencia para resolver problemas como un proceso de búsqueda en un espacio determinado. Newell y Simon (1972) hablan de un sujeto que ante el ambiente objetivo de la tarea, se representa la situación como un «espacio del problema» que el sujeto va construyendo a medida que se interna en el ambiente de la tarea. En este caso el espacio es una especie de «forma» o metáfora, de gramática general para pensar. Si consideramos que el pensamiento se ha construido con operadores culturales externos sobre espacios reales, el modelo de Newell y Simon más parece un efecto de esta interiorización de la composicionalidad espacial externa original del pensamiento, que un modelo o metáfora interna para copiar fuera por las máquinas.

3.1.3. *De Euclides al cartesianismo: del espacio visual al espacio notacional verbal*

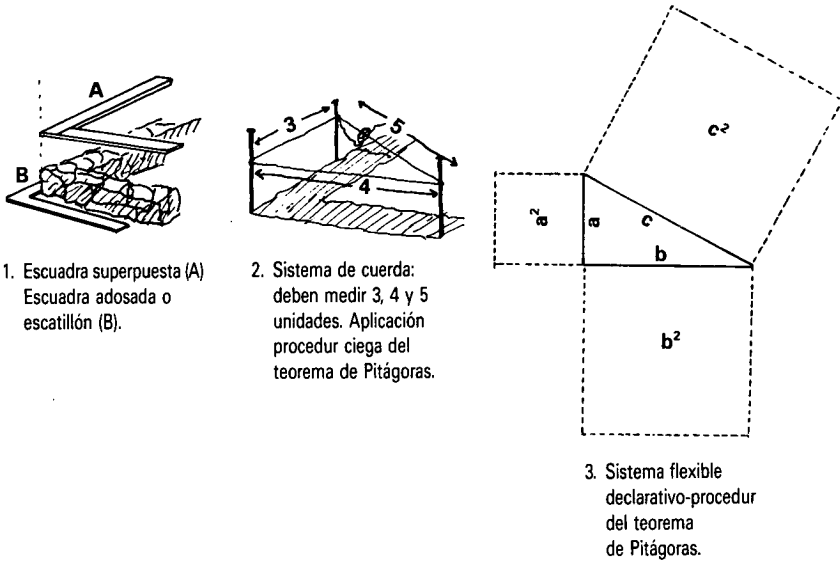
Si operamos con instrumentos psicológicos que trabajan sobre el espacio natural del niño de manera enactiva, es decir, de modo que, pese a seguir siendo visible tal espacio es ya tan cultural como natural (como cuando usamos un metro o una regla dentro de un juego dramatizado en un espacio de recorrido real), estamos sin duda en un plano visomotor que mantiene a la vez las características de ambos espacios. Este suele ser el espacio de la mayoría de los oficios y trabajos manuales, en el que se superponen y suman unos operadores culturales ya euclidianos pero muy enactivos que pueden manejarse sin abandonar el terreno seguro del espacio natural. Podemos traducir este espacio instrumental (por ejemplo, las iteraciones que supone una regla o un metro, a formulaciones verbales en el lenguaje cotidiano (tantos metros) y a su vez éstas a otro código notacional matemático más abreviado y formalizado como el algebraico. Pensemos por ejemplo en el teorema de Pitágoras y el concepto numérico de segunda potencia (cuadrado). Este teorema expresado verbalmente no es comprensible para el niño. Desde luego, puede aprender un sistema de reglas para aplicarlo. Por ejemplo, un albañil puede perfectamente manejar una escuadra (un instrumento psicológico muy antiguo en construcción) para hacer bien una esquina, pero puede aplicar otro conjunto de instrumentos psicológicos un poco más elaborados: la fórmula de tensar una cuerda con tres estacas que mantengan separaciones de 3, 4 y 5 metros. Cuando los tres segmentos de cuerda tengan estos valores la esquina estará correcta, aunque el albañil no sepa el teorema de Pitágoras. Por supuesto, un arquitecto puede operar con papel y lápiz, regla de cálculo o calculadora, para cuadrar la esquina con cálculo trigonométrico conociendo sólo alguno de los valores y admitiendo una variedad total de valores en los catetos y la hipotenusa y no sólo los tres números «mágicos» 3, 4 y 5 (ver Figura 1).

El alumno no podrá realmente construir una buena geometría si no construye el conocimiento espacial sólidamente sobre el plano visual, con operadores potentes y sólo entonces transfiere esas patentes operaciones externas a otras operaciones etiquetadas, verbalizadas y abreviadas con marcadores notacionales.

Porque cada uno de estos procesos de traducción supone el uso de un medidor o instrumento psicológico externo (una herramienta cultural) para actuar, no ya sobre un contenido real, sino sobre otro medio o instrumento psicológico.

FIGURA 1

Tres instrumentos culturales y tres procedimientos cognitivos para construir un ángulo de 90°



Una persona domina fácilmente esa escalera de mediaciones cuando la ha ascendido escalón a escalón. Por ejemplo, cuando el niño ha aprendido a jugar a los barcos no le cuesta gran trabajo utilizar una notación verbal cartesiana para situar una posición en un plano (4-G: tocado uno de cuatro). Pero cuando el niño no ha ascendido toda la escalera y el discurso del maestro se sitúa en uno de los escalones de mediación más elevados, lo más probable es que no comprenda lo que el código significa y no lo aprenda, o que, de aprenderlo, lo captado sea sólo el formalismo externo (un significante con un ignoto significado para él casi mágico) y no su significado real.

La adquisición, pues, de los sistemas de operadores no estará completa hasta que no se pase de los instrumentos psicológicos que operan en el nivel visomotor y manipulativo (nuestros «mangos» cognitivos) al de las simples etiquetas o marcadores de operaciones, los símbolos que operan en el terreno verbal externo e interno. Es decir, hasta que no se lleven estos operadores hasta un plano notacional muy formalizado y se verifique la practicabilidad de esa escalera de mediaciones indirectas en los dos sentidos, ascendente y descendente. Igual que Descartes consiguió formalizar discreta y verbalmente el conocimiento geométrico con la geometría analítica, permitiendo pasar de la matemática espacial visual a la aritmética y el álgebra notacionales y viceversa, el niño, a un nivel más inicial, debería ser capaz de operar externamente con instrumentos que trabajen analíticamente tanto en el *plano* espacial (representación simultánea) como en el *plan* o secuencia verbal de un algoritmo expresado verbalmente o con una notación más abstracta. Se trata en último término de pasar de una composicionalidad visual y externa a la composicionalidad verbal que muchos psicólogos y lingüistas suponen innata.

