

EL CRONICÓN ALBELDENSE EN LA ENCRUCIJADA MEDIEVAL DE LOS NÚMEROS

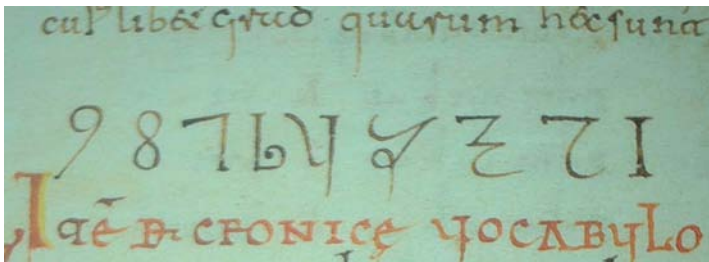
ÁNGEL REQUENA FRAILE

Profesor de Secundaria, San Sebastián de los Reyes

1. Introducción

Cuando en el año 976 el monje Vigila terminaba un bello códice en el *scriptorium* de San Martín de Albelda de Iregua no podía imaginar que una breve referencia marginal al ingenio de los hindúes, y la caligrafía de nueve extraños símbolos, iba a convertir sus pergaminos en una referencia obligada en todas las historias de las cifras y sistemas de numeración.

Vigila ni siquiera se permitió ordenar los *números indios* en el orden cristiano, quedan de mayor a menor tal como hacían los andalusíes al escribirlos de izquierda a derecha:



En el año 976 el califato cordobés estaba en su máximo esplendor, pero aquel año moriría el califa ilustrado Alhaken II dando paso a un periodo de inestabilidad que acabaría con el poder político cordobés, si bien a los musulmanes de Al-Ándalus les quedaban siglos de irradiación cultural.

El centón de Albelda contiene la primera muestra escrita identificable de nuestras nueve cifras, siendo reconocibles inmediatamente siete de ellos, que apenas han sufrido mutaciones, mientras que las otras dos (el 4 y el 5) todavía se verán sometidas a un proceso de cambio hasta estabilizarse llegado el siglo XV en el occidente cristiano.

La Edad Media en la península ibérica con su mestizaje cultural se va a convertir en una verdadera babel de los números: numeración romana, griega, judía, árabe absoluta, distintas *rumies*, árabe decimal oriental y gubares occidentales (magrebí-andalusíes). Todo ello muestra algo digno de revivir desde la ciudad de Logroño tan próxima al desaparecido cenobio riojano de San Martín, cuyos códices pasaron a la biblioteca de San Lorenzo de El Escorial.

A rendir homenaje a los iluminadores de Albelda y a describir los distintos sistemas de numeración y su uso en los reinos y taifas hispano-andalusíes está dedicada esta ponencia.

2. El largo camino del número

Las sociedades primitivas, hordas o tribus, no requerían ni elaboradas palabras ni grandes sistemas de representación para indicar cantidades. Los antropólogos hablan del uso exclusivo del uno, el dos y el muchos en algunos pueblos. Los psicobiólogos plantean la confusión visual a partir de cuatro unidades para poder precisar.

Al pastor le basta una bolsa de guijarros para establecer una relación biyectiva que cuantifique su rebaño. También con marcas o muescas en un palo o un hueso se puede conservar una relación numérica. Algunos pueblos pueden recurrir a nudos en una cuerda y establecer series nemotécnicas con cuerdas, y si no se dispone de otra cosa, se pueden establecer correspondencias con las partes del cuerpo: falanges, dedos, brazos, piernas, etc.

La necesidad de concretar cantidades y computar va unida a las civilizaciones. Escribas y sacerdotes primero, y comerciantes más tarde establecen sistemas de numeración que cuantifican de forma precisa el número de objetos.

Algunos estudiosos establecen incluso que la representación numérica es anterior y facilitadora del paso a la escritura. En todo caso, la escritura literaria y la numeración escrita van a ir muy unidas desde los orígenes.

Ya a las primeras civilizaciones encontramos la línea divisoria entre los dos grandes sistemas de numeración: el sistema absoluto aditivo y el sistema relativo o posicional. Si bien también podríamos distinguir entre sistemas alfabéticos o ideográficos según los símbolos usados.

