DELAMBRE, SÁNCHEZ CERQUERO Y LOS MÉTODOS PARA CALCULAR LA LATITUD

A. GARCÍA SANTIAGO, J.F. LÓPEZ SÁNCHEZ

1. Introducción

Según Delambre[1], desde Tycho vienen los astrónomos calculando la latitud por dos observaciones de un mismo astro fuera del meridiano. Son muchos los autores que a lo largo del siglo XVIII tratan el problema, y dado que encierra cierta laboriosidad, se opta generalmente por introducir consideraciones que faciliten el cálculo como una latitud de estima, y tomar la declinación constante entre ambas observaciones para el Sol.

Parece ser que el primero que calculó la latitud con dos observaciones extrameridianas del Sol de una manera analítica fue Nicolas Fatio de Duillier en su Navigation Improved[2] (1728), ayudándose de tres triángulos esféricos. Du Bourguet[3] le atribuye al padre Pezenas[4] el método trigonométrico ordinario, esto es, la resolución de los triángulos sin latitud de estima y sin aproximaciones en la declinación para el Sol.Todos nuestros autores son partidarios finalmente del trigonométrico ordinario para la determinación de la latitud por las alturas extrameridianas del Sol, pero la diversidad de ecuaciones permite afrontarlo de muchas formas, y ese es el objetivo de este trabajo: analizar las presentadas por Mendoza (el único que hace la aproximación en la declinación), Du Bourguet, Delambre y Cerquero.

Anterior a ellos y muy popular entre los marinos fue el método de Douwes, que reduce el problema a unas ecuaciones simples y que con la ayuda de unas tablas lo hace casi inmediato. La solución de Douwes fue publicada en 1754 por la Socie-

[1] DELAMBRE, B.J.B. (1815) "Nouvelles recherches sur les méthodes qui servent à trouver la latitude par deux hauteurs d'un même astre hors du méridien". *Connaissance des Temps...pour l'an 1817*, 283-306, p. 284.

[2] Así indicado en SELLÉS, MANUEL A. (1986) "*Astronomía Náutica en la España del siglo XVIII*" (tesis doctoral). UNED. Madrid. p. 138.

[3] DU BOURGUET, J. B. E. (1821) "Sobre el método de hallar la latitud cuando no se puede observar la altura meridiana del Sol". *Almanaque Náutico para el año de 1824*, 23-28, p. 23. Este artículo es una reproducción de una carta que Du Bourguet envió al Barón de Zach y que fue publicada en "Correspondence Astronomique...",1820, 3, 242.

[4] PEZENAS, ESPRIT (1692-1776). Director del observatorio de Marsella desde 1728 hasta 1763. Jesuita. Su principal obra fue "*Astronomie des marins, ou Nouveaux éléments d'astronomie à la portée des marins...*" Avignon, 1766.

dad de Haarlem. En 1759 se publican sus tablas en Inglaterra, y en las Philosophical Transactions de 1760 viene la demostración de su ecuación realizada por Pemberton, pero para ser utilizada con las tablas simples de logaritmos. El método de Douwes es un método indirecto, esto es, utiliza una latitud de estima y mediante un proceso iterativo obtiene la latitud buscada. El proceso finaliza cuando latitud introducida y obtenida se aproximan suficientemente. La otra característica importante del método de Douwes es que su cálculo está basado en que el astro observado no presenta cambio de declinación entre las dos observaciones, lo que lo hace aproximado si el astro es el Sol (la declinación utilizada para este astro es la media de las dos posiciones).

Mendoza y Ríos analiza el problema en trabajos sucesivos, y aunque en 1791[5] defiende el método de Douwes, finalizará proponiendo una forma original del método trigonométrico en 1809[6]. Mantiene en su propuesta la declinación constante para el Sol, pero no la latitud de estima.

Delambre, al igual que Mendoza, volverá reiteradamente sobre este problema como lo atestiguan sus trabajos de 1807[7], 1815[8] y 1820[9] publicados en Connaissance des Temps. En el último de ellos defiende la conveniencia por su sencillez y rapidez del método trigonométrico directo, proponiendo unas ecuaciones para la resolución de los distintos triángulos.

En 1823[10] Sánchez Cerquero propondrá su versión del método trigonométrico directo defendiendo que es más general y expedito que el propuesto por Delam-

[5] MENDOZA Y RIOS, J. (1791) "Mémoire sur la Methode de trouver la Latitude par le moyen de deux hauteurs du Soleil, de l'intervalle de temps*..." Connaissance des Temps...pour l'an 1793*, 289

[6] MENDOZA Y RIOS, J. (1809) "A complete collection of tables for navigation and nautical astronomy with simple, concise and accurate methods, for ..." Second edition improved, T. Bensley, Londres.

[7] DELAMBRE, J. B. J. (1807) "Réflexions sur une nouvelle méthode de M. Ducum, professeur de navigation à Bordeaux, pour déterminer..." *Connaissance des Temps...pour l'an 1809*, 404-425.

[8] DELAMBRE, J. B. J. (1815) "Nouvelles recherches sur les méthodes qui servent à trouver la latitude par deux hauteurs d'un même astre hors du méridien" *Connaissance des Temps...pour l'an 1817*, 283-306.

[9] DELAMBRE, J. B. J. (1820) "Nouvelles réflexions sur la méthode de Douwes, et solutions diverses du problème où l'on se propose de déterminer la latitude par deux hauteurs observées hors du méridien" *Connaissance des Temps...pour l'an 1822*, 316-345.