3.1.4. *De la rotación a la revolución: operar dentro del marco (rotación) y fuera de él o respecto a él (perspectiva)*

Los psicólogos han tendido a pensar que las rotaciones eran una especie de operación mental innata y maravillosamente indicativa de las capacidades espaciales de los sujetos. De hecho los tests de inteligencia raramente prescindían de ellas. La evidencia que nosotros tenemos es muy distinta (Del Río, 1986). Más bien parecen ser una operación cultural adquirida. De hecho las Rotaciones planas abstractas son la operación espacial más difícil para la mayoría de los niños que aún no han dado geometría. Sin embargo, rotar bien configuraciones planas y tridimensionales es básico para aprender y comprender geometría, porque la rotación de las líneas engendra las figuras planas y las de éstas («revolución») las volumétricas. Por otra parte, sólo rotando las figuras se pueden independizar del marco en que han sido presentadas para poder así analizar sus características geométricas intrínsecas. La perspectiva parece ser, en gran parte, como ya indicaba Olson, un tipo de rotación (una rotación de todo un conjunto de configuraciones junto con el marco en que están, dentro de otro marco o bien un giro de ese otro marco en el que se incluiría al sujeto observador, alrededor del primer conjunto, Del Río, op. cit). La construcción cultural, con operadores externos, de un conjunto suficientemente variado de estrategias de rotación (y hay más de una estrategia o procedimiento al contrario de lo que parecen pensar muchos psicólogos mentalistas que estudian las rotaciones) sería, pues, otro objetivo necesario a lograr en una buena instrucción de pregeometría.

3.2. **Cómo enseñar: el método instrumental en el diseño de actividades significativas**

Nos deberíamos remitir aquí a toda una serie de principios o supuestos necesarios para enseñar que se desprenden de una perspectiva histórico-cultural en educación, de validez general y que hemos tenido en cuenta en este programa (el lector puede consultar Alvarez, 1990, y Del Río, 1990). Sólo nos gustaría destacar que en el caso concreto de la geometría había que prestar una redobladada atención a algunos de ellos:

— El proceso de diseño de las escaleras de mediadores instrumentales externos para la construcción de los sistemas de operadores espaciales. Realizamos así una recopilación de instrumentos que mantenían una buena validez para pasar —con el mismo instrumento u operador— del plano visomotor al plano notacional. Especialmente importante era esta capacidad de validez del operador cultural para transitar de un marco o contexto a otro (por ejemplo, una regla que pueda superponerse a actividades tanto en el suelo como sobre una mesa grande, el papel y la pantalla del ordenador).

— La necesidad de que las mediaciones sociales e instrumentales estén intrínsecamente articuladas. Es decir, que sea necesario un mediador instrumental para mantener una actividad social conjunta, al tiempo que sea necesaria una mediación social (y por tanto comunicar, hablar o codificar para transmitir a otro el uso del instrumento de modo que éste se hace consciente) para usar una mediación instrumental. Esto obliga al aprendiz a un proceso de actividad no

sólo sobre el objeto o sobre la realidad, sino sobre el propio instrumento, y por tanto metacognitiva en un sentido realmente instrumental y externo.

— La necesidad de los conocimientos conceptuales (qué es un grado, un centímetro, etc.) se refieren a procedimientos instrumentales u operaciones con la herramienta cultural y que los procedimientos exijan la explicitación comunicativa de esas etiquetas conceptuales. Es decir, en la disyuntiva entre conocimiento procedural (saber cómo) y conocimiento declarativo (saber qué) que se plantea en psicología de la instrucción, resolverla haciendo coincidir ambas en el diseño educativo de manera mutuamente dependiente.

— Por último, la necesidad de que la regulación del avance o evaluación de cómo van las cosas que se hace el aprendiz, esté organizada para pasar por el instrumento, de modo que el alumno vaya pasando de depender del juicio evaluativo y de la ayuda por parte del maestro a utilizar automáticamente el instrumento como control suficiente de su propia ejecución y aprendizaje.

Veamos ahora, sin poder entrar, como decíamos, en todo el sistema de operadores que realmente recopilamos y trabajamos, algunos de los dispositivos mediadores que pueden permitir construir en el niño ese sistema de operadores espaciales (pregeometría) recogidos en los epígrafes 3.1.1. a 3.1.4. Para una mayor claridad no repetiremos qué enseñar (el lector puede remitirse por orden a estos epígrafes), sino que entraremos en cómo hacerlo, en los epígrafes 3.2.1. a 3.2.4.

3.2.1. «El camino de la cosa al niño y de éste a aquélla pasa a través de otra persona» (Vygotski)

Pasar desde un espacio en que uno se autorregula de manera natural al moverse sobre el terreno a un espacio en que uno se autorregula de manera intermediada por instrumentos o conceptos instrumentales como el de centímetro o grado, supone, como ya sostenía Vygotski, que este último tipo de regulación en realidad es una «heterorregulación» interiorizada. Es decir, para regular su funcionamiento espacial sirviéndose de instrumentos (calculando las distancias no por el esfuerzo o la expectativa motriz sino por la medida), el niño debe primero renunciar a sus poderosos sistemas naturales y eso no lo hará si no es intrínsecamente necesario a la actividad. La única manera en que podemos, por tanto, llevar el instrumento al niño de manera realmente constructiva es estructurando la actividad de modo que el aprendiz tenga en realidad que regular la conducta de un compañero: entonces su sistema natural no sirve, es preciso dar al compañero claves objetivas, claves fuera del propio cuerpo. La introducción aquí de los instrumentos psicológicos adecuados permitirá que éstos se conviertan en el puente adecuado para la cooperación e interacción de ambos aprendices. El instrumento psicológico se utiliza, pues, primero como un instrumento social, para otro.

En nuestro caso, por ejemplo, se realizaban tareas de exploración sobre el suelo (auténticas aventuras de exploración en un formato de aventura) que requerían el acierto en la adopción de caminos, giros y distancias. El tipo de mediadores eran al principio analógicos (cuerdas, por ejemplo) o discretos pero adecuados al propio organismo (pasos). Muy pronto, sin embargo, en el momento en que el patrón de heterorregulación se había aceptado, sustituimos a la pareja de cooperación *aprendiz/aprendiz*, por el triángulo *aprendiz/robot/aprendiz*.