3. Los sistemas absolutos

Los sistemas absolutos establecen un valor para cada símbolo, obteniéndose el número representado como suma o diferencia del valor de todos los símbolos usados. Para el objeto de esta comunicación distinguimos entre la numeración romana y la griega.

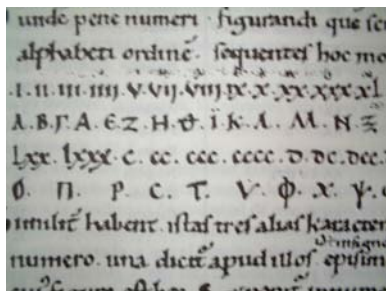
En la numeración romana los símbolos se repiten y aunque sean alfabéticos, su origen parece ser el de las muescas:

I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX X...

La escritura numérica griega clásica (al igual que las hebrea, fenicia, árabe primitiva o copta) es puramente alfabética con conversión de los símbolos a unidades, decenas o centenas. Los símbolos no se repiten:

$\alpha \beta \gamma \delta \dots$

1 2 3 4 ...



Arithmética de Beda. Copia s XII

4. Los sistemas relativos

Cuando un símbolo numérico cambia de valor según el lugar que ocupa el sistema es relativo o de posición. El sistema que se ha impuesto casi universalmente es el posicional de diez símbolos (sistema base diez)

La primera aparición histórica del posicional (¡¡con base sesenta!!) se remonta a la civilización sumeria. En escritura cuneiforme y con sólo dos símbolos: el clavo (unidad) y la espiga (decena) se podían representar números enormes usando el doble valor: el propio y el relativo.

El éxito de la base sesenta, posiblemente un híbrido entre decimal y duodecimal, es un verdadero óptimo para el cálculo (diez divisores propios frente a sólo dos de la base diez), de aquí su éxito en el tiempo: las medidas horarias y angulares han resistido incluso la racionalización del sistema métrico decimal (cien sólo tiene siete divisores propios aunque sea mucho mayor que sesenta).

El sistema posicional tiene un grave problema cuando no existe un símbolo que indique la posición: se produce ambigüedad: los números 1, 10 ó 100 se representarían igual si no existiera el cero que indica el verdadero valor de la cantidad escrita. El símbolo separador o indicador de vacío aparece por primera vez poco antes de la época seleúcida (siglo IV ac).

5. Orígenes del sistema decimal contemporáneo

Aunque nuestras cifras se llamen árabes (correcto en su procedencia inmediata), los árabes siempre las llamaron hindúes, “*testimonio de la agudeza de las ideas de los indios*”.

En el siglo V de nuestra era el sistema ya estaba establecido, cero incluido, pues los astrónomos y matemáticos indios lo usaban de forma general. El primer testimonio hacia Occidente nos lo ofrece el obispo de la iglesia siria de Keneikre sobre el Eúfrates, Severo Sébekt, hacia el año 662:

“No voy a hablar de la ciencia de los hindúes ni del método elocuente de sus cálculos, ni de su numeración que va más allá de las palabras; quiero referirme a lo que han hecho con nueve cifras...” [IFRAH, 1997]

El conocimiento de las cifras hindúes en el mundo islámico se suele asociar a los orígenes de la monarquía abbassí, al califa Abul Abbas al-Safáh (749-754). El judío español Abraham Ibn Ezra (siglo XII) lo asocia al Calila y Dimna :*“se envió al judío Arinda, de donde llevó de regreso a uno que conocía los números indios* [ANTELO, A. 1991, p. 278].

La generalización y extensión de los números indios van unidas al astrónomo-matemático del siglo IX Muhammad ibn Musa al-Jwarizmí. Los numerales van vinculados pues al álgebra y a las tablas astronómicas, los tres campos de trabajo de al-Jwarizmí. Occidente heredará junto a la ciencia los términos: álgebra, cifra, cero, algoritmo, guarismo, derivan del nombre o la obra del matemático musulmán.