[10] SANCHEZ CERQUERO, JOSE (1823) "*Reflexiones sobre el método de hallar la latitud en la mar por medio de dos alturas del Sol, observadas fuera del meridiano por...*" Madrid, Imprenta Nacional. Fue director del Observatorio de San Fernando en el periodo 1825-1847 y el estudio de su obra es el origen de estas páginas.

bre. De paso, mostrará que el propuesto por Du Bourguet en 1821 no considera todos los casos posibles y que realmente no aporta nada nuevo.

Partimos pues de que todos nuestros autores defienden el método trigonométrico ordinario como el más acertado para resolver el problema, y veremos las coincidencias y discrepancias entre ellos a la hora de enfrentarse a los tres triángulos. Pasemos a analizar este método en su concepción más general.

2. Método trigonométrico ordinario

2.1. Triángulo de las distancias polares: PBB'.

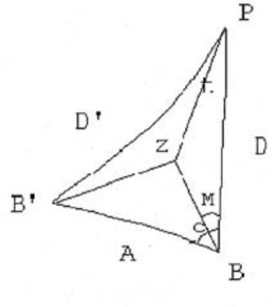

Figura 1

Datos del triángulo:
- D' distancia polar en B' ó e' la declinación
- D distancia polar en B ó e
- t tiempo transcurrido entre ambas observaciones

Incógnitas:
- lado A
- ángulo PBB' (1) ó PB'B (2) que llamaremos también c.

2.2. Triángulo de las distancias cenitales: ZBB'.

Datos del triángulo:
- ZB' distancia cenital en B' ó a' la altura
- ZB distancia cenital en B ó a
- lado A

Incógnitas:
- ZBB' (1) ó ZB'B(2) según elección en primer triángulo.

Dado que B es el vértice de menor altura $ZB' \leq ZB$

2.3. Triángulo del complementario de la latitud: PBZ ó PB'Z.

Si hemos elegido (1) es el triángulo formado por los vértices P, B y Z

Si hemos elegido (2) es el triángulo formado por los vértices P, B'y Z

Datos del triángulo:

(1)	(2)
- D distancia polar en B ó e	- D' distancia polar en B' ó e'
- lado ZB distancia cenital en B ó a	- lado ZB' distancia cenital en B'ó a'
- ángulo $PBZ = M = \begin{cases} PBZ = PBB' - ZBB' \\ PBZ = PBB' + ZBB' \end{cases}$	- ángulo $PB'Z = M = \begin{cases} PB'Z = PB'B - ZB'B \\ PB'Z = PB'B + ZB'B \end{cases}$

Incógnita: lado PZ que es el complementario de la latitud o colatitud

2.4. Discriminación de signos en M.

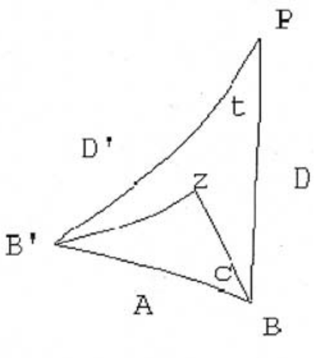

Figura 2

Las posiciones relativas de los puntos P y Z respecto del arco BB'son las recogidas en las figuras siguientes. Son dos las posibilidades: o bien que ambos puntos se encuentren en el mismo lado, que corresponde a la figura 2, o bien que se encuentren en distintos lados, que corresponde a la figura 3. En la figura 2 M es M=PBB'-ZBB' suponiendo elegido el ángulo correspondiente a la altura menor. En la figura 3 el valor de M viene dado por M=PBB'+ZBB'. La declinación del Sol es siempre un dato conocido proporcionado por las tablas.

La figura 2 aparecerá en los siguientes casos:

a) La latitud en la que se encuentra el observador y la declinación son del mismo signo y además en valores absolutos la latitud es mayor que la declinación. Efectivamente, si ambas son positivas, y latitud mayor que la declinación, el polo P elegido, es el polo norte. Si ambas son negativas y en valores absolutos la latitud es mayor que la declinación, el polo P es el polo sur. En ambos casos tenemos la misma posición relativa entre los dos triángulos.

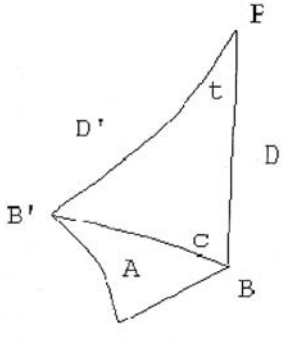

Figura 3

b) Latitud y declinación son de signos contrarios. Si la latitud es positiva y la declinación negativa se elige el polo norte. Si es al contrario el polo que se debe elegir es el polo sur.

La figura 3 aparecerá en los casos en que la declinación y la latitud tienen el mismo signo y en términos absolutos la primera es mayor que la segunda. Si son positivas tendremos que P es el polo norte y si son negativas el polo elegido para P será el polo sur.

Puede ocurrir también que la latitud sea tan pequeña que el observador no sepa el hemisferio donde se encuentra, por lo que si elige el polo contrario al signo de la declinación, esto es, si la declinación es positiva, el polo sur; y si la declinación es negativa, el polo norte, se encontrará siempre con la figura 2 por lo que tendrá que M es la diferencia de ángulos.

Hay que convenir en que la elección de polos puede ser cualquiera pero que cuando se determina la latitud y se halla su complementario, la distancia polar, esta está referida lógicamente al polo elegido.