En este caso era preciso dirigir las consignas o directrices a un instrumento objetivo que sólo aceptaba determinadas unidades discretas de orientación y de distancia. Se trataba de un pequeño juguete-robot (el «big-trak», ver Figura 2) que aceptaba procedimientos sencillos que incluían comandos de distancia, orientación y acción (disparar un cañón luminoso). El escenario, establecido por los propios alumnos, incluía caminos, puentes, obstáculos, etc., que el robot debía superar para cumplir su misión. Aunque el reconocimiento inicial de ese escenario lo realizaban los niños desde su espacio «natural», la necesidad de cooperar con los compañeros les llevaba a establecer unidades de medidas instrumentales pactadas o convencionales con los instrumentos disponibles en el escenario (a distancia de x baldosas, o sillas, o pasos, o unidades de cuerda, etc.). Sin embargo, esa primera mediación se veía en seguida presionada y obligada a ser «traducida» o remediada a otras unidades, las del big-trak. Llegaba un momento en que el conjunto de operaciones externas comunicadas al compañero-a y hechas así conscientes, se interiorizaban por el niño que pasaba a pensar y operar directamente desde las unidades finales más mediadas, adquiriendo una gran pericia en el «pensar» en esas unidades discretas de distancia y orientación.

FIGURA 2

El robot utilizado en el programa, cuadro de mandos e instrucciones programables.



El big-trak

Cuadro de mandos



Esquema de instrucciones programables

- PARA ENSAYAR FUNCIONAMIENTO 
- PARA LIMPIAR LA MEMORIA 
- PARA PONER EN MARCHA 
- FLECHAS    
- PARA DISPARAR 
- PARA HACER UNA PAUSA 
- PARA CANCELAR LA ULTIMA ETAPA 
- PARA REPETIR 
- PARA COMPROBAR 
- PARA HACER FUNCIONAR EL VOLQUETE 









El espacio subjetivo, inclusivo, envolvente en que el niño se mueve cuando emplea sus funciones espaciales naturales, estaba siendo sistemáticamente sustituido por un espacio social, comunicativo, instrumental, operado «como desde fuera» y convertido así en el espacio objetivo y euclideo que conocemos en nuestra cultura.

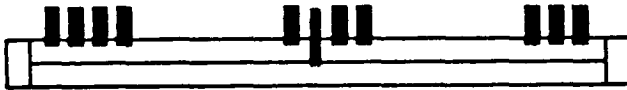
Este proceso no es, sin embargo, simple. En este trabajo utilizamos toda una serie de instrumentos mediadores cuidadosamente diseñados para permitir un fácil uso sobre el espacio «natural» y que a la vez permiten discretizarlo. Se trata, pues, de insertar instrumentos que sean a la vez analógicos al espacio natural de la tarea y discretos y convecionalizables, de modo que el niño pueda encontrar en esta etapa fácilmente el camino desde un tipo de función espacial natural al otro (la espacialidad cultural euclidea). Y, a la inversa. Esto le da seguridad y permite apoyar firmemente el espacio instrumental sobre la estructura de la acción, sin la cual no tendríamos actividad significativa.

De todos estos instrumentos nos interesa resaltar algunos:

— ábacos lineales para llevar la cuenta de pasos o de cualquier otra unidad de medida. Los ábacos realizaban una función de cuentakilómetros o de cuenta-grados (ver Figura 3).

FIGURA 3

Abacos para fijar la memoria de posición por recuento y registro de distancias. Se han utilizado ábacos de alambre con cuentas como el de la figura y, alternativamente, tacos encajables tipo lego de 20 mm de arista.



— reglas contextuales: los niños construían reglas estableciendo una unidad adecuada a la tarea o al operador central de ésta: por ejemplo, la longitud del bigtrak (un pie inglés) se convirtió rápidamente en unidad necesaria para la tarea que fue sustituida al principio por un pie del propio niño, cuartas, cuerdas..., hasta que se realizó una regleta de cartón o de papel que permitía realizar las iteraciones necesarias fácilmente. Cuando estas actividades pasaron a realizarse en un plano un poco más «formal» (la mesa de trabajo), el terreno real fue sustituido por dibujos y planos sobre el papel. Cuando a su vez esta misma tarea del plano-mesa se llevó al plano-pantalla de un programa de LOGO, la regla fue construida de modo que se adaptaba a las unidades de avance de la tortuga en el monitor concreto que teníamos nosotros (ver Figura 4).

— brújula analógico-digital (ver Figura 5). En la medida en que anticipamos que el problema del paso del sistema tetra-axiométrico canónico natural (los cuatro ejes frontal, posterior más los dos brazos) a un sistema discreto convencional de canon múltiple como el que se maneja en geometría, plantearía problemas que llevarían al niño un excesivo esfuerzo como para sostenerse en el marco de

FIGURA 4

Regla de unidades LOGO para trabajar sobre papel y pantalla.
(Tamaño real, 21 cm).

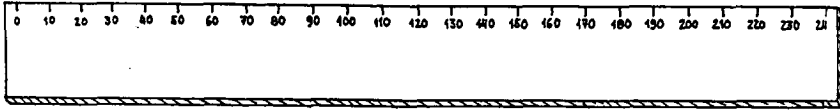
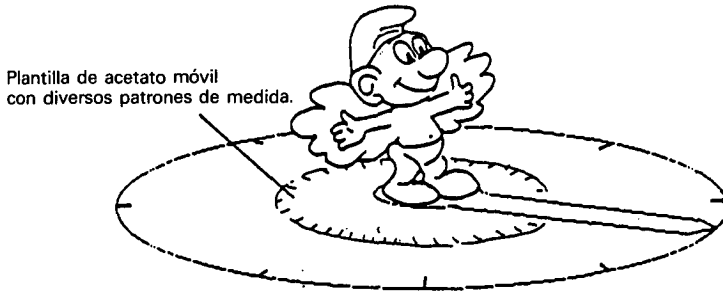