Las cifras hindúes en su camino hacia occidente van a sufrir una mutación en dos grandes ramas: la del árabe escrito contemporáneo, y la usada por los calculistas de la arena, los calculistas con bastidor de polvo en lugar de ábaco. Estas últimas son las llamadas “gubar” (polvo). Las cifras gubar magrebí-andalusíes son el antecedente inmediato de nuestro actual sistema de numeración.

El largo deambular de la numeración llega y se va a detener un instante en Albelda de Iregua.

6. Albelda de Iregua

El primer historiador moderno de la matemática, J.F. MONTUCLA, se expresaba así a finales del XVIII:

“A lo largo de un dilatado periodo de casi un siglo y medio no he podido encontrar a pesar de mi investigación, un solo matemático. Creo poder caracterizar ese periodo como el de más profunda oscuridad que haya reinado en occidente. Pero hacia la mitad del siglo X, el espíritu humano parece esforzarse para despertarse de ese largo letargo. Aparecieron entonces algunos hombres que amantes de los conocimientos matemáticos mostraron un esfuerzo digno de elogio para adquirirlos. Los árabes –entre los que florecían esos conocimientos- fueron para los cristianos lo que antaño fueron los egipcios para los griegos ávidos de saber”. [MONTUCLA, 1800]

En efecto, en ese periodo oscuro, la culta Córdoba, o en su defecto los cenobios mozárabes del norte, eran los lugares de destino de los estudiosos cristianos. Como señalará algo después Daniel de Morlay (siglo XII):

“La pasión por el estudio me hizo abandonar Inglaterra. Permanecí poco tiempo en París, pero no vi allí más que salvajes instruidos. Ya que es hoy en Toledo donde se enseña a la gente la ciencia árabe, me apresuro a dirigirme allí para escuchar a los más sabios filósofos del mundo”. [VERNET, J. 1999]

Tras la conquista de la zona de Logroño (aprox. 923), el rey asturleonés Ordoño II hace construir el cenobio de San Martín de Albelda de Iregua. El desplome de la montaña acabó con los restos del antiguo monasterio, pero el códice terminado por Vigila en el año 976 se encuentra conservado en la biblioteca del Monasterio de San Lorenzo de El Escorial.

En el siglo IX el monasterio de referencia para la ciencia es sin duda Santa María de Ripoll, pero ha sido al de San Martín al que le ha correspondido mostrar el legado aprendido por los mozárabes andalusíes de las cifras indias:

“Y también a propósito de las cifras de la aritmética. Es necesario saber que los indios poseen una inteligencia muy sutil y que los restantes conceptos les ceden el paso en lo que concierne a la aritmética, la geometría y demás disciplinas liberales. Esto se pone de manifiesto de la mejor manera en las nueve figuras a través de las cuales expresan cada grado de no importa qué nivel. Esta es la forma

9 8 7 6 5 4 3 2 1” [VIGILA, 976]

Respecto a las cifras gubar que se van a usar durante siglos por los musulmanes occidentales, sólo se aprecia un giro de 90° de la figura del cuatro. Y respecto a las actuales falta el cero, lo que revela poco dominio del sistema y el primitivo cinco que se parece más a nuestro cuatro caligráfico.

Desde primeros del siglo XX, el centón de Vigila es una referencia obligada en cualquier historia de las cifras. Ningún otro documento similar latino o romance se ha encontrado en épocas próximas al Códice Albeldense.

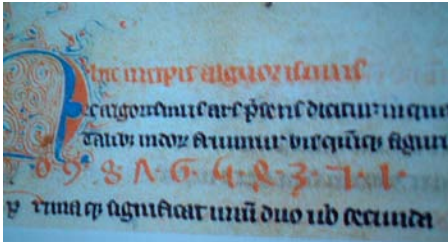
Posteriormente aparecerán referencias a los ápices que atribuyen erróneamente el origen del sistema al aritmético tardorromano Boecio.

7. Extensión de la aritmética árabe

No se producirá hasta mediados del siglo XII que la aritmética árabe se extienda por occidente, no como referencia erudita, sino como una forma práctica competitiva de operar en oposición al ábaco.

La llegada del cálculo indio tendrá lugar tras la conquista de Toledo (1085) cuando instigados por el Obispo Raimundo se inicien las traducciones latinas del *algorismo*.