Mendoza elige otro criterio en los triángulos, toma siempre para la distancia polar un ángulo obtuso, esto quiere decir que D=90+|e|, o dicho de otro modo que se elige el polo contrario al signo de la declinación. Con este criterio obtenemos que M=PBB'+ZBB' si latitud y declinación tienen el mismo signo y en valor absoluto la primera es mayor que la segunda, y para el resto de los casos M=PBB'-ZBB'. Ambas elecciones de triángulos son correctas. Mendoza es el primero en considerar c como el ángulo correspondiente a la menor altura y en ello Cerquero ve una mínima ventaja: hay una tercera posibilidad para M si la elección de c es la de mayor altura, y esta tercera posibilidad se da cuando las dos alturas se toman a un mismo lado del meridiano con igual signo en declinación y latitud, pero ésta en valor absoluto más pequeña; en este caso M=360-(ZB'B+PB'B).

En la tabla siguiente recogemos los dos criterios que se suelen utilizar para la elección del polo. El que se ha explicado en las figuras consiste en elegir siempre el polo que se puede observar, es decir, el polo elevado. El criterio que elige Mendoza ya se ha indicado.

	Polo elevado	Mendoza
L>0 e>0 L>e	(N) M=PBB'-ZBB'	(S) M=PBB'+ZBB'
L<0 e<0 L<e	(S) M=PBB'-ZBB'	(N) M=PBB'+ZBB'
L<0 e>0	(S) M=PBB'-ZBB'	(S) M=PBB'-ZBB'
L>0 e<0	(N) M=PBB'-ZBB'	(N) M=PBB'-ZBB'
L>0 e>0 L<e	(N) M=PBB'+ZBB'	(S) M=PBB'-ZBB'
L<0 e<0 L>e	(S) M=PBB'+ZBB'	(N) M=PBB'-ZBB'

Entre paréntesis viene indicado el polo que resulta elegido del criterio. Delambre toma desde su primer artículo[11] el criterio del polo elevado que lo expresa así:

Si L>e se debe hacer M=PBB'-ZBB'
Si L<e se debe hacer M=PBB'+ZBB'

[11] DELAMBRE, J. B. J. (1807) op. cit., p. 415.

donde hemos puesto los ángulos referidos al de menor altura y él lo hace para los de mayor altura. Nos puede llamar la atención porque con la notación actual de latitudes negativas no sería correcta, pero si para el hemisferio sur indicamos la latitud por valores positivos pero añadiendo una S vemos que responde al criterio del polo elevado. Posteriormente en esa misma memoria indica que en los casos de incertidumbre, en los que L y e tienen valores muy cercanos, se deben hacer los cálculos con ambos valores para M y elegir el más conveniente. En 1815[12] propone que cuando se tomen las alturas se anoten los acimuts para discriminar con ellos qué signo tomar en M. En la última reflexión [13] recoge esto mismo, e indica que en el caso de que los acimuts difieran muy poco las observaciones inducen un error considerable, y que por lo tanto, habría que calcular ambas para elegir la más acorde. Efectivamente, en esas circunstancias los errores de las observaciones, concretamente al calcular el ángulo ZBB', produciría una incertidumbre importante que luego se vería reflejada en M. El error en la determinación de ZBB' vendría afectado por un factor $\dfrac{1}{\operatorname{sen}\dfrac{ZBB'}{2}}$ (se puede ver calculando la derivada de la expresión de Delambre por ejemplo) y como en las circunstancias que tratamos ese ángulo es muy pequeño, la fracción toma valores muy grandes. Cerquero propone[14], y lo recoge de otros autores que no especifica, en que debe haber al menos seis grados entre el cenit y el tránsito del Sol por el meridiano para que sea susceptible de aplicar el método.

3.- Los trabajos de Delambre

Como ya se ha indicado anteriormente Delambre publica tres memorias en la Connaissance des Temps donde trata el cálculo de la latitud por las alturas del Sol extrameridianas. Especial importancia tienen las dos últimas memorias que son publicadas en 1815 y en 1820. La otra es de 1807.

En la memoria de 1815 demuestra que haciendo la aproximación de considerar la declinación constante, es decir, considerar que entre las dos observaciones el Sol no ha variado su declinación, aunque se utilice la media; puede introducir un error en la latitud buscada superior a la variación de declinación que se ha despreciado. Los autores que por lo tanto proponen esta simplificación como Douwes y Mendoza deben ser abandonados, pues su utilidad se limita a cuando el Sol está cerca de los solsticios, que es cuando su declinación apenas varía. Asume pues que los cálculos deben ser rigurosos. En cada elemento de los triángulos que va calcu-

[12] DELAMBRE, J. B. J. (1815) op. cit., p. 305.
[13] DELAMBRE, J. B. J. (1820) op. cit., p. 329.
[14] SÁNCHEZ CERQUERO, JOSÉ (1823) op. cit., p. 7.

lando, compara los resultados con la aproximación y sin la aproximación de la declinación constante. Las ecuaciones que utiliza están recogidas en la tabla del apartado siguiente. En este proceso de comparación entre los elementos calculados con y sin aproximación de declinación constante, esto es, entre el primer triángulo considerado isósceles y el exacto; llega a unas conclusiones importantes:

1ª Para el cálculo de A la diferencia entre el cálculo riguroso y aproximado da un valor despreciable (infinitésimo de segundo orden), por lo que los marinos harán bien en utilizar la simplificación para este cálculo.

2ª Sí hay diferencia notable sin embargo en el cálculo del ángulo que hemos llamado c, y esta diferencia es arrastrada al ángulo denominado M por el que se calcula la latitud final.