FIGURA 5

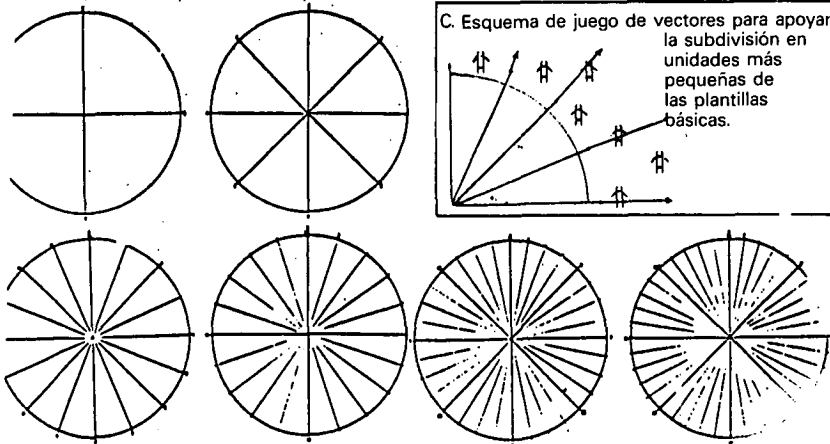
Brújula de giros analógico-digital con el juego de plantillas transparentes.

A. Brújula analógico-analítica (tamaño real, 25 cm).

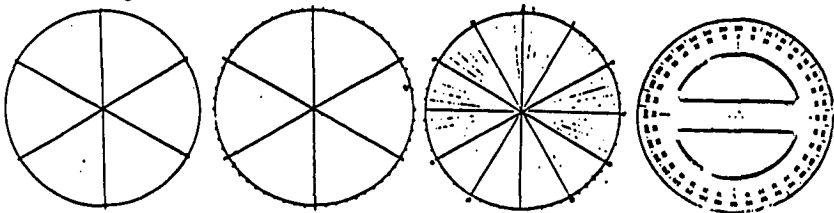


B. Plantillas con diversos patrones (a escala reducida).

B1. Múltiplos «naturales» del sistema tetraxiométrico corporal, con 1, 2, 4, 5, 8 y 10 unidades por cuadrante.



B2. Múltiplos del sistema convencional geográfico, hexaaxiométrico, con 1,10 y 60 unidades por área hexagonal.



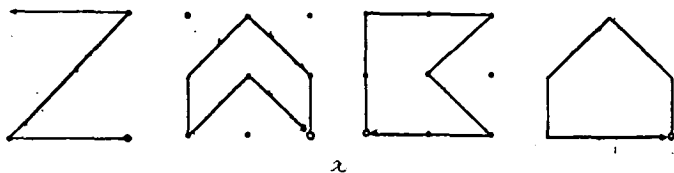
significación de la actividad, establecimos un mediador suficientemente significativo en ambos planos (natural y geométrico) como para que permitiera hacer la transición rápidamente y sin fallos. La brújula fue, pues, uno de los instrumentos que aportamos completamente terminados. La brújula montaba una aguja orientable desde un pitufo totalmente «natural» y se movía, por tanto, analógicamente. Pero a la vez se le podían superponer plantillas de acetato que permitían ir discretizando ese esquema inicialmente natural, de modo que los cuatro puntos naturales se hacían discretos y se subdividían en ocho, dieciséis, etc.

La paradoja de trabajar sobre divisiones indefinidas se resolvía desde actividades significativas que permitían ver esas divisiones matemáticas como tareas instrumentales concretas: por ejemplo, matar marcianitos desde un cañón con control con una brújula de pocas particiones, dejaba escapar a todos los marcianitos situados entre muesca y muesca, lo que aconsejaba recurrir a un acetato con más divisiones. Con esta convencionalización progresiva del campo de la brújula era ya fácil la aceptación de sustituir el campo inicial de cuatro puntos por uno de seis (que es el que subyace al patrón usual hoy en nuestra cultura de 360°).

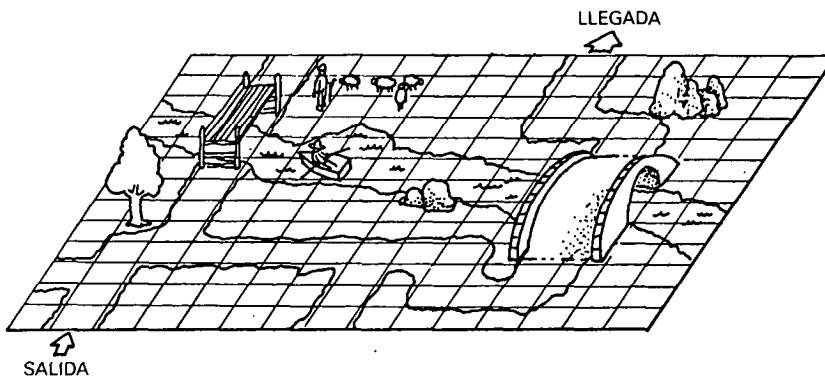
— figuras/mapas. Sólo queda añadir que otra de las tareas en este epígrafe suponía llevar al niño desde una percepción de formas basada en el recuerdo natural «eidético» o por configuraciones (memoria visual natural) a interpretar las imágenes algorítmicamente como movimientos o instrumentos u otras formas insertas en la imagen natural. De ese modo, si al principio el niño veía un mapa de recorrido como una forma concreta (véase Figura 6), una vez que dominaba el proceso de mediar el mapa con un instrumento de medida para convertirlo

FIGURA 6

a) Configuraciones estructuradas en recorrido.



b) Mapa de recorrido con presentación configuracional y enclídeana superpuestas.



en una acción instrumental, el niño interpretaba las formas como algoritmos dotados de un significado y la memoria visual natural se sustituía por una memoria instrumental. En una expresiva frase de Vygotski, podemos decir que si al principio el niño «pensaba recordando» (miraba al mapa tratando de desvelarlo como configuración) al final «recordaba pensando» (era capaz no sólo de interpretar la forma como un algoritmo, sino de reconstruirla en la medida en que conocía una estructura que se le podía aplicar a esa forma).