Normalmente se atribuye a Leonardo Pisano (*Liber Abacci*, 1201) mayor importancia de la que tuvo para la implantación del algoritmo. El verdadero “*más vendido*” medieval fue el “*Algorimsus vulgaris*” de Juan de Sacrobosco, del que se conservan más de 200 versiones. Es destacable también por su singularidad el “*Carmen de algorismo*” de Alexandre de Villedieu, al tratarse de una aritmética en verso. Villedieu es continuador de una tradición de uso de la poesía para la divulgación científica que prácticamente desaparecerá en occidente con el Renacimiento y la imprenta



Aritmética de Villedieu s XIII



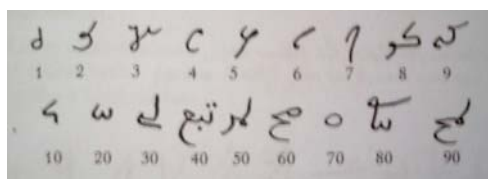
Aritmética de Sacrobosco s. XIII

8. La babel de los números

Está extendida como creencia simplista que un avance técnico o científico sustituye con gran rapidez a la técnica o conocimiento anterior. En el caso de la numeración estamos muy lejos de la realidad. Durante toda la Edad Media convivieron en Occidente distintos sistemas de cálculo y tipos de números, llegando a imponerse el sistema decimal con gran lentitud y según los usos.

En la península ibérica la confusión es aún mayor pues en el territorio coexisten tres culturas: cristiana, musulmana y judía.

Inicialmente la cultura cristiana occidental usa la numeración romana y esporádicamente hace referencia a la numeración alfabética griega.



Cifras Rumies

Los musulmanes andalusíes utilizaron inicialmente su numeración alfabética, pero además a su paso por Egipto tomaron la escritura griega de los coptos dando lugar a las llamadas cifras “rumies” (*rum*: romano o griego, usado para referirse a los bizantinos y al sacro imperio). Los coptos actuaron a modo de escribas y por ello implantaron su numeración.

Por otra parte, los judíos usaban su numeración alfabética similar a la griega pero con el alefato.

Por otra parte, la generalización del uso de la numeración india no se retrasó en su llegada a occidente, de forma que en el siglo X ya empezó a verse por calculistas y astrónomos musulmanes. El contacto de los cristianos cordobeses con los musulmanes da lugar a esa cultura mozárabe que recogen los cenobios del norte. El Códice de Vigila es un bello testimonio.

Lo que en el occidente cristiano medieval ocurrió a mediados del XII, debió de ser similar al proceso de extensión en la Córdoba califal en el X. El testimonio de Sa’id al-Andalusí, muerto en Toledo en el 1070, en el *Libro de la Categorías de las Naciones*, revela ya una madurez de generaciones:

“Entre lo que los indios nos han legado de los conocimientos relativos a los números, está la aritmética del polvo, que vulgarizó Muhammad ibn Musa al-Jwarizmí y es el método de cálculo más simple, más rápido y más fácil de aprender, el más cómodo de utilizar y el más estupendo por su composición. Esto testimonia la agudeza de ideas de los indios, la excelencia de su creatividad y la capacidad de invención”. [SA’ID, 1999]

Pese a todas las alabanzas de Sa’id, la penetración en todos los campos de uso de los números “gubar” no fue inmediata. Los notarios y registradores cristianos y árabes ante la confusión escriben los números en toda su extensión, tal como se hace en los talones bancarios. En los apuntes de cuentas comerciales o de contabilidad se usarán cifras romanas o rumies. Y serán los calculistas árabes del *polvo* y los astrónomos los que extenderán las cifras “gubaríes”.

9. Agítese todo en la Península Ibérica

Puesto que desde el siglo X la cultura árabe fue hegemónica en la Península Ibérica, lo normal es que terminara imponiendo sus métodos. Así, como ha estudiado Palencia, los cristianos mozárabes de Toledo usaron durante dos siglos después de la conquista las cifras “rumíes”.