Delambre continúa su trabajo (pág. 290) demostrando el método analítico de Burgade (en la época eran catalogados de métodos analíticos los que aglutinaban en una expresión todos los cálculos). Posteriormente compara este método con el suyo llegando a la conclusión de que es más corto el que él propone. Se siente atraído no obstante por los métodos analíticos, muy a gusto de la época por prescindir de figuras y de consideraciones trigonométricas de cuadrantes y signos, aunque ve, un inconveniente añadido en la dificultad que tienen esas expresiones en ser memorizada. El criterio que utiliza Delambre para determinar qué método es más corto, es el número de veces que es necesario acceder a las tablas de logaritmos para mirar valores. Por el suyo es necesario acceder 23 veces para dar la latitud final (si hay varios valores que se busquen en la misma hoja se considera como un solo acceso) y 28 las dos soluciones posibles. Por el de Burgade 30 accesos para una solución y 32 para las dos. Busca a continuación simplificar la expresión de Burgade con ángulos subsidiarios pero no obtiene ninguna ventaja. Se puede acortar pero a consta de suprimir términos que afectan a la precisión. Finalmente (pág. 300) analiza la forma analítica de Maupertuis en la que intervienen ángulos subsidiarios que también es más larga que la trigonométrica que él propone. Antes de pasar a la memoria siguiente es conveniente indicar que en la página 305, Delambre hace referencia a un trabajo publicado en "Connaissance des Tems de 1811". Creemos que hay un error de fecha pues no hemos encontrado ningún artículo referente a este tema en 1811 y sí, como se ha indicado anteriormente, en Connaissance des Temps de 1809. Este artículo inexistente se mantiene citado en obras recientes que tratan el tema[15].

En su última memoria, la de 1820, vuelve sobre el método de Douwes desarrollándolo sin la aproximación de la declinación constante. La ecuación que obtiene Delambre basada en la de Douwes pero ya sin aproximación, no permite un pro-

[15] IBÁÑEZ, Itsaso (2001) "José Sánchez Cerquero (1784-1850) y el problema de Douwes" *Revista de Historia Naval* (73), 105-114, p.108.

ceso iterativo. El valor de estima y el obtenido siempre coinciden, o dicho de otro modo: el método de Douwes tomando variaciones en la declinación no es convergente. Pasa pues Delambre a preocuparse de lo que hasta la fecha se le había supuesto al proceso de Douwes: la convergencia. Demuestra que no está asegurada tal y como se ha venido utilizando, esto es, el valor calculado en el ciclo anterior es el que se introduce en el nuevo ciclo. El problema se resuelve partiendo en cada ciclo de la media del ciclo anterior. Nos referimos a la media entre la estimada y calculada. En cualquiera de los casos es necesario varios ciclos para determinar la latitud, que debe ser corregida posteriormente por una cantidad debido a la aproximación de la declinación. Este proceso iterativo es mucho más largo que el trigonométrico directo, y esto ocurrirá en todos los procesos indirectos, en los que entra un bucle con la latitud de estima. Hay pues que abandonar estos métodos (Douwes, Lévêque, Galiano, etc.). Con respecto al método que propone en esta memoria hay dos diferencias con el de 1815: elige el ángulo correspondiente a la altura menor y el lado A, dado que la aproximación de la declinación constante no le afecta, lo calcula por una ecuación aproximada; siendo el resultado algo más corto. Por esta forma se llega a la latitud final con 19 accesos a las tablas. En la página 334, Delambre muestra un método aún más corto, que según él utilizan los marinos. Consiste en expresar las ecuaciones utilizando senos naturales y senos versos a la vez. De esta manera el cálculo de la latitud se reduce a 16 logaritmos pero Delambre considera que a la larga tiene peores consecuencias pues se necesitan tablas mucho más voluminosas, y que presenten en la misma hoja los senos versos y los senos naturales. Los tres accesos a las tablas que uno se ahorra no compensan el cambio de tablas. Veremos qué opina sobre esto Cerquero.

Los trabajos de Delambre nos llevan pues unívocamente al trigonométrico directo a la vez que da las expresiones que lo hacen más rápido hasta el momento.