De especial relevancia es resaltar aquí que la actividad no podía funcionar bien si la tarea no era *a la vez* significativa en relación con el *sentido* (es decir, cargada de motivación para el niño) y significativa en relación con el «*significado*» (lo que los discípulos de Vygotski han denominado en educación una actividad «rectora», es decir, una tarea que reconstruía la manera de pensar permitiendo el acceso, dominio y construcción de nuevos operadores culturales). Una prueba de que ese papel doblemente significativo del instrumento de mediación se consiguió aquí, está en la anécdota repetida (y provocada por nosotros que nos cuidamos de que sólo hubiera *una* brújula analógica, *una* regla-LOGO, *un* big-trak, etc.) de que el instrumento mediador necesario para acceder a la nueva forma euclideana de resolver la tarea, era objeto de rigurosos turnos entre los equipos y de discusiones violentas y trifulcas cuando alguno de ellos se saltaba este orden: el instrumento psicológico se había convertido en la clave, en el centro atencional del proceso, y poseía sin duda esa doble significación.

A la vez, también hay que resaltar que el instrumento no se apropia realmente bien y no se generaliza, no sólo si no se utiliza en situación cooperativa y comunicativa (heterorregulación) sino que además es preciso que se produzca una «transición contextual» o ecológica del instrumento. Así, un operador, como una regla, se adecua realmente al proceso general y matemático de medida, si no se utiliza cerradamente en un contexto limitado (en un escenario escolar típico en que el niño puede usarla dentro de un pensamiento guiado por guiones, escenas y acciones «típicas» que quizá no comprenda muy bien aunque reconozca como adecuados) sino que se hace transitar entre distintos contextos ejercitando siempre la misma función. Para ello por supuesto habrá que diseñar esas transiciones externas (que se convertirán luego en una auténtica descontextualización o generalización cognitiva), de modo que sean esenciales en el sistema de la actividad significativa en que actúa el niño.

3.2.2. «Por el espacio, el Universo me supera y me devora como a un átomo. Por el pensamiento, soy yo quien lo supero» (Pascal)

Hemos visto cómo puede pasar el niño a objetivar euclídeamente, a «culturar», un espacio para hacerlo geométrico. Pero hasta ahora el niño ha tomado conciencia de los nuevos operadores pero no del marco o escenario en que éstos actúan y que permite organizarlos en un sistema. La construcción de un «contexto intralingüístico» es básico para poder afirmar que el niño ha sido capaz de desarrollar del todo la formalización del lenguaje verbal e independizarlo lo más posible del contexto visual enactivo exterior. Algo parecido ocurre con el espacio geométrico. Lo que se dice o hace, lo que se afirma o razona, se sitúa en un contexto referencial. Que este contexto sea implícito o invisible sólo significa que estoy tan metido en él que no lo veo, o que no le he hecho consciente

que es aún ese espacio envolvente que «me supera», como dice Pascal. En general suele implicar que no he operado instrumentalmente sobre él, como sobre un objeto, para «conocerlo» instrumentalmente. Pasar del espacio inclusivo natural al espacio geométrico no se logrará, pues, del todo hasta que no objetivemos el escenario de las operaciones espaciales.

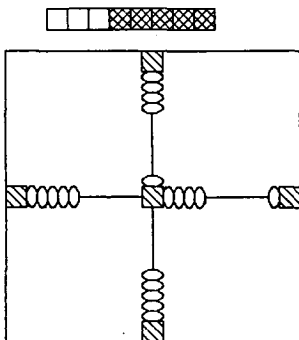
El trabajo a este nivel fue tan variado y extenso que resulta más difícil que en el apartado anterior resumir o seleccionar aquí los operadores culturales utilizados.

Debemos comenzar por un trabajo sistemático de jerarquización y transición «ecológica» de la acción desde un marco a otros de los marcos culturales habituales en la escuela y el hogar: hoja de papel, mesa, suelo, pizarra, pantalla, etc., construyendo mundos narrativos o sistemas autorreferenciales de estos marcos. Una de las formas para lograrlo es el trabajo con mapas. Los utilizados van desde la construcción y uso de todo tipo de mapas (con codificación gráfica, topológica, analógica, euclideana, verbal, etc.). Muy especialmente hay que hablar de los instrumentos o escenarios «cuadrículados» o dotados de un sistema de coordenadas que permitía después un juego flexible de definición de posiciones. En este sentido se utilizaron cuadrículas enormemente diversas, en marcos cuadrangulares y redondos.

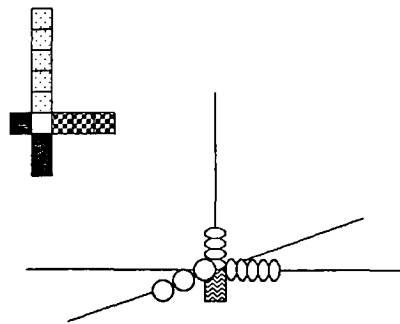
Especialmente importante una vez objetivado el límite del marco es establecer sistemas para posicionar dentro de él. Al uso de diversas categorías de operadores en los diversos tipos de mapas hay que añadir aquí el uso de ábacos cartesianos especialmente realizados para este programa (ver Figura 7). Un ábaco cartesiano lleva sencillamente memoria de los movimientos discretos (los «pasos») dados en un marco en una serie de orientaciones limitadas y discretas (por ejemplo, los cuatro ejes cardinales). Por supuesto, el marco puede ser volumétrico y entonces el ábaco se complica un poco más. Lo importante es que el uso de un instrumento manipulativo preciso pero muy manejable a la vez, permite al niño dominar el sistema cartesiano mucho antes de que se acerque siquiera de lejos a la notación cartesiana.

FIGURA 7

a) *Ábacos de posicionamiento y memoria de movimientos en cuatro ejes sobre plano.*



b) *En cinco ejes (tridimensional).*

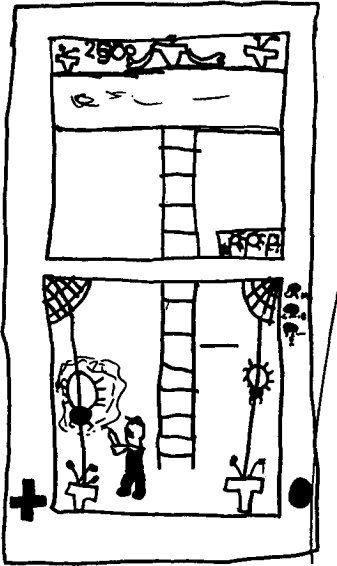


Especialmente importante también es hacer compatibles los marcos cotidianos para el niño y manejados desde lo que podemos denominar «paradigma de relato» (Del Río, 1986, 1991) y aquellos marcos muy formalizados de la geometría o del entorno informático actual, claramente estructurados en el «paradigma mecánico». El trabajo con «maquinitas de juegos» y con esquemas fue enormemente útil para este objetivo: los niños sacaban mucha mayor puntuación con una maquinita nueva (en la que nunca habían jugado) cuando previamente se realizaba un doble tipo de estructuración contextual: un «guión» (Schank y Abelson, 1977) y un esquema procedural euclideano con todos los pasos y posiciones integradas en el marco de juego de la máquina. Las descripciones en dibujo de la máquina por los niños que habían jugado sin hacer esta tarea previa diferían claramente de los que habían jugado tras realizarla (ver Figura 8).