Por otra parte, ¿quién iba a impedir a un matemático judío que actualizara su numeración alfabética para hacerla decimal? Así Abraham ibn Ezra (+1167) desarrolló un sistema decimal con los nueve primeros símbolos del alfabeto y un cero redondo igual al nuestro al que llama cifra (vacío, en árabe) o rueda en hebreo. También es curioso que la numeración de ibn Ezra se escriba al revés: las unidades son las primeras de la izquierda. Es destacable que un rey tan admirador y deudor de la cultura árabe como Alfonso X forzara la utilización de la numeración romana, pero no pudo evitar que la numeración gubar se imponga, en especial en las tablas astronómicas: tanto las tablas toledanas como las alfonsíes posteriores están en numeración india.

Las tablas utilizan una grafía similar con un cuatro muy parecido a un lazo, un cinco igual al cuatro actual y un siete más próximo a la V invertida

1	0	1	30	21	0	42	3
2	0	4	0	22	0	44	
3	0	Λ	30	23	0	4Λ	2
4	0	10	0	20	1	0	
5	0	12	30	24	1	2	
6	0	14	0	26	1	4	
Λ	0	1Λ	30	2Λ	1	Λ	
8	0	20	0	28	1	10	
9	0	22	30	29	1	12	
10	0	24	0	30	1	14	

Tablas Alfonsíes s XIV

Içt les altres segons lo loch: en que que es necessari: que hom ne hage de no valgue res p les dxenes senceres: quals nos poden scriure sens aquel quals .io. chifres se fan en tal ma .i. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0. Deles quals la primera comen ça ma finestra val .i. la segona. 2. la t la quarta. 4. la cinquena. 5. e ax altres entro ala dxena: que no val Item has de saber: que per nomb:

Aritmética SantCliment s XV

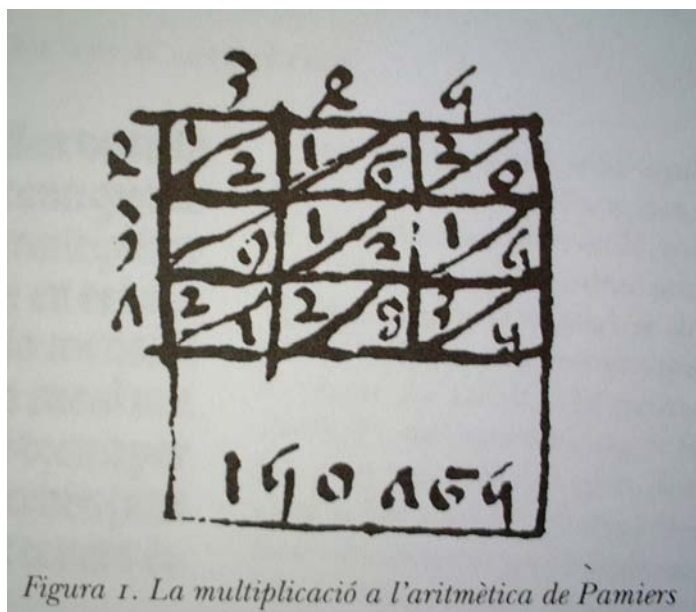


Figura 1. La multiplicació a l'aritmètica de Pamiers

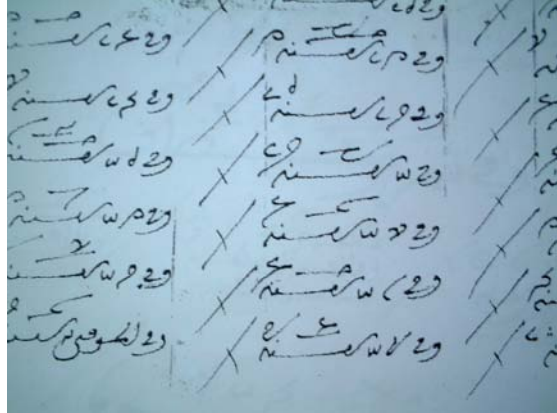
Aritmètica de Pamiers s XV

Estos símbolos se conservarán en los manuscritos hasta el siglo XV. Con la imprenta se va a producir ya en la península el iro del cuatro y el siete, haciendo los números árabes idénticos a los contemporáneos.