3. ECUACIONES USADAS POR LOS DISTINTOS AUTORES

	Lado A	Ángulo c	ZBB′ ó ZB′ B	Lado PZ
Mendoza * 1807	$sen^2 \frac{A}{2} = sen^2 \frac{t}{2}.\cos^2 e$	PBB′ $sen\ c' = \dfrac{\cos \frac{t}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$	ZBB’ $sen \frac{ZBB'}{2} = \sqrt{\dfrac{\cos(\frac{S}{2}).sen(\frac{S}{2} - a')}{\cos a.sen\ A}}$ S=A+a+a′	$\begin{cases} sen^2 \frac{x}{2} = \dfrac{\cos^2 \frac{M'}{2}}{\cos^2 \frac{a-e}{2}}.\cos a.\cos e \\ sen^2 \frac{PZ}{2} = \cos^2 \frac{x}{2}.\cos^2 \frac{a-e}{2} \end{cases}$
Delambre 1815	Cos A=sen e′.sen e+ cos e′.cos e.cos t	PB′B $sen \frac{c}{2} = \sqrt{\dfrac{sen(\frac{s}{2} - D).sen(\frac{s}{2} - A)}{sen\ D.sen\ A}}$ $s = D + D' + A$	ZB’B $sen \frac{ZB'B}{2} = \sqrt{\dfrac{sen(\frac{s}{2} - ZB').sen(\frac{s}{2} - A)}{sen\ ZB'.sen\ A}}$ s=A+ZB+ZB′	Cos PZ=cos D′.cosZB′+ sen D′.senZB′.cos M
Du Bourguet 1820	$sen \frac{A}{2} = sen \frac{t}{2}\sqrt{sen\ D.sen\ D'}$	PB′B $\dfrac{sen\ c}{sen\ D'} = \dfrac{sen\ t}{sen\ A}$	ZB′B $\cos \frac{ZB'B}{2} = \sqrt{\dfrac{sen\ (\frac{s}{2} - ZB).sen\ \frac{s}{2}}{sen\ ZB'.sen\ A}}$ s=A+ZB+ZB′	$\begin{cases} tg\ x = \cos M.tg\ D' \\ \cos PZ = \dfrac{\cos D'.\cos(D'-x)}{\cos x} \end{cases}$
Delambre 1820	$sen \frac{A}{2} = sen \frac{t}{2}.sen \frac{D + D'}{2}$	PBB′ $sen \frac{c}{2} = \sqrt{\dfrac{sen(\frac{s}{2} - D).sen(\frac{s}{2} - A)}{sen\ D.sen\ A}}$	ZBB′ $sen \frac{ZBB'}{2} = \sqrt{\dfrac{sen(\frac{s}{2} - ZB).sen(\frac{s}{2} - A)}{sen\ ZB.sen\ A}}$	Cos PZ=cos D.cosZB+sen D . senZB.cos M
Cerquero 1823	$sen \frac{A}{2} = sen \frac{t}{2}\sqrt{sen\ D.sen\ D'}$	PBB′ $\cos \frac{c}{2} = \sqrt{\dfrac{sen\ (\frac{s}{2} - D').sen\ \frac{s}{2}}{sen\ D.sen\ A}}$ $s = D + D' + A$	ZBB′ $sen \frac{ZBB'}{2} = \sqrt{\dfrac{\cos(\frac{S}{2}).sen(\frac{S}{2} - a')}{\cos a.sen\ A}}$ S=A+a+a′	$\begin{cases} tg\ x = \cos M.ctg\ a \\ \cos PZ = \dfrac{sen\ a.\cos(D - x)}{\cos x} \end{cases}$

* Ya hemos visto que Mendoza considera triángulos diferentes y que por lo tanto ni en c ni en M tiene porque coincidir con los demás.

4. Discusión de las ecuaciones.

4.1. Ecuaciones para el cálculo del lado A.

Todas las ecuaciones que se utilizan para obtener este lado, salvo la relación del coseno que utiliza Delambre en su memoria de 1815, se obtienen haciendo la aproximación de que ambas distancias polares son muy parecidas. Delambre demuestra en esa memoria que en este primer paso la aproximación no afecta al problema. Es decir, que la diferencia entre calcular A de forma rigurosa y aproximada es un infinitésimo de segundo orden y por lo tanto despreciable. Hay que hacer notar que la declinación que utiliza Mendoza es la media aritmética de las dos, por lo que su ecuación coincide con la de Delambre de 1820. Du Bourguet y Cerquero, utilizan la media geométrica. La relación del coseno de Delambre de 1815 es rigurosa, pero la cambia en su memoria de 1820.

4.2. Para el cálculo del ángulo c.

Ya vimos que como ángulo c podíamos elegir PBB' ó PB'B. Es decir, el ángulo correspondiente a la observación de menor o mayor altura respectivamente. Mendoza elige la de menor altura, pero la ecuación que utiliza es válida cuando las distancias polares son las mismas, y para el cálculo de c esta aproximación es fatal. La consideración de triángulo isósceles introduce un error que no es despreciable, y que afectará a la latitud final a través del ángulo que hemos llamado M. Hemos anotado en la ecuación de Mendoza c' porque este autor elige otros triángulos para la resolución del método trigonométrico, que ya hemos comentado.

Du Bourguet utiliza una relación rigurosa para este ángulo pero no conveniente. El ángulo c es siempre próximo a 90º y obtenerlo por el seno proporciona un error mayor (ya hemos descartado la de Mendoza que es una aproximación incorrecta). Cerquero arguye además que c, efectivamente es próximo a 90, pero que puede ser por exceso o por defecto, esto es, que puede estar en el primer o segundo cuadrante y que al calcularlo por la relación de los senos hay que hacer luego la discriminación para ver a cual de los dos corresponde; lo que puede hacer el proceso muy largo si no impracticable. Esta consideración la echa de menos en Delambre, que sólo justifica la no utilización de la relación de los senos por el error introducido.

También hemos hablado de la mínima ventaja de elegir el ángulo de menor altura para c.

Uno de los errores del método de Mendoza se puede corregir calculando c por otra función trigonométrica y Cerquero propone

$$\cos c = sen\ e \sqrt{\frac{verso\ t}{suverso\ A}}$$

Con esta ecuación el método de Mendoza no queda libre de errores pues utiliza la aproximación a triángulos isósceles pero los resultados son mejores.

4.3. Ángulo ZBB’ o ZB’B.

Todos los autores coinciden en hacerlo por el ángulo mitad pero la relación utilizada por Mendoza y Cerquero presenta cierta ventaja, y es que los marinos observan directamente la altura del Sol. Los demás autores utilizan la distancia cenital, y por lo tanto hay que realizar cálculos previos. Cerquero[1] atribuye la ecuación que utiliza a Mendoza.