FIGURA 8

Descripción del guión de juego por un niño tras haber jugado: a) sin conocer el esquema explícito; b) conociendo el esquema explícito (la maquinita de juegos es una «clásica» de Nintendo: «Green House»). Obsérvese el paso del paradigma de relato a una descripción notacional con estrellas y repeticiones del dibujo para señalar los pasos o movimientos programados en la máquina. El esquema c) representa todas las posiciones o figuras recogidas en el programa de la máquina.

a)



*Tienes que matar los gusanos
y las arañas sin que se coman
las plantas*

b)

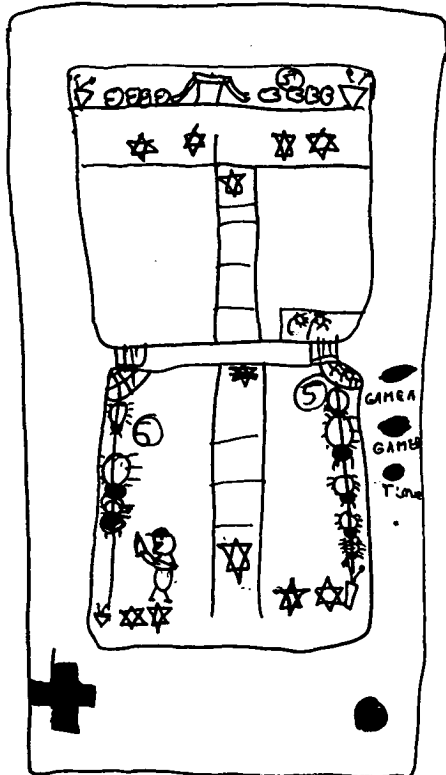
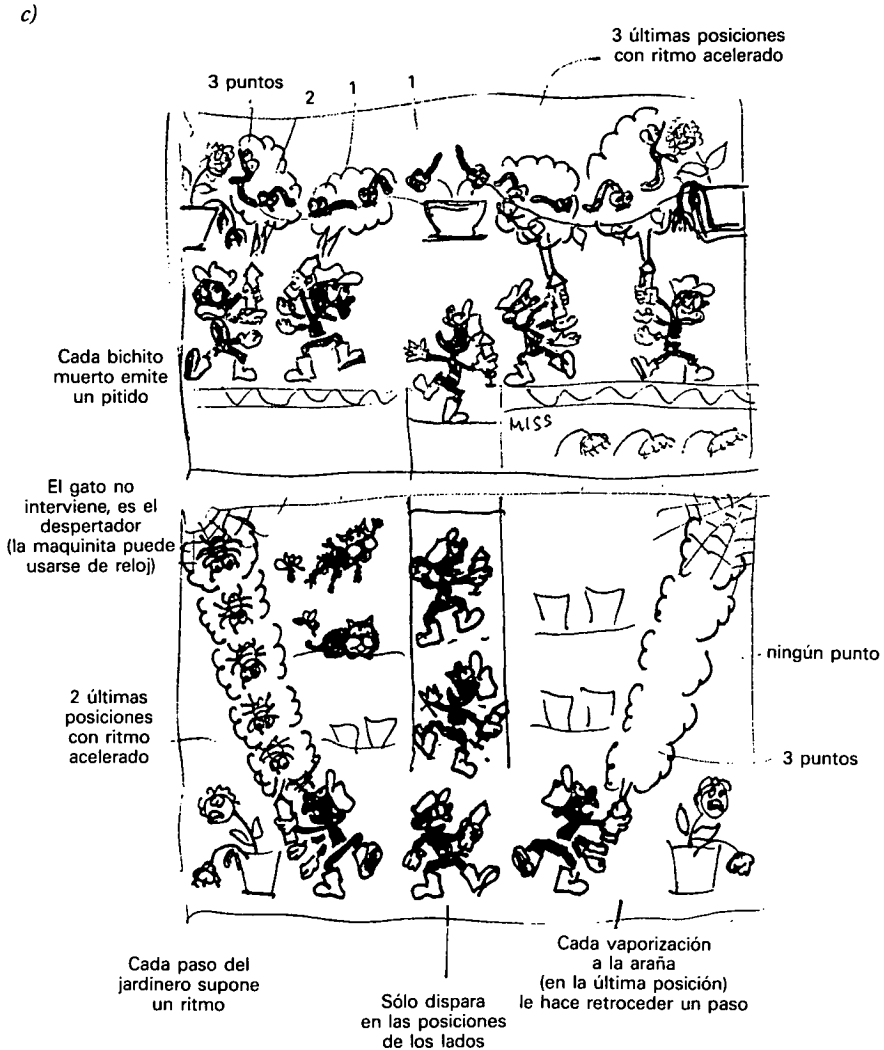


FIGURA 8 (continuación)



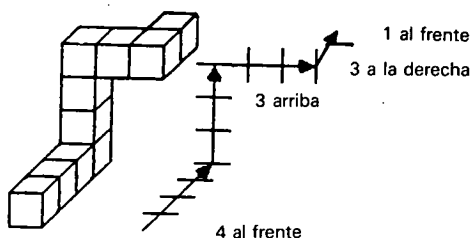
3.2.3. «Los matemáticos son como los franceses: se les diga lo que se les diga ellos lo traducen a su lengua y desde ese momento se trata de algo diferente» (Goethe)

Una cosa es trabajar con instrumentos psicológicos que se sitúan a la vez en el plano visomotor y en el verbal, y con una fuerte apoyatura, por tanto, en la manipulación y la acción, además de en la cooperación y la comunicación, como estamos haciendo hasta ahora, y otra muy distinta es trabajar en el marco y dentro de lo que podemos llamar «el formato escolar»: una exposición oral y escrita en un lenguaje muy formalizado y con ausencia de manipulaciones y de comunicaciones semánticamente significativas. Mientras en el primer caso

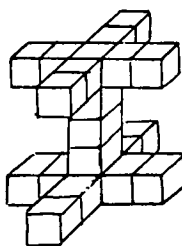
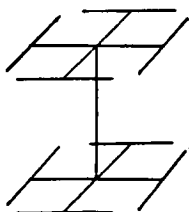
FIGURA 9

Modelos de cubitos y alambre utilizados para las dos estrategias enseñadas de rotación tridimensional.