En la parte musulmana es de destacar que se usaron tanto las cifras gubar para las aritméticas eruditas como las cifras rumies para la contabilidad financiera. Un documento recientemente encontrado de la aduana de Almería que registra datos de 1477 a 1482 utiliza las cifras rumies.

Especial desasosiego se siente asistiendo a la degeneración de la cultura andalusí, observando cómo el sistema rumí es usado por los moriscos españoles, en algún caso convertido en mero recuerdo como ponen de manifiesto los estudios de Labarta y Barceló (1988).

La complejidad es tal que los manuscritos del último gran matemático de Granada, al-Qálasadi al-Bastí, se encuentra en cifras gubar pero también en árabe decimal oriental.



Aritmética de Al Qalasadí s XV

Rumies de Almería s XV

10. Recapitulación y mística

En resumen, el medioevo en la península ibérica nos muestra el uso de los siguientes sistemas de números:

- numeración romana
- numeración griega
- numeración hebrea
- numeración rumí – copta
- numeración decimal gubarí
- numeración decimal oriental
- numeración decimal hebrea
- numeración rumí degenerada
- numeración decimal cristiana de origen gubarí
- resto de numeración sexagesimal para medidas angulares y horarias.

Y no podemos terminar una descripción de los sistemas numéricos hispano-judío-árabe-cristianos sin una referencia a la mística de los números, que también refuerza la utilización de los sistemas alfabéticos. En especial el desarrollo de la Cábala, que establece una relación secreta entre letras y números, propia del uso del alfabeto, y que tuvo en la península ibérica sus autores y libros más clásicos: Abraham Abulafia (Toledo, 1240-1292) y Moisés ben Sem Tob de León (siglo XIII).

Esta mística, complementada con el lulismo ejerce una influencia que todavía se percibe en Leibniz.

11. Bibliografía

- ALLARD, A (2000) *La aritmética en la Edad Media*. Mundo Científico. 217. 49-55
- ANTELO, A. (1991) *Judíos españoles de la Edad de Oro*, UNED, Madrid.
- CAUNEDO DEL POTRO, B y CÓRDOBA DE LA LLAVE, R (2000) *El arte del algorismo*. Mss. 46 de la Real Colegiata de San Isidoro de León. Junta de Castilla León.
- GROULARD, S (2000) *Les versiones latines inédite de l'algorisme* de Jean Sacrobosco. UCL. Louvain-la-Neuve (1994)
- IFRAH, G (1997) *Historia Universal de las Cifras*. Madrid. Espasa. Traducción francesa de 1994.
- LABARTA, A y BARCELO, C (1988) *Números y cifras en documentos arábigos hispanos*. Universidad de Córdoba
- MONTUCLA, J. F. (1800) *Histoire des Mathematiques* – An VIII Nouvelle édition
- SA'ID AL-ANDALUSÍ (1999) *Libro de las categorías de las naciones* – Akal. Madrid.
- SALAVERT FABIANI, V. L. (1994) *Aritmética y Sociedad en la España del XVI*. En: Garma – Flament – Navarro. *Contra los titanes de la rutina*. CSIC, 51-69.
- SÁNCHEZ PÉREZ, J.A. (1949) *La aritmética en Roma, en India y en Arabia*. CSIC Madrid.
- SÁNCHEZ PEREZ, J.A. (1935) *Sobre las cifras rumies*. Al-Andalus, 3, 97-125
- SANT CLIMENT, F (1998) *Summa de l'art d'aritmética*. Facsimil de Antoni Mallet de la edición de 1482. Universidad de Vic.
- SESIANO, J (1999) *Une introduction á l'histoire de l'algebre*. P.P.U.R. Lausanne.
- SMITH, D.E. (1919) *Number stories of long ago*. NCTM – Washington. First Printing.
- TABLAS DE TOLEDO. Mss 9271 de la Biblioteca Nacional de Madrid.
- TABLAS ALFONSÍES. Mss 4238 de la Biblioteca Nacional de Madrid.
- VERNET, J. (1999) *Lo que Europa debe al Islam de España*. Círculo de lectores. Barcelona.
- VIGILA (976) *Códice Albeldense*. Biblioteca del Real Monasterio de El Escorial.