4.4. Colatitud.

Delambre elige la relación del coseno. Los demás autores utilizan previamente un parámetro, x, que deja finalmente la función trigonométrica que contiene la colatitud factorizada. Si bien la relación del coseno presenta el inconveniente de contener dos sumandos, lo que la hace engorrosa al realizar los cálculos a base de tablas de logaritmos; el parámetro previo que utilizan los demás autores, aunque no introduce dificultades en los signos de las funciones trigonométrica (tg x y cos PZ tendrán el mismo signo), tampoco presenta ventajas sobre la relación que utiliza Delambre.

Hasta este momento el inconveniente que presenta el método de Du Bourguet es calcular c por el seno, que además del error que se introduce al hacerlo por la función seno, habría que discriminar sobre cuál de los dos ángulos es. Hay otro más grave: nada dice en su artículo de las posibilidades que puede tener M y considera M=PB’B-ZB’B siempre, lo que es incorrecto cuando la declinación y latitud son del mismo signo y la última es menor en valor absoluto que la primera. Este error se cometería con bastante probabilidad en la navegación entre trópicos, y cuanto más cerca del ecuador, más probable sería. Todos estos inconvenientes desaconsejan su uso.

Las relaciones que utiliza Mendoza en este apartado son demostradas por Cerquero. La demostración parte de la relación del coseno y con el criterio para los triángulos que elige Mendoza obtiene fácilmente sus relaciones. Curiosamente Cerquero incluye en su artículo dos demostraciones: una la que acabamos de comentar, y la segunda la propuesta alternativa para el cálculo de c en el método de Mendoza que también hemos visto.

Anteriormente hemos comentado que el criterio que utiliza Delambre para comparar los distintos métodos es el número de veces que se tiene que acceder a las tablas para calcular valores. En las dos últimas memorias elige el mismo ejemplo para ir comprobando que el trigonométrico que él defiende es el más corto. Cerque-

[1] SÁNCHEZ CERQUERO, JOSÉ (1823) op. cit., p. 6.

ro utilizará en sus Reflexiones el mismo que Delambre para comprobar que las ecuaciones propuestas por él lo hacen algo más corto. A continuación expondremos estos ejemplos en los autores anteriormente citados y no en Mendoza, que ya hemos visto que el cálculo de c'lo hace de manera aproximada, ni en Du Bourguet, cuyo método es incorrecto por no establecer la posibilidad de que M=PB'B+ZB'B.

5. Ejemplo con las ecuaciones de Delambre de 1820[2].

Este ejemplo ya fue propuesto en 1815 y calculado con las ecuaciones recogidas en las tablas. Los datos son los siguientes:
D=81º 45'; D'=81º 42', t=45º, ZB=47º 45' 51'', ZB'= 73º 54' 13''.

A) Lado BB'

$$sen\,\frac{BB'}{2} = sen\,\frac{1}{2}(D+D').sen\,\frac{t}{2}$$

$$10+\log\left[sen\left(\frac{D+D'}{2}\right)\right] = 9.9954547 \text{ (1)}; \quad 10+\log\left[sen\,\frac{t}{2}\right] = 9.5828397 \text{ (2)}$$

$$10+\log\left[sen\left(\frac{BB'}{2}\right)\right] = 9.5782944; \quad \text{BB'=A= 44º 30' 22.6''(3)}$$

B) Ángulo PBB' (elige el de menor altura)

Delambre propone utilizar los tres lados del triángulo que son ya conocidos

D'=81º 45'
D =81º 42'
A =44º 30' 23''
----
suma = S = 207º 57' 23'' $\frac{S}{2}$ = 103º 58' 41.5''

$\frac{S}{2} - A$ =59º 28' 18.5'' ; $\frac{S}{2} - D$ =22º 16' 41.5''

[2] DELAMBRE, J. B. J. (1820) op. cit., p. 331-333.

log[sen(S/2-A)]+10=9.9351945 (4)
log[sen(S/2-D)]+10=9.5787584 (5)
-log(sen D)=0.0045729 (6) XIII
-log(sen A)=0.1542889 (7)

10+log[sen PBB'/2]=9.8364074; PBB'/2=43º 19' 28.8'' (8)
PBB'=86º 38' 57.6''

Al margen se indica las veces que es necesario mirar en la tabla, si no tiene ninguna anotación es que anteriormente se ha buscado y si tiene un número romano es que ambos se encuentran en la misma hoja. En el cálculo del lado A se necesita buscar tres veces en las tablas.

C) Ángulo ZBB'

Al igual que el triángulo anterior son conocidos los tres lados: las dos distancias cenitales y el arco A. Buscamos ZBB'

ZB=73º 54' 11''
ZB'=47º 45' 51''
A =44º 30' 23''
----
suma= S'=166º 10' 25''; S'/2=83º 5' 12.5''

S'/2 –A=38º 34' 49.5'' ; S'/2-ZB=9º 11' 1.5''

log[sen(S'/2-A)]+10=9.7949148 (9)
log[sen(S'/2-ZB)]+10=9.2030362 (10)
-log(sen ZB)=0.0173697 (11) XIV
-log(sen A)= 0.1542889

10+log(sen ZBB'/2)=9.5848048; ZBB'/2=22º 36' 27.6'' (12)

ZBB'=45º 12' 55.2''

D) Cálculo final de la latitud

En este tercer triángulo un lado es D, otro ZB y el ángulo comprendido que es M=PBB'-ZBB'=41º 26' 2.4''

10+log (cos D)=9.1594354 (13);	10+log (sen D)=9.9954271
10+log (cosZB)=9.4428780 (14);	10+log(sen ZB)=9.9826314
---	10+log(cos M)=9.8748934 (16)
cos D. cos ZB=0.040023 (15)	--------------------------------------
	sen D.sen ZB.cos M=0.712774 (17)

0.712774+0.040023=0.752797

10+log(sen L) =10+log(0.752797)=9.8766779 (18)

L=48º 50’ 0’’ (19)

El cálculo de la latitud por las ecuaciones que propone Delambre necesita buscar en las tablas 19 logaritmos y 17 en distintas páginas. Es sensiblemente más corto que el de Connaissance des Temps de 1817 que necesitaba 23 logaritmos con 20 en distintos sitios.