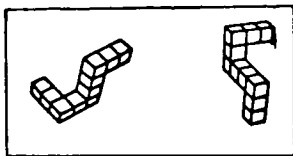
- a) Estrategia de recorrido en árbol para las figuras tridimensionales de Shepard y Metzler (1971).



Modelos de alambre y de cubos encajables para adquisición de la estrategia de recorrido en árbol. Para troncos, raíces y ramas —y para cada una de éstas a su vez— se emplean cubos de distinto color.



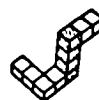
- b) Estrategia por rotación sucesiva de ejes para resolver las rotaciones tridimensionales.



1. Localización del eje principal.



2. Igualación del eje principal.



3. Igualación o comprobación del segundo nivel de ejes.

4. Igualación o comprobación del tercer nivel de ejes.

estamos trabajando en lo que hemos llamado un sistema de operadores con un gran predominio de los «mangos» y una presencia controlada de «etiquetas», en el segundo caso el predominio de las etiquetas es absoluto. Las mediaciones finales y más indirectas, más alejadas de los hechos, son el terreno en que se mueve el discurso y la acción escolar. El niño trabaja con representaciones y no con acciones, con conceptos y no con instrumentos o cosas, con palabras o notaciones y no con los operadores de donde éstos proceden. Por supuesto, el niño puede hacer esto si ha ascendido paso a paso y con solidez la escalera que sustenta esas notaciones, palabras y conceptos, pero ése no es siempre el caso.

Por eso nuestro programa no estaba completo si no éramos capaces de llevar al niño desde ese terreno de batalla con instrumentos psicológicos en que habían cosechado sus primeras victorias, hasta el terreno verbal y notacional a secas, mucho más árido, en que tendrían que vérsalas muy probablemente con la instrucción convencional de la geometría.

Todo un repertorio de instrumentos que se caracterizaban por la transición de los mangos a las etiquetas, de la acción a la notación o de una notación a otra, fue empleado en esta etapa:

— juegos de memoria de posiciones de números como el «Simón» (que utilizamos en la versión visomotora de la maquina y en formatos de papel y lápiz enormemente áridos y escolares desde el estímulo inicial de aquélla).

— tableros y máquinas de juegos, actividades de descripción de marcos, figuras, itinerarios, etc., en base a los movimientos con los instrumentos anteriores (como ábacos, reglas, brújulas) pero en formatos altamente económicos de notación).

— juegos que implicaban la necesaria traducción desde sistemas de notación cartesiana a otros sistemas de notación.

En general, se hizo hincapié en la aceptación y el trabajo de operacionalizar cualquier tipo de transición de las operaciones básicas a diversos marcos y a los *sistemas notacionales que les suelen ser propios*. Por ejemplo, el paso desde el trabajo en el suelo con el big-trak, gracias a la regla LOGO y a la brújula analógico-digital, les permitió hacerse en un tiempo escaso (menos de dos horas) con todos los procedimientos de la tortuga de LOGO en el ordenador y manejar procedimientos de LOGO sencillos sin la menor duda.

La presencia directa de los operadores que dan base a los sistemas notacionales parece, pues, una etapa necesaria para que el niño opere después con esas etiquetas de manera segura y significativa. Para que el lenguaje «matemático» no les suene a una cosa totalmente distinta.

3.2.4. «... ¡Han llegado noticias del frente!»

«... ¿Por qué llegan siempre noticias del frente y nunca llegan de los lados?» (Hermanos Marx, «Sopa de Ganso»)

La manera natural de posicionarnos frente a las cosas exige un ajuste progresivo basado en la acción y el dominio del territorio. Los patrones de reconocimiento visual actúan por un sistema «eferente», percepción basada en la acción para que actúe bien el sistema perceptivo (Zaporozhets, 1967). Nos situamos alrededor del perceptible hasta situarlo en el marco familiar que permita superponer nuestra imagen mental, verlo bien (seleccionamos una perspectiva «con los pies» o rotamos nosotros alrededor del objeto). O bien manipulamos si po-

demos el objeto con las manos, lo «rotamos» (seleccionamos una perspectiva con las manos).

Estas operaciones básicas pueden interiorizarse sólo si conocemos bien la estructura de los objetos en cuestión. Por ejemplo, nuestros datos (Del Río, 1986) demuestran que el niño realiza mucho mejor las rotaciones de figuras conocidas que las de figuras abstractas que le suelen proponer en los tests (algo muy obvio y esperable para el sentido común pero que había que demostrar, tan fuerte es el supuesto de innatismo de la psicología respecto al espacio).

Porque las rotaciones son enormemente importantes en geometría. Malamente va a comprender el niño que un cono es la rotación o revolución de un triángulo si no puede visualizarlo y se queda sólo con las palabras secas entre las manos. Esto implicaba que la rotación era «enseñable» y que había que enseñarla. Y el primer supuesto, como hemos visto, es que no podemos rotar una figura cuya estructura no conocemos. El análisis estructural de la figura y su rotación formaban, pues, parte de esta actividad, insertada también en un contexto de juego y con rotación, primero real, en grupo, y con posibilidades de recortar, superponer, etc. El dominio de la estructura de la figura y de la rotación llevaba a que la rotación no sólo se realizaba al nivel de reconocimiento de una rotación correcta (como ocurre en los tests) sino que los niños eran capaces de «construirlas» sin modelo, es decir, de dibujar las rotaciones posibles y las no posibles.