6. Ejemplo de ecuaciones de Cerquero con las tablas ordinarias de logaritmos[3].

Está sacado de la página 17 de sus Reflexiones.

A) Lado A
D=81º 42’...........10+log sen D= 9.9954271 (1)
D’=81º 45’..........10+log sen D’=9.9954822 (2)
----
suma............19.9909093; semisuma....9.9954546
t/2=22º 30’....10+log sen (t/2)= 9.5828397 (3)
----
suma-10= 9.5782943

10+log sen(A/2)=9.5782943; A/2=22º 15’ 11.3’’(4); A=44º 30’ 23’’

B) Ángulo c
A=44º 30’ 23’’..-log sen A=0.1542889 (5)
D=81º 42’ 00’’..-log sen D=0.0045729 (1)
D’=81º 45’ 00’’
----
suma=s=207º 57’ 23’’; s/2=103º 58’ 41.5’’.....10+log sen(s/2)=9.9869453 (6)
s/2-D’=22º 13’ 41.5’’..................................10+log sen(s/2 –D’)=9.5778321 (7)
----
suma=19.7236392

10+log cos(C/2)=suma/2=9.8618196; C/2=43º 19’ 29’’(8); C=86º 38’ 58’’

[3] SÁNCHEZ CERQUERO, JOSÉ (1823) op. cit., p. 17-18.

C) Ángulo ZBB'

A=44º 30' 23''.. –log sen A=0.1542889 (5)
a=16º 5' 47''.. –log cos a =0.0173686 (9) XIV XVIII
a'=42º 14' 9''

----

s=suma=102º 50' 19''; s/2=51º 25' 9.5''.........10+log cos(s/2)=9.7949174(10)
s/2-a'=9º 11' 0.5''......10+log sen(s/2-a')=6.2030232(11)

----

suma=19.1695981

10+log sen(ZBB'/2)=suma/2=9.5847990; ZBB'/2=22º 36' 26.5''(12);

ZBB'=45º 12' 53''

D) Triángulo del complementario de la latitud

M=41º 26' 5''...10+log cos M=9.8748934(13)
a=16º 5' 47''..log cot a =0.5397535(14)

----

suma-10=0.4146469

log tan x=0.4146469; x(agudo)=68º 56' 53''(15) XVI

D=81º 42' 00''
x=68º 56' 53''...-log cos x=0.4446465(16)

----

dife=d=12º 45' 7''..10+log cos d=9.9891537(17)
a=16º 5' 47''...10+log sen a=9.4428780(18)

----

suma=19.8766782

10+log sen L=9.8766782; L=48º 50' 00''(19)

Con las ecuaciones que propone Cerquero se necesita buscar 19 logaritmos en las tablas, de los cuales 16 se encuentran en distintas hojas. Es algo más corto que el propuesto por Delambre.

7. Ejemplo de las ecuaciones de Cerquero[4] con las tablas de Mendoza

D= 81º 42’ 00’’....10+log (sen D)=9.99543 (1) VI
D’=81º 45’ 00’’....10+log(sen D’)=9.99548 (2)
t=3 h 0m 00 s........10+log(verso t)=9.16568 (3)
----
suma-20= 10+log(verso A)=9.15659 =>A=44º 30’ 23’’ (4) V

A=44º 30’ 23’’..................... log(cosec A)=0.15429 (5)
D=81º 42’ 00’’....................... log(cosec D)=0.00457 (6)
D’=81º 45’ 00’’
----
s=207º 57’ 23’’
s/2=103º 58’ 41.5 ....10+log(sen s/2)=9.98695 (7)
s/2 –D’=22º 13’ 41.5’’..10+log[sen(s/2-D’)]=9.57783 (8)

10+log(suv c)=9.57783 =>c=86º 38’ 55’’ (9)

A=44º 30’ 23’’...........................log(cosec A)=0.15429
a=16º 5’ 47’’...................................log(sec a)=0.01737 (10) XV
a’=42º 14’ 9’’

S=102º 50’ 19’’
S/2=51º 25’ 9.5’’...................10+log(cos S/2)=9.79492 (11)
S/2-a’=9º 11’ 0.5’’..........10+log[sen(S/2-a’)]=9.20302 (12)

10+log ver ZBB’= 9.16960 =>ZBB’=45º 12’ 54’’ (13)

ZBB’=45º 12’ 54’’
c=86º 38’ 55’’
M=41º 26’ 1’’......................10+log(suver M)=9.94194 (14)
D=81º 42’ 0’’..........................10+log(sen D)=9.99543
a=16º 5’ 47’’............................10+log(cos a)=9.98263 (15)
D-a=65º 36’ 13’’.................-log[sucov(D-a)]=0.01983 (16) XIX (*)

10+log(suv y)=9.93983 =>y=42º 9’ 45’’ (17) XVIII

y=42º 9’ 45’’.......................10+log(verso y)= 9.11186 (18)
D-a=65º 36’ 13’’...........10+log[sucov(D-a)]=9.98017 (19)
----
suma-10=10+log[coverso latitud]=9.09203 => latitud=48º 50’ 00’’(20)

[4] SÁNCHEZ CERQUERO, JOSÉ (1823) op. cit., p. 21-22.