Con todo, las rotaciones planas son fáciles (si se conoce la figura) comparadas con las tridimensionales o volumétricas. El conocimiento de la estructura de una figura tridimensional es mucho más difícil. Pero no imposible. En el programa trabajamos con figuras sencillas relativamente (las figuras tridimensionales de cubitos que se manejan también en los tests de rotaciones). Pero lo hicimos con cubitos de verdad primero y manejando instrumentos psicológicos potentes que permitían imponer una estructura algorítmica a la figura (dos metáforas y modelos distintos: de árbol y de itinerario, para interpretar cualquiera de estas figuras). Por ejemplo (ver Figura 8), una configuración tridimensional de cubitos puede conocerse bastante bien si supongo que tiene una raíz (o una serie de ellas) y un tronco y una rama (o una serie de ramificaciones). Puede también conocerse bien si adopto una posición más móvil de recorrido y me sitúo, como una hormiga-LOGO que recorre el árbol, describiendo en un procedimiento euclideo los pasos y giros necesarios.

4. CONCLUSION

Los niños de nuestro programa no sufrieron demasiado por prerequisites «naturales» o innatos que los hicieran más hábiles o inhábiles para la geometría. Por supuesto que había unas grandes diferencias de capacidades previas. Pero podemos suponer, a partir de los resultados posteriores al programa, que eran en gran parte culturales y que una adecuada enseñanza podía hacer más expertos espacialmente a los que lo eran menos. Las matemáticas mentales y la psicología mental del espacio resultaron ser, respetando la historia y el enorme instrumental aportado por la cultura, accesibles desde fuera, manejables por la educación.

Y, pese a la laboriosa arquitectura instrumental y motivacional, o gracias a ella, fue enormemente divertido, y no sólo para los alumnos.

Referencias

- ALVAREZ, A. (1990). Diseño cultural: Una aproximación ecológica a la educación desde el paradigma histórico-cultural. *Infancia y Aprendizaje*, 51-52, 41-78.
- DEL RÍO, P. (1986). *El desarrollo de las competencias espaciales: el proceso de construcción de los instrumentos mentales*. Tesis doctoral presentada en la Universidad Complutense de Madrid. Madrid.
- DEL RÍO, P. (en prensa). *Espacio y representación: la construcción histórico-cultural de los instrumentos mentales*. Madrid, Visor.
- DEL RÍO, P. (1990). La zona de Desarrollo Próximo y la Zona Sincrética de Representación: el espacio instrumental de la mediación social. *Infancia y Aprendizaje*, 51-52, 191-244.
- DEL RÍO, P. (1991). La representación de los problemas sociales en los medios de comunicación. Madrid. Real. Patronato de Prevención y ayuda a la minusvalía.
- LAVE, J. (1988). *Cognition in practice: Mind, Mathematics and Culture in Everyday Life*. Cambridge, MA. Cambridge Un. Press. Trad. cast. Barcelona, Paidós, 1991.
- NEWELL, A., y SIMON, H. *Human problem solving*. Englewood Cliffs, N. J. Prentice-Hall.
- OLSON, D., y BIALYSTOK, E. (1983). *Spatial Cognition*. Hillsdale, N. J. LEA.
- PIAGET, J. (1950). *Introduction à l'épistemologie génétique. Vol I. La pensée mathématique*. París, PUF. (Trad. cast. B. Aires. Paidós, 1975).
- PRIEBRAM, K. (1986). The cognitive revolution in mind/brain issues. *American Psychologist*, 41 (5) 507-520.
- SCHANK, R., y ABELSON, R. (1977). *Scripts, plans, goals and understanding*. Hillsdale, N. J. LEA.
- SAXE, G. *Culture and cognitive development: Studies in Mathematical Understanding*. Hillsdale N. J. LEA.
- STIGLER, J. W., y BARANESS, R. (1988). Culture and mathematics learning. En E. Rothkopf (Ed) *Review of Research in Education*. Vol. 15, pp. 253-306.
- THOM, R. (1989). En Guy Sorman. *Les vrais penseurs de notre temps*. París Fayard Trad. cast. Barcelona, Barral, 1991.
- TOULMIN, S. *Human Understanding. Vol. I: The collective use and evolution of concepts*. Princeton Univ. Press. Trad. cast. Madrid, Alianza, 1977.
- VYGOTSKI, L. S. (1982). Pensamiento y lenguaje. En *Obra seleccionada*, vol. II. Moscú. Pedagógica, 291-436.
- VYGOTSKI, L. S. (1983). Desarrollo de las operaciones matemáticas. En *Obra seleccionada*, vol. III, cap. 8.º, p. 200.
- WITTGENSTEIN, L. (1953). *Philosophische Untersuchungen*. Oxford. Trad. cast. Barcelona, Crítica, 1988.
- WITTGENSTEIN, L. (1974) *Remarks on the foundations of arithmetic*. Cambridge, MA, MIT.
- ZAPOROZHETS, A. (1967). *Vospriatie i Deistvie* (Percepción y Acción). Moscú. Prosvechenie.

«¡Pásame la brújula!» Un ejemplo de metodología
histórico-cultural en la enseñanza de las matemáticas.

Pablo del Río

CL&E, 1991, 11-12, pp. 27-54

Resumen: *El artículo revisa los supuestos innatistas y culturalistas de aprendizaje de las matemáticas, tomando partido por la perspectiva histórico-cultural y concluyendo cuáles son sus consecuencias para el diseño didáctico de las matemáticas y la elaboración de materiales educativos. Desde esos supuestos se expone un programa experimental de pregeometría en que, a partir de los datos de las psicologías cognitivas e histórico-culturales sobre el conocimiento espacial, se diseñan actividades educativas e instrumentos cognitivos culturales que permiten adquirir los conocimientos geométricos; es decir, pasar de las funciones o aptitudes espaciales naturales a las culturales o superiores.*

Datos sobre el autor: Pablo del Río es profesor de la Universidad Complutense de Madrid.

Dirección: Universidad Complutense. Facultad de Ciencias de la Información. Departamento de Comunicación Audiovisual. Avda. Complutense s/n. 28040 Madrid.

© De todos los artículos. Deberá solicitarse por escrito autorización de CL&E y de los autores para el uso en forma de facsímil, fotocopia o cualquier otro medio de reproducción impresa. CL&E se reserva el derecho de interponer las acciones legales necesarias en aquellos casos en que se contravenga la ley de derechos de autor.