(*) como la altura menor es más pequeña que la correspondiente distancia polar se utiliza el sucoverso de la diferencia

Se ha necesitado calcular 20 logaritmos, de los cuales 5 se encuentran en lugares repetidos. Son15 las veces que hay que abrir las tablas. Nótese que es algo más corto que hasta los ahora vistos. Veamos que en este método se mezcla razones trigonométricas naturales con senos versos y suversos, lo que obligaría a engrosar las tablas.

Cerquero indica: "por esta parte seria pequeña la ventaja respecto de las tablas ordinarias; pero se agregan las de no ser preciso reducir el intervalo á partes del ecuador, ni tomar complementos aritméticos para el cálculo de los valores de c y PBB', ni hallar semisumas de logaritmos, ni duplar las mitades de A, PBB' y c, ni consideración alguna de especies; todo lo cual forma un conjunto que abrevia considerablemente la operación."

8. Conclusiones

Todas las ecuaciones que propone Cerquero se han utilizado anteriormente en los mismos cálculos en que él las utiliza, la consideración de esos tres triángulos tiene casi un siglo de antigüedad, los criterios para la suma o diferencia de ángulos para M ya son correctos en 1807 tanto en el trabajo de Delambre como en los de Mendoza, la consideración en el segundo triángulo de las alturas en lugar de las distancias cenitales también es de Mendoza. No hay nada nuevo realmente en el método de Cerquero, salvo que es una síntesis, con fuerte influencia del método de Mendoza, que además no aventaja al propuesto finalmente por Delambre. Detengámonos en este asunto. Si miramos los ejemplos propuestos por ambos autores hasta el cálculo del ángulo ZBB' ambos han tenido que mirar doce veces en las tablas. La supuesta ventaja de Cerquero la obtiene al calcular la colatitud y se debe a que considera ctg a y sen a en la misma hoja que cos a (este último valor ya ha sido calculado para el ángulo ZBB'). Igual ocurre con tg x y cos x que parecen estar en la misma hoja. Con estas tablas Cerquero obtiene la latitud final con cuatro accesos a las tablas más, que hacen un total de 16. Si Delambre hubiera utilizado las mismas tablas se hubiera ahorrado dos consultas en el cálculo final de la latitud pues cuando miró sen D para calcular PBB' podía haber obtenido cos D, y cuando miró sen ZB para calcular ZBB' podía haber consultado cos ZB. El cómputo final para Delambre con las tablas de Cerquero hubiera sido de 15 accesos. Igual que con las tablas de Mendoza, con la ventaja de que los cálculos se harían por logaritmos solamente, eso sí, dispuestas de la misma forma que las utilizadas por Cerquero. Pensamos que la muerte de Delambre en 1822 fue el impedimento de una cumplida respuesta a Cerquero en caso de que el matemático francés hubiera tenido conocimiento de la publicación del gaditano.

Fijémonos en que la sustitución de la ecuación aproximada del método de Mendoza por otra rigurosa de forma que sean accesibles los cálculos por las tablas de éste constituye la verdadera aportación de Cerquero, pero que es relativa, pues ya hemos visto que Delambre hace mención en su última memoria del método de los marinos que utilizan senos naturales y senos versos, reduciendo el problema a 16 accesos, pero con unas tablas voluminosas. Cerquero compatibiliza su propuesta con las tablas de Mendoza rescribiendo la relación para c en función del suversor:

Suverso c= sen s/2. sen(s/2-d'). cosec D. cosec A donde s=D+D'+A.

Delambre, como ya hemos repetido, no era partidario de utilizar expresiones de este tipo.

Cerquero aporta, al menos ninguno del resto de los autores lo recoge, que si el navegante está cerca del ecuador y duda del hemisferio, debe elegir para el primer triángulo el polo distinto al de las declinaciones solares, con lo que M se obtendrá con la diferencia de ángulos y no habrá lugar a ninguna incertidumbre. Esta aportación aunque generaliza aún más el método, tiene su origen en el criterio de elección de triángulos de Mendoza. Efectivamente, si dudamos del hemisferio es porque nuestra latitud es muy pequeña en valor absoluto y dado que del Sol conocemos su declinación, y asumimos que entre ambos valores hay una mínima diferencia que hace el método aplicable, llegamos a la conclusión de que la declinación debe ser mayor en valor absoluto, y la elección del polo contrario a la declinación, como siempre hacía Mendoza, hace que el cenit caiga dentro del triángulo de las distancias polares o lo que es lo mismo que para M tengamos que tomar la diferencia. Mendoza, aunque no lo recoge expresamente, al aplicar su método en esas circunstancias hubiera dado los mismos pasos. Dicho de otro modo: es un caso particular de la elección de Mendoza.

Creemos que la aportación de Cerquero al problema de determinar la latitud por dos alturas extrameridianas del Sol es más que modesta y no tiene nada que ver con los análisis profundos que hacen Delambre y Mendoza, y no estamos de acuerdo con López[5] que ha tratado el tema magnificando su aportación sin entrar en profundidad en lo que realmente es original de nuestro estimado gaditano.

[5] LÓPEZ , Itsaso, op. cit.